Univ. of
Toronto
Library

BINDING LIST JUN 1 5 1921

COURS

D'ASTRONOMIE PRATIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

55, quai des Grands-Augustins.

Astron
C

COURS

D'ASTRONOMIE PRATIQUE

APPLICATION
A LA GÉOGRAPHIE ET A LA NAVIGATION

PAR

E. CASPARI,

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE.

PREMIÈRE PARTIE

COORDONNÉES VRAIES ET APPARENTES. — THÉORIE DES INSTRUMENTS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1888

(Tous droits réservés.)

162311
28/5/21

AVANT-PROPOS.

Celui qui entreprend l'étude de l'Astronomie se trouve en présence d'une bibliographie abondante en chefs-d'œuvre : vouloir y ajouter un Livre qui n'a pas pour lui l'excuse d'une nouveauté complète peut paraître présomptueux ou pour le moins inutile : il est donc nécessaire de marquer les raisons qui nous ont fait entreprendre ce travail, et d'en bien préciser l'objet.

Chargé, à plusieurs époques, de professer un cours d'Astronomie pratique aux Services hydrographiques de la Marine, nous avons eu l'occasion de reconnaître que, malgré l'abondance des Traités sur des matières connexes, on manque, en France, d'un Manuel pouvant servir de Guide pratique pour la solution des problèmes plus spécialement géographiques. Les Traités classiques de Francœur, de Brunnow, de Chauvenet, de M. Faye et bien d'autres, ont plus particulièrement en vue les travaux des grands Observatoires : la majeure partie de leur contenu est inutile au voyageur. Les Traités d'Hydrographie et de Navigation n'envisagent qu'un seul côté du problème, et la tendance actuelle, tout en simplifiant les méthodes, les spécialise chaque jour davantage.

Il est nécessaire, pour bien exposer cette partie de la Science,

d'avoir pratiqué les observations dans des circonstances variées de temps et de lieux et d'en avoir calculé soi-même les résultats. Il n'est pas moins utile d'avoir appris, par la pratique de l'enseignement, quels sont les points de doctrine qui réclament plus de développements, quels sont les malentendus qu'il faut éviter. C'est parce que nous avons fait cette double expérience des voyages et de l'enseignement que nous nous sommes cru autorisé à entreprendre cette tâche. Nous ne saurions prétendre à remplacer les Traités si complets que nous avons cités, mais nous voudrions réunir ici tout ce qui est nécessaire au voyageur pour faire œuvre sérieuse. Notre ambition est d'être utile au marin aussi bien qu'à l'explorateur des continents : la différence du mode de locomotion ne peut pas introduire une différence essentielle dans les méthodes destinées à fixer la position des points.

Nous n'entrons pas dans le détail du calcul des éphémérides : nous devons nous borner à montrer l'usage pratique qu'on en fait, en expliquant sommairement la signification de leur contenu. Nous avons eu plus particulièrement en vue l'usage de la *Connaissance des Temps,* qui est aujourd'hui au premier rang des Almanachs astronomiques.

Nous insisterons sur les instruments et les méthodes d'observation. Le voyageur n'a souvent à sa disposition que des instruments imparfaits plus ou moins détériorés : mais il est possible, même dans ce cas, par un choix judicieux des méthodes d'observation, de résoudre les problèmes avec une précision plus grande que celle que l'on pouvait espérer *à priori.* C'est dire que, sans vouloir aborder par le menu tous les problèmes possibles de Trigonométrie sphérique, et en élaguant tous ceux dont l'intérêt pratique n'est pas bien net, nous nous efforcerons de donner un choix d'un assez grand nombre de méthodes éprouvées par l'expérience. Nous y joindrons des démonstrations aussi simples, mais aussi variées

que possible, afin de familiariser l'esprit avec les méthodes analytiques aussi bien qu'avec celles de la Géométrie : elles ne sont pas uniquement destinées à établir la vérité de nos formules, mais elles doivent guider le lecteur pour lui apprendre à modifier lui-même les solutions des problèmes selon les cas variés qui se présentent et à voir toujours, par delà les expressions algébriques, les faits concrets dont ces expressions sont la traduction. Sans se tenir servilement attaché aux anciennes prescriptions, il convient de ne pas innover hors de propos dans des matières très simples et bien connues. Il ne nous paraît pas nécessaire de citer toujours les noms des auteurs. Sur plusieurs points nous croyons nos solutions nouvelles : nous n'avons pas cru devoir en faire mention, parce qu'il se peut qu'elles se trouvent dans des Ouvrages dont nous n'avons pas eu connaissance : il semble difficile d'inventer beaucoup dans un domaine aussi exploré que celui-là ; le nom de l'auteur d'une méthode est d'ailleurs inutile pour son application. Nous avons tâché, par contre, afin de bien accentuer le caractère pratique du Livre, d'appuyer nos démonstrations par des exemples choisis parmi nos observations personnelles, faites tant sur les côtes de France ou à l'Observatoire du Dépôt de la Marine que hors d'Europe, aux Antilles, en Indo-Chine et en Afrique.

Nous insisterons aussi sur certaines considérations que l'expérience a suggérées et dont on ne saurait assez relever l'importance : il en résultera des redites, mais elles seront intentionnelles : il est utile de revenir sur des détails d'observations, et de les rappeler au moment même où il s'agit d'en faire l'application.

Nous terminons par la théorie des erreurs et la résolution des équations de condition. Nous tenions, en effet, à accompagner cette théorie d'exemples pris dans ce qui précède : il sera pourtant utile d'en étudier les principes en même temps que tous les autres problèmes : elle est l'alpha et l'oméga des Sciences d'observation.

Mais sa principale utilité, pensons-nous, est de guider l'observation elle-même : et nous attachons beaucoup moins d'intérêt à la manière de résoudre les équations de condition, qui, dans la plupart des cas que nous examinerons, n'ajouterait guère à l'exactitude des résultats obtenus et discutés autrement, qu'à la marche à suivre pour établir ces équations et évaluer la précision d'une observation.

Les Tables numériques données à la suite de la première Partie dispenseront de l'emploi de Tables auxiliaires autres que celles des logarithmes et de la *Connaissance des Temps*.

E. C.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Pages.

INTRODUCTION..... 1

LIVRE I.

Coordonnées vraies et apparentes.

CHAPITRE I.

RÉSUMÉ DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

1. Formules fondamentales..... 11
2. Formules calculables par logarithmes..... 14
3. Formules différentielles..... 16
4. Développements en série..... 16
5. Séries trigonométriques..... 19
6. Transformation des coordonnées avec changement d'origine. Formules générales de la parallaxe..... 20
7. Autres développements en série..... 24
8. Calculs numériques..... 26
9. Conversion du temps en arc et réciproquement..... 29
10. Interpolation..... 31
11. Constructions graphiques..... 35

CHAPITRE II.

DE LA SPHÈRE CÉLESTE.

12. Mouvement diurne..... 38
13. Systèmes de coordonnées..... 39
14. Coordonnées zénithales..... 40
15. Coordonnées horaires..... 41
16. Coordonnées uranographiques..... 44
17. Du temps et de sa mesure..... 46

Pages.
18. Variations des plans fondamentaux 49
19. Aberration 53
20. Éphémérides astronomiques. Explication et usage de la *Connaissance des Temps* 57
21. Catalogues d'étoiles 60

CHAPITRE III.

FORME ET DIMENSIONS DE LA TERRE. — ATMOSPHÈRE. CORRECTIONS QUI EN RÉSULTENT.

22. Coordonnées géographiques 64
23. Éléments de l'ellipsoïde 67
24. Rayons de courbure principaux 70
25. Parallaxes 71
26. Parallaxe en azimut et en distance zénithale 72
27. Parallaxe en ascension droite et en distance polaire 76
28. Influence de la parallaxe sur le diamètre apparent 78
29. Courbes de hauteur 80
30. Réfractions astronomiques 82
31. Effet de la réfraction sur les coordonnées et les dimensions apparentes des astres 90
32. Dépression de l'horizon 91

LIVRE II.

Théorie des instruments.

CHAPITRE IV.

INSTRUMENTS DE MESURE DES ANGLES.

33. Classification des instruments 97
34. *Lunette astronomique* 98
35. Champ d'une lunette. Sa clarté 103
36. Réticule et micromètre. Mise au point 107
37. Autres instruments d'optique 112
38. Principe de la collimation 115
39. Éclairage des lunettes pour les observations de nuit 117
40. *Détermination de la verticale.* Horizon artificiel 117
41. Niveau à bulle 120

Pages.

42. Nivellement d'un triangle et réglage du niveau 127
43. *Cercles divisés.* Mesure des angles. Verniers et microscopes 128
44. Erreurs des cercles 132
45. Réitération et répétition 137
46. *Cercle méridien.* Nivellement 140
47. Collimation 144
48. Installation de la lunette dans le méridien 147
49. Calcul des corrections 150
50. Détermination de la déviation azimutale 154
51. Réduction au fil moyen. Distance équatoriale des fils 155
52. *Théodolite et altazimut* 158
53. Théodolite à lunette centrée 159
54. Théodolite à lunette excentrique 161
55. Nivellement de l'axe vertical 164
56. Autres corrections instrumentales 171
57. *Instrument des passages dans le premier vertical* 184
58. *Flexion des lunettes* 185
59. *Instruments à réflexion* 187
60. Les miroirs doivent être plans 189
61. Vérifier la perpendicularité des miroirs et du limbe 189
62. Détermination du point de parallélisme. Correction instrumentale 192
63. Parallélisme des faces des glaces. Vérification et correction 195
64. Méthodes de rectification de M. Gruey 198
65. Résumé des erreurs instrumentales 200
66. Calcul de l'erreur d'excentricité 201
67. Verres colorés. Observations de nuit 205
68. Des différents types d'instruments à réflexion 206
69. *Pratique des observations.* Méthodes générales 211
70. Instruments à réflexion 214
71. Théodolite et altazimut. Observation des distances zénithales 218
72. Observation de l'azimut 221
73. Résumé 223

CHAPITRE V.

DES CHRONOMÈTRES.

74. *Description du chronomètre.* Régulateur 225
75. Echappement 230
76. Rouage 232
77. Moteur 233

Pages.

78. *Theorie mecanique du mouvement des chronomètres.* Isochronisme et mouvements vibratoires..... 236
79. Aperçu général des causes perturbatrices. Leur degré d'importance. Température. Huiles. Causes accidentelles..... 238
80. Du spiral..... 242
81. Du balancier compensateur..... 245
82. Propriétés du balancier. Résultats de l'expérience..... 248
83. Marche des chronomètres inclinés..... 251
84. Des perturbations de la marche..... 255
85. *Calcul des marches au mouillage*..... 265
86. Procédés graphiques..... 268
87. Méthode de Lieussou..... 271
88. Méthode de M. Yvon Villarceau. Application du théorème de Taylor.... 275

TABLES.

Dépression apparente de l'horizon..... II
Limites des circonméridiennes..... III
Circonméridiennes..... IV
Données relatives au sphéroïde..... IX

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

Dès les temps les plus reculés l'étude des astres a servi aux navigateurs à diriger leur route sur les mers : ne connaissant pas la boussole, ils cherchaient au ciel des repères qui leur faisaient défaut tout autour d'eux. Ulysse interrogeait la Grande Ourse et le Bouvier pour leur demander la route d'Ithaque. Les pilotes phéniciens scrutaient l'horizon au Nord et au Sud, et estimaient leur latitude par les étoiles qui apparaissaient et celles qui disparaissaient à mesure qu'ils se déplaçaient. En même temps que les navigateurs y lisaient leur position et leur route, le ciel servait aux Chaldéens et aux Égyptiens d'échelle pour la mesure du temps, et le besoin d'un calendrier, joint à l'instinct qui pousse l'homme à regarder le ciel, donnait naissance aux premières recherches astronomiques. Cette dernière étude était déjà poussée fort loin du temps de Jules César, tandis que l'application à la Géographie ne faisait que des progrès fort lents. Ce n'est guère que dans les quatre derniers siècles, à partir des Copernic, des Tycho-Brahé, que l'Astronomie nautique a commencé à progresser. Profitant de tous les progrès de la Science pure, elle lui a servi de stimulant, et l'on peut dire que les études relatives à la Lune, aux marées, aux horloges ont été le point de départ des plus beaux travaux d'Analyse et de Mécanique.

Aujourd'hui encore la Géographie est la plus importante des applications pratiques de l'Astronomie. On sait l'objet que nous nous proposons : présenter l'ensemble de ces applications et ne présenter que cela. Il s'agit de donner aux voyageurs le moyen de fixer le mieux possible leur position et leur route. Les données recueillies avec des instruments transportables seront toujours d'une précision inférieure à celle des observations faites dans les grands observatoires, et à celle des éphémérides qui s'en déduisent. Beau-

coup de méthodes, très importantes lorsqu'il s'agit d'atteindre les dernières limites de l'exactitude, perdent toute leur valeur quand on vise moins haut; d'autres considérations au contraire, qui frappent peu l'astronome, parce qu'il reste au même lieu, s'imposent au voyageur qui n'a pas le temps indéfini devant lui et dont l'horizon change chaque jour. Il serait donc à la fois superflu et insuffisant de se borner à transcrire les règles appliquées dans les observatoires. Ceux-ci sont, en grande majorité, situés dans des régions de latitude moyenne; les méthodes qui y réussissent bien s'appliqueraient souvent avec un médiocre succès sous les basses latitudes, vers l'exploration desquelles se dirigent en ce moment les principaux efforts des voyageurs.

Si on établissait un observatoire dans les environs de l'équateur, l'instrument des passages au premier vertical, qui a donné à Poulkova et à Kœnigsberg des résultats d'une précision presque inespérée, y serait d'un usage nul; les mesures directes d'azimut avec un cercle horizontal divisé pourraient au contraire fournir des résultats d'une grande valeur pour les distances polaires absolues : les réfractions dans le plan vertical, les parallaxes de hauteur, les flexions, les déformations des cercles par la pesanteur, seraient ou éliminées ou grandement réduites. Sous les latitudes moyennes, la mesure de la distance polaire est solidaire de la détermination de la verticale et de la latitude : à mesure qu'on se rapproche de l'équateur, l'influence de ces éléments est moins grande : à l'équateur même, les amplitudes ortives et occases des étoiles donneront directement leur déclinaison, la connaissance de la verticale n'intervenant que dans le calcul de la réduction à l'horizon, c'est-à-dire dans une quantité du deuxième ordre.

Il y a là un sujet d'étude d'un haut intérêt théorique, et il n'est peut-être pas défendu de penser que les méthodes employées jusqu'ici dans nos pays ont donné à peu près tout ce qu'on en pouvait attendre, et qu'on sera conduit à demander les perfectionnements les plus sérieux des résultats connus à des observatoires situés sous de basses latitudes. N'est-ce pas à l'équateur même qu'on déterminerait avec le plus de certitude l'obliquité de l'écliptique et la position du point vernal? Dans son beau mémoire sur l'aberration, Yvon Villarceau est arrivé à montrer qu'on réalisera les conditions les plus favorables à la détermination de la

constante de l'aberration en observant en trois lieux, dont les latitudes seraient $\pm 54^{\circ}44'$ et 0°.

Mais il est superflu d'insister sur ces considérations dans lesquelles la pratique ne trouverait pas assez de profit; dans l'ordre d'idées que nous considérons, c'est même à un point de vue exactement opposé qu'il convient de se placer.

On voit bien en effet, sans entrer dans le détail, que telle observation qui, par exemple, doit donner la déclinaison indépendamment, ou à peu près, de la latitude, serait essentiellement impropre à fournir cette latitude, la déclinaison étant donnée : de même que les passages à la lunette méridienne, qui donnent le temps indépendamment de la latitude et de la déclinaison, ne pourront servir à déterminer ces quantités que si l'on modifie complètement l'instrument et la manière d'observer, par l'adjonction d'un cercle vertical divisé et d'un niveau parallèle au méridien.

En se plaçant à ce point de vue on reconnaît que l'Astronomie du voyageur est en quelque sorte le contrepied de l'Astronomie d'observatoire, et qu'une division des deux domaines s'impose naturellement, puisque ce qui est l'inconnue cherchée dans un des cas, devient une donnée connue dans l'autre.

Même différence entre la Géodésie expéditive et la Géodésie proprement dite; cette dernière se propose l'étude de la forme de la Terre, la première doit la supposer connue.

Même différence encore quand on considère les instruments. Ceux des observatoires ont une grande masse, une grande fixité, et peuvent être employés à loisir : les lunettes sont puissantes, les corrections instrumentales presque constantes peuvent être déterminées avec rigueur. En voyage, c'est le contraire qui est vrai : petites lunettes, petits instruments peu stables, sujets à dérangement; nécessité de varier les procédés d'observation pour parer à mille difficultés locales, au manque de temps ou de circonstances favorables, au ciel nuageux, etc. Il est nécessaire d'opérer vite, pour ne pas perdre une occasion qui peut-être ne se représentera plus. Il faut réduire au minimum le bagage d'instruments, ceux-ci au minimum de volume, et quand on en a perdu un, savoir y suppléer avec ce qui reste.

Dans les voyages en mer, l'expérience a démontré que le chronomètre est d'un usage précieux et que ses perturbations, bien étu-

diées, ne sont guère plus à redouter que les imperfections des instruments à cercles divisés.

Comme il suffit d'un peu d'habitude et d'exercice pour apprécier le temps à $0^s,2$ et même à $0^s,1$ près, ce qui représente $3''$ et $1'',5$ d'arc sur un angle horaire, on voit qu'on dispose là d'un intrument de mesure plus précis que la plupart des cercles divisés. M. Liais pense que les perturbations des chronomètres dans les voyages par terre sont trop considérables pour qu'il soit possible de se fier à ces instruments : les méthodes d'observation qu'il recommande ont pour but principal d'arriver à éliminer l'effet des irrégularités de leur marche.

Ce qu'il y a de fondé dans cette remarque, basée sur l'expérience, ne nous échappe pas; nous savons pourtant que des tentatives heureuses ont été faites pour déterminer des longitudes au moyen du transport du temps par voie de terre. Nous rappelons les travaux russes et, parmi les explorateurs français, M. Vignes en Palestine, M. Rouvier au Congo. Une bonne partie des voyages dans l'intérieur des continents a du reste pour objectif l'exploration des cours d'eau, et là le transport des chronomètres reprend tous ses avantages. Sans doute, les perturbations dues au transport par terre sont plus considérables que celles que l'on peut craindre dans une traversée : la précision atteinte au bout d'un certain temps est donc moindre, et le résultat a besoin d'être contrôlé plus fréquemment; mais on aurait tort de se priver complètement de ce secours utile. Si l'on observe aussi fréquemment que possible, l'intervalle entre les observations ne sera jamais très long : les différences de longitude successivement obtenues, souvent contrôlées par des azimuts, auront des chances d'exactitude supérieure. En exceptant le cas où de véritables avaries se sont produites, les perturbations n'ont pas d'effet bien sensible pour une courte période; on peut admettre, par exemple, que la marche du chronomètre reste constante et régulière au cours d'une soirée d'observations faites en un même lieu. L'avantage tiré de la précision des mesures reparaît tout entier : il se combine avec la supposition, très légitime ici, de la constance de l'équation personnelle; l'observation du temps donne, avec un instrument très portatif et peu volumineux, des résultats plus exacts que les mesures angulaires faites avec des instruments plus lourds, et tout

aussi exposés à se déranger par le transport. L'essentiel alors n'est pas d'avoir des cercles finement gradués, mais de disposer de lunettes douées d'un grossissement suffisant : c'est de ce facteur que dépend la précision des estimations du temps, et c'est justement ce qui arrive souvent. Avec un petit théodolite dont le vernier ne donne que la minute, et au plus les 30″ à l'estime, on peut avoir une lunette qui grossit de 15 à 20 fois, qui permet alors de noter à $0^s,4$ près au moins l'instant du passage d'un astre derrière un fil, ce qui correspond à 6″ d'arc. C'est d'après ces considérations que nous avons cru devoir attacher une importance particulière aux méthodes qui permettent d'utiliser des instruments moins précis comme graduation. Nous pensons que le voyageur qui se sera bien pénétré de l'esprit des méthodes données, trouvera de nombreuses occasions de faire des observations très exactes. L'avantage résultant de la finesse de graduation des cercles, dans le cas très général où l'on ne dispose pas de microscopes pour les lectures et où l'on s'en tient au vernier, est d'ailleurs acheté au prix d'un défaut qui est souvent capital pour les observations de nuit : c'est la difficulté d'éclairage et de lecture.

Non seulement l'observation en est rendue plus incertaine, mais la fatigue arrive beaucoup plus vite et on recueille un moindre nombre d'observations au prix du même travail. Cette question de l'éclairage ne se pose presque pas dans les observatoires : il est reçu qu'on n'y fait pas de différence entre les observations de jour et nuit : elle est au contraire d'une extrême importance en voyage. Dans les pays plus ou moins sauvages, bien des choses sont faciles de jour qui deviennent très pénibles la nuit. Sans même envisager le cas, qui se présente pourtant (*voir* les travaux de M. d'Abbadie), où l'on ne trouve plus de quoi s'éclairer; sans compter l'inconvénient qu'il y a souvent à faire de la lumière et à attirer des myriades d'insectes qui rendent tout travail impossible, sans parler de la nécessité du repos nocturne après une journée de voyage et de travail, il y a une considération majeure et qui s'impose : une position géographique n'est généralement pas destinée à rester isolée, elle doit être reliée à d'autres points par voie de relèvements et d'azimuts, et les points terrestres ne sont le plus souvent visibles que de jour.

Ces considérations nous ont engagé, tout en faisant aux obser-

vations d'étoiles la large part qui leur revient, à insister sur les observations du Soleil. On devra aussi s'habituer à tirer parti de celles de la Lune toutes les fois que cet astre est sur l'horizon, soit de jour, soit de nuit. D'abord, ce sont les meilleures observations pour avoir une longitude absolue. De plus et en dehors de cet usage, à traiter la Lune comme tout autre astre, la combinaison de ces observations avec celles du Soleil permet d'aller plus vite; elle double le nombre des circonstances favorables, sans autre complication que des interpolations un peu plus longues et une parallaxe plus forte. Or, ce genre de complication n'est rien auprès de la simplification de l'observation, car ses inconvénients ne se font sentir qu'au calculateur, lequel a du loisir et n'est plus pressé par les circonstances.

C'est en nous inspirant du même ordre d'idées que nous avons adopté un système de coordonnées différent de celui qui figure dans la plupart des traités d'Astronomie. L'usage des distances zénithales, des distances polaires et des colatitudes, remplaçant les hauteurs, les déclinaisons et les latitudes, a été depuis longtemps introduit dans l'enseignement de l'Ecole Polytechnique par MM. Faye et Laussedat : nous pourrions donc nous dispenser d'en justifier l'emploi. Mais comme la pratique contraire s'est maintenue, au moins en partie, dans les usages des astronomes, quelques mots d'explication ne seront pas superflus. Nous ne méconnaissons pas que, dans certains cas particuliers, le système usuel est préférable : la notation de colatitude, comptée du pôle nord, fait disparaître la symétrie des nombres correspondant à la symétrie du globe terrestre; elle a besoin d'une transformation quand on veut placer le résultat du calcul sur les cartes géographiques usuelles, et l'origine des colatitudes est reportée à l'infini sur les cartes de Mercator. Les éphémérides astronomiques donnent ordinairement la déclinaison : les instruments à réflexion mesurent la hauteur ou la double hauteur. Une partie de ces inconvénients serait déjà atténuée pratiquement si l'on se décidait enfin à recourir à la division décimale du quadrant : le complément à 10 ou à ses puissances et multiples se prend en effet avec une grande facilité. Malgré nos préférences pour ce système, nous n'avons pas cru pouvoir l'employer, afin de ne pas compliquer les transformations d'heures en angles.

Pour justifier l'emploi des coordonnées auxquelles nous avons donné la préférence, on peut observer tout d'abord que ces coordonnées commencent déjà à entrer dans la pratique. Les Catalogues d'étoiles donnent généralement les distances polaires, et il en résulte une simplification des réductions au lieu apparent. Cet usage paraît être en voie de se généraliser dans l'Astronomie sidérale : il se concilie mieux avec la graduation continue des cercles divisés. Dans les traités d'Astronomie nautique, bon nombre de problèmes sont traités au moyen de la colatitude et de la distance polaire. Les instruments portatifs les plus précis, le théodolite, par exemple, donnent directement la distance zénithale ou son double, et non la hauteur : dans les observatoires on pointe au nadir et non à l'horizon. C'est dire que l'usage des coordonnées rapportées aux plans fondamentaux ne dispense pas de recourir aux coordonnées rapportées aux pôles de ces plans. Ces dernières ont des avantages de simplicité qui les ont fait préférer par les géomètres ; leur emploi permet d'éviter généralement les questions de signes algébriques qui compliquent écritures et calculs, et augmentent le nombre de chances d'erreurs. Il faut toujours un peu de réflexion pour interpoler dans le voisinage des changements de signe, et c'est déjà assez d'avoir un signe à la variation, sans en donner un à la quantité qui varie. A l'avantage d'être usuelles en Analyse et d'entrer dans les formules ordinaires de la Géométrie, les coordonnées rapportées au pôle et au zénith joignent celui d'être les côtés mêmes du triangle sphérique de position et de former ainsi un ensemble homogène et continu ; les raisonnements se font plus facilement sur ce triangle et les formules de la Trigonométrie sphérique s'appliquent directement. Une seule de nos coordonnées, l'azimut, au lieu d'être l'angle même du triangle, en est l'angle extérieur ; mais les lignes trigonométriques sont les mêmes, le signe seul change pour quelques-unes ; les azimuts sont comptés d'une façon continue à partir de la même origine et dans le même sens que les angles horaires : ce sont les azimuts adoptés presque universellement par les géodésiens.

Il nous paraît hors de doute que les astronomes eux-mêmes en viendraient à se servir des colatitudes, s'ils voyageaient et s'ils devaient faire changer de signe à leur latitude.

Pour rendre ce système plus pratique, il y aurait avantage à

adopter la notation de M. d'Abbadie, et à employer les mots d'*apopôle* et d'*apozénith* pour la distance polaire et la distance zénithale. Nous n'avons pas osé appliquer ces dénominations, malgré la simplification qui en résulte, pour ne pas rompre trop radicalement avec les usages reçus. Cette simplification peut être encore mieux obtenue si l'on a soin de réserver rigoureusement les notations λ, δ et ζ pour la colatitude, la distance polaire et la distance zénithale, ce qui permet de dire le λ d'un lieu, le δ et le ζ d'un astre.

Telles sont les notations que nous emploierons de préférence en restant dans l'ordre d'idées que nous venons d'indiquer; nous y joindrons :

P angle horaire (angle au pôle).
A azimut.
α ascension droite.
ϖ angle parallactique ou angle à l'astre dans le triangle de position.
t heure au chronomètre.
θ température.

Ce sont là les quantités qui reviennent le plus souvent et dont il y a le plus d'intérêt à fixer les notations.

Il est encore une réflexion d'ordre général qui doit trouver sa place ici. Dans toutes les Sciences d'observation on attache une extrême importance au contrôle des observations. On peut presque leur appliquer l'axiome juridique : *Testis unus, testis nullus.* Ce qui est vrai des observations l'est également des calculs. Un calcul quelconque doit toujours être refait et vérifié, même quand le résultat qui en provient est appelé à être vérifié lui-même. C'est ce qui nous a engagé à proscrire les méthodes destinées à calculer en bloc la moyenne des résultats de toute une série d'observations. Quelque soin qu'on apporte à ces réductions, les chances d'erreur sont aussi nombreuses que dans les opérations de détail, et rien ne fait reconnaître ces erreurs. Supposons par exemple qu'on ait pris cinq doubles distances zénithales pour calculer un état absolu. Moyennant une petite correction, on peut ne faire le calcul qu'une seule fois. Il est préférable pourtant de calculer isolément les cinq observations. Le degré de concordance des états absolus entre eux fera voir si aucun des calculs partiels n'est

erroné. Supposons qu'on trouve que les états absolus, suivant une loi d'ailleurs régulière, vont en augmentant du premier au dernier, quand ils devraient être égaux : il y aura à rechercher si on ne s'est pas trompé sur la colatitude ou sur la déclinaison; l'allure des erreurs trouvées aidera dans cette recherche. Dans l'intérêt même des résultats, il faut toujours éviter d'introduire dans le calcul des décimales inutiles. Le nombre de chances d'erreur croît avec le nombre de décimales employées, et le temps nécessaire au calcul croît même presque comme le carré de ce nombre. La chance d'erreur peut exister d'ailleurs sur une décimale d'un ordre quelconque; les plus grosses erreurs sont évidemment les plus faciles à découvrir; il n'en est pas moins vrai qu'elles peuvent souvent passer inaperçues faute de contrôle. Il y a surtout à rechercher les vérifications quand les calculs conduisent à des considérations délicates de signes : c'est alors la méthode même qui doit être variée. Un azimut par exemple, calculé par les analogies de Néper, doit être vérifié au moyen de la formule des cotangentes, etc. On nous excusera de revenir fréquemment dans la suite sur des considérations de ce genre que l'expérience nous a démontré n'être pas oiseuses; nous avons eu en effet l'occasion de découvrir des erreurs qui avaient échappé à des calculateurs habiles, uniquement parce qu'ils avaient négligé une vérification qui se présentait naturellement. Une simple construction graphique remplira souvent le but d'une manière bien suffisante.

Il n'est peut être pas inutile de marquer dès le début le degré de précision auquel on s'attachera. L'exactitude d'une observation ne dépend que des instruments et des conditions dans lesquelles l'observateur se trouve placé : il faut faire rendre à ces instruments et à ces circonstances le maximum de ce qu'ils peuvent fournir. Les instruments portatifs peuvent atteindre dans certains cas à l'exactitude de ceux des observatoires : il suffit de rappeler ici que M. Yvon Villarceau considérait le cercle méridien portatif de Rigaud, dont il s'était servi pour la détermination des longitudes et des latitudes en France, comme comparable aux instruments méridiens de l'Observatoire de Paris, et que les grands observatoires géodésiques recherchent ce même degré de précision. Mais, dans la généralité des cas, on doit avoir des prétentions plus modestes. L'essentiel est de se rendre compte de la précision pos-

sible dans les conditions où l'on opère, et de proportionner les observations et les calculs à cette précision. Il ne faut jamais se faire illusion par la concordance des résultats partiels, mais soumettre toujours ces résultats à une critique sévère. Il faut surtout avoir égard à ces considérations quand on fait les calculs, et ne pas conserver des décimales douteuses qui deviennent nuisibles dès qu'elles ne sont plus utiles. Etant donné, par exemple, qu'en voyage et avec le chronomètre portatif, il n'y a pas à compter sur mieux que le dixième de seconde de temps, quel avantage aurait-on à faire entrer les millièmes de secondes dans les calculs?

Nous tenons essentiellement à bien marquer ce point, pour que l'on ne pense pas que nous nous contentons d'à peu près. En réalité, la rigueur dans une science d'observation est tout autre chose que la rigueur mathématique. Dans les observatoires même, on préfère souvent les développements en série aux formules rigoureuses qu'il est possible d'employer, et on se trouve ainsi obtenir une plus grande exactitude pratique en sacrifiant la rigueur géométrique.

On peut appliquer les mêmes considérations à la conduite des observations sur le terrain.

Mais il est un autre principe qui doit tout dominer en voyage, c'est de recueillir le plus de matériaux possible. L'occasion est fugitive, il faut toujours la saisir quand elle se présente. On se résoudra souvent à faire une observation dans des conditions défavorables en se rappelant combien de fois déjà, à l'instant propice, le ciel s'est trouvé couvert; si cette crainte ne se réalise pas, l'observation sera faite deux fois, ce qui vaut mieux que rien, et on aura une vérification, ce qui est très important.

COURS

D'ASTRONOMIE PRATIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

COORDONNÉES VRAIES ET APPARENTES.

CHAPITRE I.

RÉSUMÉ DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

1. — Formules fondamentales.

L'Astronomie pratique a pour objet principal la détermination des positions géographiques et des gisements relatifs des points terrestres. Les moyens d'observation dont elle dispose reviennent en dernière analyse à déterminer les coordonnées angulaires d'astres par rapport à certains plans, notamment par rapport à l'horizon et au méridien du lieu d'observation. Leurs coordonnées sont supposées connues par rapport aux plans fondamentaux : équateur céleste et méridien du point vernal ; le problème revient donc à passer d'un système de coordonnées à un autre.

Transformation des coordonnées sans changement d'origine. — Les formules de transformation sont les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

Considérons d'abord deux systèmes d'axes rectangulaires dans un plan (*fig.* 1). Soit OM = 1 ; on a

$$x = \cos\varphi, \qquad x' = \cos\varphi', \qquad \varphi = \varphi' + c,$$
$$z = \sin\varphi, \qquad z' = \sin\varphi',$$

sans aucune restriction de grandeur ni de signe. On en tire

$$x = x'\cos c - z'\sin c, \qquad z = x'\sin c + z'\cos c.$$

Considérons maintenant un axe des y perpendiculaire à ce plan (*fig.* 2) et coupons tout le système par une sphère de rayon égal

Fig. 1.

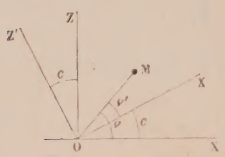
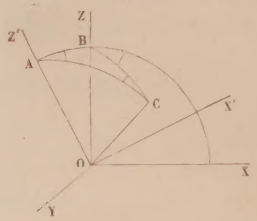


Fig. 2.



à l'unité. On écrit immédiatement les coordonnées du point C, B étant l'angle extérieur au triangle ABC

$$x = \sin a\cos B, \qquad x' = \sin b\cos A,$$
$$y = \sin a\sin B, \qquad y' = \sin b\sin A,$$
$$z = \cos a, \qquad z' = \cos b;$$

x et z se transformeront d'après les formules données pour le plan, et $y = y'$; on en tire ainsi

$$\sin a\cos B = \sin b\cos c\cos A - \cos b\sin c,$$
$$\sin a\sin B = \sin b\sin A,$$
$$\cos a \quad = \sin b\sin c\cos A + \cos b\cos c.$$

Si l'on remplace B par $180 - B_1$, les angles A et B_1 sont les angles du triangle sphérique et les formules deviennent

(1) $$\sin a\cos B_1 = \cos b\sin c + \sin b\cos c\cos A,$$

(2) $$\sin a\sin B_1 = \sin b\sin A,$$

(3) $$\cos a \quad = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

Par des permutations de lettres, on déduit de la première cinq équations de même forme, et deux de chacune des dernières.

Ces relations fondamentales sont générales quant aux signes et aux grandeurs des angles : elles ne sont pas distinctes, car en les élevant au carré et additionnant on trouve l'identité $1 = 1$.

En divisant (1) par (2) on a la formule dite des cotangentes. Les formules de Delambre et de Néper se déduisent algébriquement des précédentes. On en tire aussi des formules dans lesquelles les angles remplacent les côtés et réciproquement : ces dernières peuvent se conclure sans calcul de la considération du triangle supplémentaire.

Rappelons seulement les formules principales relatives aux triangles sphériques.

Formule des cotangentes.

$$\operatorname{Cotang} a \sin b = \cos b \cos c + \sin c \operatorname{cotang} \mathrm{A},$$

et cinq autres semblables par permutation de lettres.

Formules de Delambre.

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\cos \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\sin \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin \frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}c},$$

On en déduit par simple division les *analogies de Néper :*

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\cos \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\mathrm{C} \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\mathrm{C} \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Enfin les formules appelées quelquefois *formules de Borda :*

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin S \sin(S-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin S \sin(S-a)},$$

dans lesquelles

$$2S = a + b + c.$$

2. — Formules calculables par logarithmes.

Les calculs trigonométriques se font généralement par logarithmes. Quand on a une formule binome à calculer, on peut passer des logarithmes aux nombres et faire la somme de ceux-ci : mais dans la plupart des cas ce n'est pas cette somme même, mais son logarithme dont on a besoin. Il est donc plus commode, dans bien des circonstances, de s'épargner cette recherche intermédiaire.

Le meilleur moyen d'y parvenir consiste dans l'emploi des logarithmes d'addition et de soustraction. Nous ne possédons malheureusement en France de Tables de ce genre qu'avec cinq décimales (¹). Quand on a besoin de sept décimales on doit recourir aux Tables allemandes du Dr Wittstein (Hanovre, 1866).

Soit à calculer a par la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

On calcule le logarithme de $\dfrac{\sin b \sin c \cos A}{\cos b \cos c}$, les Tables donnent alors celui de $1 + \dfrac{\sin b \sin c \cos A}{\cos b \cos c}$, et, en l'ajoutant à celui de $\cos b \cos c$, on trouve le logarithme de $\cos a$.

A défaut de ces Tables qui fournissent incontestablement la solu-

---

(¹) Hoüel. *Tables de Logarithmes à cinq décimales.* Paris, Gauthier-Villars; 1887. — Hoüel. *Recueil de formules et de Tables numériques.* Gauthier-Villars; 1885.

Ces logarithmes, dont l'idée première est due à Leonelli, sont quelquefois connus sous le nom de *Logarithmes de Gauss* qui le premier en a publié des Tables.

tion la plus rapide du problème, on doit recourir à l'emploi d'un angle auxiliaire.

Dans la formule fondamentale, on a toujours dans le binome le sinus et le cosinus d'un même angle : on prendra respectivement pour cosinus et sinus de l'angle auxiliaire les coefficients de ces quantités.

Soit, par exemple, la même formule que ci-dessus; on pose

$$(4) \qquad \cos b = m \sin\varphi, \qquad \sin b \cos A = m \cos\varphi$$

et on trouve

$$\cos a = m \sin(\varphi + c).$$

Le système d'équations (4) se résout en calculant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotang} b}{\cos A}.$$

L'angle $\varphi < 180^\circ$ étant déterminé en grandeur et en signe, on connaîtra le signe de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ et on calculera m avec vérification par

$$m = \frac{\cos b}{\sin\varphi} = \frac{\sin b \cos A}{\cos\varphi}.$$

On peut procéder autrement. Soit à calculer $x + y$; on pose

$$x + y = x\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

Si $\frac{y}{x} > 0$, on peut poser

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}^2\psi,$$

d'où

$$x + y = \frac{x}{\cos^2\psi}.$$

Si $\frac{x}{y} < 0$, on pourra encore poser

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tang}^2\psi$$

et on aura

$$x + y = x\frac{\cos 2\psi}{\cos^2\psi}.$$

3. — Formules différentielles.

D'après la définition des différentielles et des dérivées, on peut traiter comme différentielle un accroissement quelconque de la fonction, pourvu qu'il soit permis de négliger la différentielle d'ordre supérieur, ou pratiquement les différences secondes. Cette substitution est permise dans des limites parfois assez étendues quand il s'agit de calculs numériques. La simplification qui en découle tient à la substitution de relations linéaires à des équations souvent très compliquées. On y a fréquemment recours, à charge seulement de s'assurer dans chaque cas particulier que l'on reste bien dans la donnée de l'hypothèse, c'est-à-dire que l'omission des différences secondes n'affecte pas le résultat.

Quand on veut se rendre compte de l'approximation d'un résultat, on considère les erreurs comme des différentielles. Les formules qui suivent sont donc très utiles dans ce cas.

Si on différentie l'équation (3), en ayant égard à (1) et (2), on trouve

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin c \sin B\, dA. \tag{5}$$

Différentions (2) logarithmiquement :

$$\cot a\, da + \cot B\, dB = \cot b\, db + \cot A\, dA. \tag{6}$$

On trouve encore

$$\sin a\, dB = \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \sin b \cos C\, dA, \tag{7}$$

$$dA = -\cos c\, dB - \cos b\, dC + \sin b \sin C\, da. \tag{8}$$

Ce sont les principales relations dont nous aurons à faire usage.

4. — Développements en série.

Il est souvent plus avantageux et pratiquement plus exact d'employer les développements en série pour les calculs numériques. On y parvient généralement par les formules de Taylor et de Mac-

laurin, ou par la méthode des coefficients indéterminés. Rappelons les développements les plus usuels :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots,$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{3x^7}{1.3.5.7} + \dots,$$

$$\operatorname{Log}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, (^1) \text{ (pour } x \text{ compris entre } \pm 1$$

$$E^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots.$$

Les formules de Moivre :

$$E^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

$$E^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

$$2\cos x = E^{x\sqrt{-1}} + E^{-x\sqrt{-1}},$$

$$2\sqrt{-1}\sin x = E^{x\sqrt{-1}} - E^{-x\sqrt{-1}},$$

$$E^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m,$$

utiles pour le calcul des arcs multiples;

$$\operatorname{arc} x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{3\sin^5 x}{2.3.5} + \dots,$$

$$\operatorname{arc} x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 x}{5} - \dots,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots.$$

Cette dernière pour $x < 1$ en valeur absolue, positif ou négatif,

(1) Nous désignons par Log les logarithmes népériens, et par log les logarithmes vulgaires; E sera la base des logarithmes népériens pour éviter la confusion avec e, excentricité.

et toutes les valeurs de m positives, négatives, entières et fractionnaires.

Il est évident qu'avant d'employer une série quelconque il faut s'être assuré de sa convergence.

Quand on veut calculer un petit terme de correction, on opère quelquefois par approximations successives.

Soit l'équation

$$\varphi(x,y)=0$$

que l'on ne peut résoudre par rapport à y sous forme explicite, ou dont le calcul des racines serait trop pénible. Il arrive souvent qu'on peut la mettre sous la forme

$$y=\psi(x)+\theta(x,y),$$

dans laquelle les valeurs numériques de θ sont petites par rapport à celles de ψ. On prend alors comme première valeur approchée

$$y_1=\psi(x);$$

on calcule $\theta\ (x,y_1)$ et on substitue dans la valeur de y, ce qui donne une deuxième approximation

$$y_2=\psi(x)+\theta(x,y_1),$$

puis une troisième si c'est nécessaire

$$y_3=\psi(x)+\theta\ (x,y_2).$$

La légitimité de ce mode d'opération se reconnaît le plus simplement quand la différence des deux valeurs consécutives y_n et y_{n+1} est une quantité négligeable d'après les données de la question.

Le méthode des *coefficients indéterminés* est souvent utile, et se combine parfois avantageusement avec celle des approximations successives.

Soit, par exemple, à résoudre l'équation

$$\cos\delta=\cos\lambda\cos\zeta-\sin\lambda\sin\zeta\cos A$$

par rapport à cos A, lorsque ζ diffère peu d'un angle droit.

Si ζ était exactement égal à un droit, on aurait

$$\cos\delta = -\sin\lambda\cos A;$$

calculons donc

$$\cos A_1 = -\frac{\cos\delta}{\sin\lambda},$$

puis posons, $\zeta = 90^\circ - h$, $A = A_1 + \varepsilon$, ε étant un petit arc à déterminer. Il viendra, après avoir substitué dans l'équation primitive,

$$0 = \sin h\cos\lambda + \sin\lambda\cos h\,[\cos A_1(1-\cos\varepsilon) - \sin\varepsilon\sin A_1],$$

d'où l'on tire, en négligeant les termes du troisième ordre en h et ε,

$$0 = h\cos\lambda - \sin\lambda\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\cos A_1 - \varepsilon\sin A_1\right).$$

ε est du même ordre que h; on peut donc négliger ε^2 et écrire

$$\varepsilon = -\frac{h\operatorname{cotang}\lambda}{\sin A_1}. \tag{9}$$

5. — Séries trigonométriques.

Nous rappellerons ici que toute fonction périodique peut être représentée par une série de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \ldots,$$

ou de celle-ci, qui lui est équivalente,

$$f(x) = a_0 + \alpha\sin(x - A) + \beta\sin 2(x - B) + \gamma\sin 3(x - C) + \ldots,$$

séries finies ou infinies suivant la nature de la fonction.

Les séries trigonométriques jouissent de la propriété suivante : soient n et h deux nombres entiers, et $K = \frac{2\pi}{n}$, on a

$$(10)\quad \begin{cases} \sin hK + \sin 2hK + \sin 3hK + \ldots + \sin(n-1)hK = 0, \\ 1 + \cos hK + \cos 2hK + \cos 3hK + \ldots + \cos(n-1)hK = 0, \end{cases}$$

en exceptant pour cette dernière relation le cas de $hK = 2m\pi$, m

étant un entier, c'est-à-dire h multiple de n; dans ce cas la valeur du second polynome est égale à n.

On a en effet

$$\cos K + \sqrt{-1}\sin K = E^{K\sqrt{-1}} = T$$

donc

$$\Sigma_0^{n-1}\cos hrK + \sqrt{-1}\,\Sigma_0^{n-1}\sin hrK = \Sigma_0^{n-1} T^{hr} = \frac{T^{nh}-1}{T^h-1}$$

et comme

$$T^{nh} = \cos 2h\pi + \sqrt{-1}\sin 2h\pi = 1,$$

les deux sommes Σ sont généralement nulles, sauf le cas où le dénominateur $T^h - 1$ est nul aussi, c'est-à-dire

$$\cos\frac{2h\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2h\pi}{n} = 1,$$

ce qui exige que $\frac{h}{n}$ soit entier.

Alors la vraie valeur de la fraction, cherchée par la méthode de Lhôpital, est n.

6. — Transformation des coordonnées avec changement d'origine. Formules générales de la parallaxe.

Examinons seulement le cas où deux systèmes d'axes sont parallèles entre eux. Le genre de coordonnées que nous considérons est celui des coordonnées polaires : un point de l'espace est défini par sa distance D à l'origine, par l'angle θ de son rayon vecteur avec la partie positive de l'axe des z, et par l'angle ψ que la projection du rayon vecteur sur le plan xy fait avec la partie positive de l'axe des x.

Soit un système d'axes parallèles aux précédents. Convenons d'affecter les lettres sans accent au premier système, les lettres accentuées au second. Soient enfin ρ, θ_1, ψ_1 les coordonnées polaires de l'origine du second système, a, b, c ses coordonnées rectangulaires, par rapport à l'origine du premier système. On a

$$\begin{aligned} x &= x' + a = D\sin\theta\cos\psi, \\ y &= y' + b = D\sin\theta\sin\psi, \\ z &= z' + c = D\cos\theta. \end{aligned}$$

Remplaçant x', y', z', a, b, c par leurs valeurs de même forme, les formules de transformation seront

$$(11) \qquad D\sin\theta\cos\psi = D'\sin\theta'\cos\psi' + \rho\sin\theta_1\cos\psi_1,$$

$$(12) \qquad D\sin\theta\sin\psi = D'\sin\theta'\sin\psi' + \rho\sin\theta_1\sin\psi_1,$$

$$(13) \qquad D\cos\theta \qquad = D'\cos\theta' \qquad + \rho\cos\theta_1.$$

Multiplions (11) par $\sin\psi$, (12) par $\cos\psi$ et retranchons-les membre à membre :

$$(14) \qquad D'\sin\theta'\sin(\psi' - \psi) = \rho\sin\theta_1\sin(\psi - \psi_1).$$

Multiplions (11) par $\cos\psi$, (12) par $\sin\psi$ et additionnons :

$$(15) \qquad D'\sin\theta'\cos(\psi' - \psi) = D\sin\theta - \rho\sin\theta_1\cos(\psi - \psi_1).$$

Posons maintenant

$$m = \frac{\rho\sin\theta_1}{D\sin\theta};$$

il vient d'abord, en divisant membre à membre les équations (14) et (15),

$$(16) \qquad \operatorname{tang}(\psi' - \psi) = \frac{m\sin(\psi - \psi_1)}{1 - m\cos(\psi - \psi_1)}.$$

Reprenons les équations (14) et (15) : multiplions (14) par $\sin\frac{1}{2}(\psi' - \psi)$, (15) par $\cos\frac{1}{2}(\psi' - \psi)$; ajoutant membre à membre, nous aurons, en divisant par $\cos\frac{1}{2}(\psi' - \psi)$,

$$(17) \qquad D'\sin\theta' = D\sin\theta - \rho\sin\theta_1\frac{\cos\left(\psi_1 - \frac{\psi' + \psi}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}(\psi' - \psi)}.$$

Posons encore

$$(18) \qquad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\cos\left(\psi_1 - \frac{\psi + \psi'}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}(\psi' - \psi)}\operatorname{tang}\theta_1,$$

la formule (17) prendra la forme

$$(17\ bis) \qquad D'\sin\theta' = D\sin\theta - \rho\cos\theta_1\operatorname{tang}\gamma.$$

Soit enfin

$$(19) \qquad \frac{D'}{D} = f, \qquad n = \frac{\rho}{D}\frac{\cos\theta_1}{\cos\gamma};$$

les formules (17 *bis*) et (13) deviennent respectivement

$$f \sin \theta' = \sin \theta - n \sin \gamma, \tag{20}$$

$$f \cos \theta' = \cos \theta - n \cos \gamma. \tag{21}$$

On peut encore déduire de ces formules des expressions qui sont très souvent employées. On multiplie (20) par $\sin \theta$, (21) par $\cos \theta$, on ajoute :

$$f \cos(\theta' - \theta) = 1 - n \cos(\theta - \gamma). \tag{22}$$

On multiplie (20) par $\cos \theta$, (21) par $\sin \theta$, on soustrait :

$$f \sin(\theta' - \theta) = n \sin(\theta' - \gamma). \tag{23}$$

La division de (23) par (22) donne

$$\operatorname{tang}(\theta' - \theta) = \frac{n \sin(\theta - \gamma)}{1 - n \cos(\theta - \gamma)} \tag{24}$$

et, en élevant les deux membres de chacune des équations (22) et (23) au carré, et ajoutant,

$$f^2 = 1 + n^2 - 2n \cos(\theta - \gamma), \tag{25}$$

le système des équations (16), (24) et (25) est équivalent au système primitif (11) (12) (13), et les équations sont résolues par rapport aux inconnues D', θ' et ψ'.

On obtient encore une relation (mais qui n'est plus distincte des trois précédentes) en retranchant l'une de l'autre les équations (17 *bis*) et (13), après les avoir multipliées respectivement par $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$,

$$D' \sin(\theta' - \gamma) = D \sin(\theta - \gamma). \tag{26}$$

Ces diverses expressions résolvent dans sa généralité le problème des parallaxes, qui n'est autre que le passage d'un système de coordonnées à un autre système parallèle.

Ainsi qu'on le verra plus tard, la quantité ρ est généralement petite par rapport à D et D', et alors les formules se prêtent très élégamment au développement en séries.

Les équations (24) et (25) sont précisément de la forme de celles

qu'on emploie pour calculer un angle A et un côté h d'un triangle rectiligne, dont on connaît les côtés a, b et l'angle compris C.

Si l'on pose

$$\frac{c}{b} = f, \qquad \frac{a}{b} = n, \qquad A = \gamma,$$

on a, en remarquant que $B = 180^\circ - (C + \gamma)$, l'analogie des sinus

$$\sin\gamma = \frac{a}{b}\sin(C + \gamma)$$

d'où l'on tire

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{n \sin C}{1 - n\cos C} \tag{27}$$

et la formule connue

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

devient de même

$$f^2 = 1 + n^2 - 2n\cos C. \tag{28}$$

Si l'angle γ est petit, $\frac{c}{b}$ diffère peu de l'unité et son logarithme sera une petite fraction.

Pour développer en série les deux formules (27) et (28), différentions-les en considérant C comme variable indépendante, γ et f comme fonctions de cette variable. Il vient

$$\frac{d\gamma}{dC} = \frac{n\cos C - n^2}{1 + n^2 - 2n\cos C},$$
$$\frac{df}{fdC} = \frac{n\sin C}{1 + n^2 - 2n\cos C}$$

et l'on est amené à écrire la relation équivalente aux deux précédentes

$$\frac{d\gamma}{dC} - \frac{df}{fdC}\sqrt{-1} = -n\frac{n - \cos C + \sqrt{-1}\sin C}{1 + n^2 - 2n\cos C}$$
$$= n\frac{\cos C + \sqrt{-1}\sin C}{1 - n(\cos C - \sqrt{-1}\sin C)}.$$

Effectuons la division algébrique et égalons séparément entre elles les parties réelles et les parties imaginaires, nous aurons les

séries infinies

$$\frac{dy}{dC} = n\cos C + n^2\cos 2C + n^3\cos 3C + \ldots,$$

$$\frac{df}{f\,dC} = n\sin C + n^2\sin 2C + n^3\sin 3C + \ldots$$

convergentes pour toute valeur de n inférieure à l'unité.

Dans cette hypothèse on peut les intégrer et l'on trouve

$$(29) \qquad y = n\sin C + \frac{n^2}{2}\sin 2C + \frac{n^3}{3}\sin 3C + \ldots,$$

$$(30) \qquad \operatorname{Log} f = -n\cos C - \frac{n^2}{2}\cos 2C - \frac{n^3}{3}\cos 3C - \ldots.$$

On calculera le logarithme vulgaire en multipliant par le module M.

Les équations (27) et (28) sont équivalentes au système

$$f\sin y = n\sin C,$$
$$f\cos y = 1 - n\cos C,$$

qui se trouve également résolu par rapport à f et y. Si la deuxième équation était

$$f\cos y = 1 + n\cos C,$$

on reviendrait au premier cas en remplaçant C par son supplément.

7. — Autres développements en séries.

On peut développer en séries toutes les formules de la Trigonométrie.

Citons l'exemple de la formule des triangles sphériques rectangles, dont le développement se déduit de ce qui précède.

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a\cos B.$$

D'une façon générale, si l'on a

$$\operatorname{tang} c = k\operatorname{tang} a,$$

on remarque que

$$\operatorname{tang}(c-a) = \frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a} = \frac{(k-1)\operatorname{tang} a}{1 + k \operatorname{tang}^2 a}$$

$$= \frac{(k-1)\sin a \cos a}{\cos^2 a + k \sin^2 a} = \frac{(k-1)\sin a \cos a}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}\cos 2a}$$

$$= \frac{\frac{k-1}{k+1}\sin 2a}{1 - \frac{k-1}{k+1}\cos 2a},$$

qui se ramène à (27) en faisant

$$\frac{k-1}{k+1} = n, \qquad 2a = \mathrm{C}.$$

Dans le cas considéré,

$$k = \cos \mathrm{B}, \qquad \frac{k-1}{k+1} = -\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B}$$

et le développement (29) donne alors

$$(31) \qquad c = a - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin 2a + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin 4a - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\sin 6a + \dots.$$

Cette formule donne la différence entre un angle et sa projection orthogonale sur un plan.

Citons un dernier exemple de développement.

Soit donnée la relation

$$\cos y = \cos x + b$$

et proposons-nous de développer la valeur de y.

L'équation donnée équivaut à

$$y = \operatorname{arc\,cos}(\cos x + b).$$

Soit $\cos x = z$. On peut appliquer la formule de Taylor

$$y = f(z+b) = f(z) + b\frac{df}{dz} + \frac{b^2}{1.2}\frac{d^2 f}{dz^2} + \dots;$$

or $f(z) = \operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$,

$$\frac{df}{dz} = \frac{dx}{d(\cos x)} = -\frac{1}{\sin x},$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{\cos x}{\sin^3 x} = -\frac{\cot x}{\sin^2 x},$$

et ainsi de suite, en différentiant.

Donc enfin

$$y = x - \frac{b}{\sin x} - \frac{1}{2}\frac{b}{\sin^2 x}\cot x. \tag{32}$$

8. — Calculs numériques.

Dans les formules qui précèdent, les arcs sont évalués en parties du rayon pris pour unité. Dans la pratique, on les exprime en degrés, minutes et secondes (sexagésimales ou décimales). Un arc étant donné en secondes, pour trouver sa valeur en unités abstraites, il faut se rappeler que la grandeur de l'arc est le rapport du nombre de secondes qui le représente au nombre de secondes contenu dans l'arc de longueur égale au rayon : ce nombre est $\frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{1}{\sin 1''}$, un arc de a secondes a donc pour valeur $a : \frac{1}{\sin 1''} = a \sin 1''$.

Réciproquement, si un arc est exprimé en unités abstraites, on le convertit en secondes en le divisant par $\sin 1''$.

D'après cela, le calcul numérique de la formule (29) se fera, en remarquant qu'on a sensiblement $2 \sin 1'' = \sin 2''$, $3 \sin 1'' = \sin 3''$.

$$y = \frac{n}{\sin 1''}\sin C + \frac{n^2}{\sin 2''}\sin 2C + \frac{n^3}{\sin 3''}\sin 3C + \dots.$$

On emploie rarement les fonctions trigonométriques exprimées en nombres, c'est-à-dire les sinus, cosinus, . . . *naturels :* on ne se sert communément que de leurs logarithmes. Les principales Tables de logarithmes sont à cinq ou à sept décimales : ces dernières sont plus que suffisantes ; dans tous les cas que nous aurons à examiner, nous nous contenterons de six décimales au plus. Cinq décimales suffisent habituellement; on ne doit jamais en prendre plus de trois ou quatre pour calculer des termes de correction. Il est en effet très important de ne pas écrire plus de chiffres qu'il n'est nécessaire, les calculs en sont abrégés, et chose très importante, les chances d'erreur diminuées d'autant.

L'interpolation dans les Tables usuelles se fait toujours au moyen des différences premières.

Le rayon est supposé égal à l'unité. Les logarithmes des lignes trigonométriques moindres que l'unité sont, ou donnés avec des

caractéristiques négatives (Dupuis) ou augmentés de 10 (Lalande, Callet, Hoüel, Schrön). Nous préférons cette dernière manière qui a l'avantage de ne pas faire intervenir de questions de signes. L'usage des Tables est expliqué dans les recueils mêmes, avec exemples à l'appui. Nous n'avons pas à en parler. Bornons-nous à rappeler que, lorsqu'on veut avoir avec le plus de précision possible le logarithme du sinus ou de la tangente d'un petit angle inférieur à $2^\circ\,46'\,40''$, ($10\,000''$), on a tout avantage à chercher le logarithme du nombre de secondes et à y ajouter, pour le sinus le nombre S, pour la tangente le nombre T, donnés sur les mêmes pages que les logarithmes des nombres.

La considération des différences des logarithmes donne immédiatement la mesure de la précision avec laquelle un angle est calculé. Supposons qu'on se serve de Tables à sept décimales. Quand on calcule l'angle par sa tangente, le cas le plus défavorable qui puisse se présenter est celui d'angles voisins de 45°. La différence pour $10''$ étant 421, une erreur d'une unité du dernier rang sur le logarithme correspond à une erreur de $\frac{10''}{421} = 0'',024$, sur l'angle. Elle est d'environ $0'',05$ si l'angle est déterminé par son sinus ou son cosinus. Elle augmente avec la grandeur de l'angle, s'il est déterminé par son sinus, et arrive à $1''$ pour des angles de 87°. Elle est au contraire très faible pour de petits angles : un logarithme sinus à sept décimales détermine à $0'',001$ près un arc de 1°.

Quand on peut déterminer un angle par sa tangente, il y a toujours avantage au point de vue de la précision ; mais il ne faut pas pour cela s'interdire l'usage du sinus ou du cosinus quand on y trouve des facilités pour la simplicité des calculs. Il importe seulement de se rendre compte d'avance de la précision des données et du résultat, et par suite du nombre de décimales qu'il faut conserver. Ainsi un angle de 1° est déterminé à $1''$ près par son sinus ou sa tangente en ne conservant que quatre décimales. Avec cinq décimales, en calculant par la tangente, l'erreur ne dépasse pas $3''$ sur un angle quelconque si le logarithme est obtenu exactement.

Quand un logarithme résulte de l'addition de plusieurs autres, il faut remarquer que chacune des parties de la somme peut être en erreur d'une quantité voisine d'une unité de la dernière décimale. Le logarithme tabulaire comporte une erreur d'une demi-unité,

l'interpolation peut en introduire une égale. Si, par cas fortuit, tous les logarithmes d'une somme se trouvaient erronés dans le même sens, l'erreur pour une somme ou différence où interviennent quatre logarithmes, approcherait d'être huit fois celle que nous avons dite, soit environ $20''$ pour un angle de $45°$ calculé par sa tangente, avec des logarithmes à cinq décimales.

Nous avons vu qu'il fallait attacher une grande importance à ne pas introduire dans les calculs des décimales inutiles. Le simple bon sens, à défaut des considérations mathématiques, suffit le plus souvent pour guider le calculateur. Supposons, pour fixer les idées, qu'on veuille calculer un angle A par la formule

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin (S - b) \sin (S - c)}{\sin b \sin c}.$$

Si l'observation a donné l'angle a, qui entre par S dans cette formule, avec une approximation de $10''$, il en résulte que S, et par suite $S - b$ et $S - c$ sont approchés à $5''$. Il ne faudra donc pas compter obtenir A à mieux que $10''$ près, et on sera dans les limites les plus larges si l'on conduit les calculs en vue de l'approximation de $1''$ ou $2''$ sur l'angle $\frac{1}{2}$ A, c'est-à-dire avec cinq décimales; on aura du reste soin de varier la méthode selon la circonstance. Si par exemple A est plus grand que $90°$, on trouve avantage à substituer à la formule précédente celle qui lui est équivalente :

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin S \sin (S - a)}{\sin b \sin c}.$$

Rappelons encore que les lignes trigonométriques sont toutes

POUR AVOIR	PRENEZ DANS LA TABLE, AVEC L'ANGLE $< 90°$.			
	1er Quadrant.	2e Quadrant.	3e Quadrant.	4e Quadrant.
Sinus.....	+ sin	+ cos	— sin	— cos
Cosinus....	+ cos	— sin	— cos	+ sin
Tangente...	+ tang	— cotang	+ tang	— cotang
Cotangente.	+ cotang	— tang	+ cotang	— tang

données pour le premier quadrant et prises positives pour ce quadrant.

Pour trouver les logarithmes des lignes trigonométriques d'un angle, on commencera donc par retrancher de cet angle autant de fois un angle droit qu'il faut pour que le reste soit moindre qu'un droit. Avec ce reste, on entrera dans la Table en se rappelant pour les signes et le nom des lignes à y prendre, les règles résumées dans le tableau ci-dessus qui n'a pas besoin d'explication.

9. — Conversion du temps en arc et réciproquement.

Il existe des Tables de logarithmes jointes aux traités de navigation qui donnent en argument, en même temps que les arcs, les angles exprimés en temps, et dont l'usage abrège beaucoup les calculs d'Astronomie sphérique.

Pour convertir un nombre d'heures, minutes et secondes de temps en degrés, minutes et secondes d'arc, on multiplie les heures par 15, ce qui donne des degrés. Pour cela on multiplie par 10 et on ajoute à ce produit sa moitié. On divise les minutes par 4, le quotient donne des degrés; le reste multiplié par 15 donne des minutes. Les secondes de temps étant divisées par 4, le quotient donne des minutes, et le reste, multiplié par 15, des secondes d'arc. On ne se sert plus aujourd'hui des tierces dans les calculs, elles sont remplacées par les fractions décimales de secondes.

Soit, par exemple, à convertir en degrés $3^h 26^m 39^s,54$. On dispose ainsi le calcul :

3^h	30°
	15°
26^m	$6^\circ 30'$
$39^s 54$	$9' 35'',4$
	$17'',7$
	$51^\circ 39' 53'',1$

Pour convertir un arc en temps, on divise les degrés par 15, le quotient donne les heures. Le reste, multiplié par 4, donne des minutes. Le quotient des minutes d'arc par 15 donne des minutes de temps, et le reste multiplié par 4, des secondes de temps. Enfin le quotient des secondes d'arc par 15 donne des secondes de temps et leurs fractions. Au lieu de diviser par 15, on opère plus faci-

lement en multipliant mentalement par 2 et divisant par 3, puis par 10.

Soit à convertir en temps 51°39′53″,1 ; on écrit :

$$\begin{array}{ll} 51^{\circ}\ldots\ldots\ldots & 3^{h}24^{m} \\ 39'\ldots\ldots\ldots & 2^{m}36^{s} \\ 53'',1\ldots\ldots\ldots & 3^{s} \quad \text{(pour } 45'') \\ \dfrac{8'',1\times 2}{30}=\dfrac{16,2}{30} & 0^{s},54 \\ & \hline & 3^{h}26^{m}39^{s},54 \end{array}$$

On trouve dans la *Connaissance des Temps* des Tables pour faciliter cette réduction : on arrive à faire les opérations aussi vite de tête, mais les Tables fournissent une bonne vérification, que l'on obtiendrait encore par l'opération inverse.

Pour convertir les degrés en grades, on commence par réduire tout l'arc en décimales de degré : on divise les secondes par 60, on ajoute la fraction trouvée aux minutes et on divise encore par 60. Enfin on divise par 9 les degrés obtenus et on multiplie par 10.

Exemple : 51°39′53″,1 à convertir en grades.

$$\frac{53,1}{60}=0,885, \qquad \frac{39,885}{60}=0,66475, \qquad \frac{51,66475\times 10}{9}=57,40528\ldots.$$

Inversement, pour passer des grades aux degrés, on commence par multiplier par 9 et diviser par 10, ce qui se fait plus vite en retranchant du nombre de grades son dixième ; on convertit les fractions décimales de degrés en minutes en multipliant par 60, et la fraction décimale de minute et secondes en fractions, et multipliant encore par 60.

Soit à convertir en degrés :

$$\begin{array}{rr} & 57^{g},40528 \\ \frac{1}{10}\ldots. & 5\ ,74053 \\ & \hline & 51\ ,66475 \\ 0,66475\times 60= & 39'8850 \\ 0,8850\times 60= & 53'',10 \\ & \hline \text{Somme}\ldots. & 51°39'53'',1 \end{array}$$

10. — Interpolation.

Nous ne considérerons ici que les méthodes qui permettent de calculer pour un instant déterminé les éléments qu'on tire des éphémérides astronomiques, et plus spécialement de la *Connaissance des Temps*. En exceptant la deuxième page de chaque mois des Tables du Soleil, qui a pour argument le temps vrai, et les étoiles, rapportées au temps sidéral, l'argument des Tables de la *Connaissance des Temps* est le temps moyen du méridien de Paris, compté de 0^h (midi) à 24^h. Le jour astronomique commence douze heures après le jour civil de même date.

L'intervalle de l'argument est 24^h pour le Soleil et quelques planètes, 12^h pour Vénus et Mercure, 3^h pour les distances lunaires, 1^h pour les coordonnées équatoriales de la Lune, etc.

Soit y_0 la valeur tabulaire de la fonction pour l'époque x_0. Soit k la raison arithmétique de l'argument, ou intervalle tabulaire. On forme les différences successives Δy_0, $\Delta^2 y_0 \ldots$ avec les données de la Table, et on applique la formule de Newton pour avoir la valeur y de la fonction à l'époque x :

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{k}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{k}\right)\left(\frac{x - x_0}{k} - 1\right)\Delta^2 y_0 + \ldots.$$

Avec les éphémérides actuelles, notamment la *Connaissance des Temps* et le *Nautical Almanac,* on n'a pas à se préoccuper des différences d'ordre supérieur au second.

Si l'on évalue le temps en prenant pour unité la différence constante de l'argument, ce qui revient à compter en fractions décimales de jour pour le Soleil, en fractions décimales d'heure pour la Lune, etc., on fait $k = 1$, et l'on pose

$$\frac{x - x_0}{k} = t.$$

La formule devient alors, en simplifiant les notations,

$$y = y_0 + t\Delta + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 + \ldots.$$

L'usage de cette formule est facile à comprendre. Si Δ^2 est négligeable, elle se réduit à l'interpolation proportionnelle.

Exemple : On demande la déclinaison du Soleil à 11^h34^m du soir, heure de Paris, le 26 mai 1878.

On trouve dans la *Connaissance des Temps* les déclinaisons, et on calcule les différences :

		Δ	Δ_2
Mai 26	$+21.\ 9.22,6$		
		$+10.11,1$	
« 27	19.33,7		$-22,1$
		$+\ 9.49,0$	
« 28	29.22,7		$-22,2$
		$+\ 9.26,8$	
« 29	38.49,5		

Chaque nombre se retranche du suivant, ce qui détermine le signe de la différence. On réduit 11^h34^m en fractions de jour, en divisant d'abord les minutes par 60 pour en faire des décimales d'heures, puis divisant par 24.

$$11^h34^m = 11^h,567, \qquad \frac{11^h,567}{24} = 0^j,482 = t.$$

La formule devient donc, avec $t - 1 = -0,518$,

et
$$\frac{t(t-1)}{2} = -0,125,$$

$$\begin{aligned} y_0 &= && 21^\circ.9'.22'',6 \\ t\Delta &= 0,482 \times 611'',1 &&= +.4.54,55 \\ \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 &= (-0,125)\times(-22'',1) &&= +2,77 \\ & && \overline{21^\circ14'19'',9} \end{aligned}$$

Ce calcul n'est pas difficile : il est pourtant un peu long. Depuis 1875, la *Connaissance des Temps* donne des éléments pour l'emploi d'une méthode plus rapide. Voici sur quel principe elle repose.

On a, par le théorème de Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \dots.$$

On peut toujours, avec les éphémérides actuelles, négliger les

différences d'ordre supérieur. Si l'on développe par la même formule $hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)$, on trouve, avec la même approximation,

$$hf'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)$$

et, par suite,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'\left(x_0+\frac{h}{2}\right).$$

La *Connaissance des Temps* donne la valeur de $f'(x_0)$ calculée d'avance, sous le nom de : *variation pour une heure* (ou pour une minute), à l'époque x_0. Connaissant la variation pour les époques x_0 et x_0+k, on en déduit la variation pour $x_0+\frac{h}{2}$ par une proportion à vue et l'on a

$$f'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=f'(x_0)+\frac{h}{2k}[f'(x_0+k)-f'(x_0)].$$

Géométriquement, ce procédé revient à assimiler l'arc de la courbe y entre x_0 et x_0+k à un arc de parabole : le calcul indiqué donne la direction de la tangente au milieu de l'intervalle h, tangente parallèle à la corde qui correspond à l'intervalle entier h.

Dans l'exemple qui précède, après avoir réduit 11^h34^m en $11^h,567=h$, on continue ainsi : la Table donne

		Diff.
Le 26, variation pour une heure	$+25'',92$	
		$-0'',92$
Le 27 — —	$+25,00$	

k est égal ici à 24^h,

$$\frac{h}{2k}=0,241,\qquad 0,241\times-0,92=-0''22;$$

donc la variation horaire pour le milieu de l'intervalle est $+25'',92-0'',22=+25'',70$ et son produit par $11^h,567$, qui est de $+4'57'',3$, ajouté à la déclinaison du 26, donne, comme plus haut, $21°14'19'',9$.

Au lieu de déterminer la valeur d'un élément pour une heure donnée, on peut avoir à résoudre le problème inverse : *calculer à quelle heure du premier méridien correspond un élément*

observé. On rencontre ce problème dans la détermination des longitudes par les observations de Lune.

On applique alors la méthode des approximations successives. L'inconnue est t; négligeant d'abord le terme en Δ^2, on calcule une valeur approchée

$$\tau = \frac{y - y_0}{\Delta},$$

puis, substituant cette valeur de τ à t dans le terme en Δ^2 et résolvant,

$$t = \tau\left[1 + \frac{(1-\tau)\Delta^2}{2\Delta}\right].$$

Le coefficient de Δ^2 est $\frac{t(t-1)}{2}$ dont le maximum correspond à $t = \frac{1}{2}$; c'est donc vers le milieu de l'intervalle tabulaire que l'interpolation simplement proportionnelle occasionne la plus grande erreur.

On a donné quelquefois, comme suffisamment exacte, la formule

$$t = \frac{y - y_0}{\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2}.$$

En comparant les formules

$$y = y_0 + t\Delta + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2$$

et

$$y' = y_0 + t\Delta - \tfrac{1}{8}t\Delta^2,$$

on trouve que l'erreur sur y résultant de la deuxième méthode est

$$y' - y = t\Delta^2\left[\frac{1-t}{2} - \frac{1}{8}\right]$$

et que, nulle pour $t = \frac{3}{4}$, elle est maximum pour $t = \frac{3}{8}$.

Dans ce dernier cas,

$$y' - y = \tfrac{9}{128}\Delta^2.$$

Si donc les $\frac{9}{128}$ de Δ^2 sont négligeables, on peut appliquer cette formule simplifiée.

En définitive, le calcul d'interpolation est destiné à donner la

correction que doit recevoir un élément connu, correspondant à une valeur donnée de la variable, pour correspondre à une autre valeur de la voriable. C'est ici le moment de définir les mots *erreur* et *correction*. On dit assez généralement qu'une quantité est erronée *en plus* d'un nombre donné, quand elle est trop forte de ce nombre : la correction qu'on doit lui appliquer est donc soustractive et de signe contraire à l'erreur. Nous proposons, afin d'éviter toute méprise, de donner le même sens aux deux mots : quand nous parlerons d'erreur, il sera entendu que c'est la quantité qui doit être ajoutée avec son signe à un nombre fautif pour avoir le nombre vrai. Par exemple, l'erreur d'une montre sera pour nous la quantité qu'il faut ajouter avec son signe à l'heure marquée par la montre, qui est le résultat de l'observation directe, pour avoir l'heure du premier méridien (ou du lieu, selon le cas), qui est la quantité dont on a besoin.

L'erreur d'un compas sera le nombre de degrés qu'on doit ajouter à l'azimut qu'il indique pour avoir l'azimut vrai.

11. — Constructions graphiques.

La construction graphique exécutée avec soin remplace généraralement le calcul dans le tracé du détail des cartes géographiques. Mais son usage ne se borne pas là. Elle trouve son emploi toutes les fois qu'il est permis de se contenter d'un degré inférieur d'approximation. Nous donnerons un exemple de ce genre pour la prédiction des occultations.

Quand il s'agit de directions à porter sur une carte, au lieu de calculer l'azimut d'un astre, on peut recourir à une construction qui aura la même précision que le résultat final que l'on cherche. D'autres fois on cherche un élément au moyen de formules de correction dans lesquelles figurent d'autres éléments, dont on n'a besoin que pour le calcul de termes très petits. La résolution graphique des triangles sphériques est donnée dans les traités de Géométrie descriptive sous le nom de résolution de l'angle trièdre. Nous allons rappeler la solution des principaux cas qui peuvent nous intéresser.

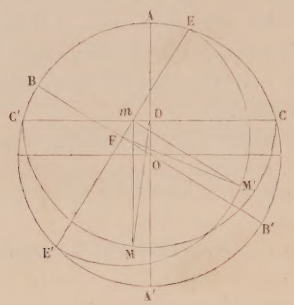
1^er^ Cas. — *Étant donnés trois côtés d'un triangle sphérique*,

trouver un angle. — Soient a, b, c les côtés donnés (*fig.* 3), A l'angle cherché.

On prend pour plan de la figure le plan d'un des côtés adjacents à l'angle cherché, soit c. On trace un cercle de rayon arbitraire, dont les dimensions sont déterminées par le degré de précision qu'on se propose d'atteindre.

A partir d'un point A de la circonférence on porte l'arc $AB = c$ et on trace les diamètres AA′, BB′. On prend ensuite $AC = b$ et $BE = a$, on mène par C une perpendiculaire CC′ à AA′, par E une

Fig. 3.



perpendiculaire EE′ à BB′. L'intersection m de ces perpendiculaires est évidemment la projection sur le plan du tableau du troisième sommet C du triangle, B et A étant celles des deux premiers. En rabattant autour de CC′ le plan qui contient ce sommet, et qui coupe la sphère suivant un petit cercle de diamètre CC′, le troisième sommet se rabat en M sur la perpendiculaire mM à CC′, et MDC′ sera l'angle A cherché. On trouverait l'angle B en opérant sur EE′ comme on a opéré sur CC′. C'est l'angle EFM′ de la figure. Pour trouver l'angle C il faudrait changer de plan de projection.

2ᵉ Cas. — *Connaissant deux côtés et l'angle compris, trouver un des autres angles et le troisième côté.* — Soient donnés B, a, c et soit proposé de chercher A et b. Prenons pour plan du tableau le plan du côté c (si on cherchait B, on prendrait le plan de a).

Traçons encore les deux diamètres AA′ BB′ faisant entre eux l'angle c. Puis prenons $BE = a$, et traçons de même la droite EE′ perpendiculaire à BB′. Rabattons le petit cercle qui contient le

troisième sommet autour de son diamètre EE′, et faisons à son centre EFM′ = B : le point M′ projeté perpendiculairement sur EE′ nous donne la projection du troisième sommet en *m*. Si l'on cherche l'angle A, la construction s'achève comme précédemment. Le côté *b* est égal à AC, CC′ étant une perpendiculaire à AA′ menée par *m*.

Ces deux cas sont les seuls utiles à considérer dans la pratique astronomique : il est donc superflu de rappeler les deux autres.

L'avantage des opérations graphiques est d'être très rapides, surtout quand, une des données restant constante, on a plusieurs tracés semblables à faire. Elles peignent à l'œil le degré de précision du résultat obtenu, par l'angle sous lequel se coupent les lignes de construction, et par la distance des points qui déterminent les droites. Elles se font avec facilité et exactitude sur du papier quadrillé millimétrique. En procédant avec soin, avec un cercle d'un décimètre de rayon, on trouve les angles à peu de minutes près. Cela suffit pour certaines déterminations d'azimuts destinés à être portés sur les cartes, et pour chercher la hauteur d'un astre ou encore son angle de position, dont on se trouve avoir besoin pour calculer certaines corrections.

On a aussi construit des *instruments* pour résoudre ces problèmes sans calcul. Nous nous contenterons de les signaler ici.

Le plus simple de tous est le *quartier de réduction*, destiné à la résolution des triangles rectilignes rectangles, et à l'aide duquel on peut aussi résoudre rapidement les problèmes ci-dessus.

Le *Planisphère Keller* résout les triangles sphériques en se basant sur les propriétés de la projection stéréographique. Il se compose de deux projections stéréographiques de grand diamètre, dont l'une est transparente et peut tourner concentriquement sur l'autre. Le *Triedromètre* de Zescevich, le *Planisphère Hue* sont également des projections toutes faites. M. le commandant de Magnac recommande l'usage du *Navisphère* et du *Métrosphère* : on opère alors directement sur la sphère au lieu d'opérer en projection sur le plan. Tous ces instruments sont accompagnés d'instructions spéciales relatives à leur usage : c'est ce qui nous dispense d'en parler plus longuement.

CHAPITRE II.

DE LA SPHÈRE CÉLESTE.

Nous admettrons que le lecteur ait entre les mains des éphémérides astronomiques et des Catalogues d'étoiles. Nous n'avons pas à expliquer ici de quelle manière on construit ces éphémérides. Rappelons seulement que la Mécanique céleste donne les moyens d'étudier et de prédire les mouvements des astres, et que les résultats qu'on en déduit sont mis sous forme de Tables qui servent elles-mêmes à calculer les éphémérides, dont l'observateur tirera ensuite les lieux des astres dont il a besoin. Nous renvoyons pour le surplus aux ouvrages spéciaux, et nous citons parmi les plus récents la *Mécanique céleste* de M. Resal et le *traité d'Astronomie pratique* de M. Souchon. Nous nous bornons à rappeler dans ce qui suit les définitions nécessaires.

12. — Mouvement diurne.

L'Astronomie appliquée n'a pas à tenir compte des mouvements réels de la Terre, et les définitions dont nous aurons à nous occuper ne se rapportent qu'au mouvement apparent du ciel.

L'observation nous apprend la constance des positions relatives des étoiles dites fixes, au moins dans une certaine mesure. De plus, en quelque point de la Terre qu'on se trouve, les figures formées par ces étoiles et leurs distances angulaires ne varient pas. Cela est vrai en général, en quelque point de l'orbite annuelle de la Terre qu'on se place, et c'est même sur cette hypothèse, admise pour la généralité des fixes, qu'on a basé la détermination de la parallaxe annuelle du petit nombre d'entre elles pour lesquelles cette parallaxe a pu être mesurée. On peut donc considérer les directions qui vont d'un point quelconque de la Terre à une étoile comme constantes, et projeter par suite les étoiles sur une sphère

de rayon arbitraire, ayant indifféremment pour centre un point de la surface ou le centre de la Terre. Les astres de notre système solaire se projettent aussi sur cette sphère : mais ils se distinguent des étoiles fixes par leur grandeur apparente mesurable et par leur mouvement relatif. Leur distance ne peut plus être considérée comme infiniment grande par rapport au rayon terrestre : il faut donc une correction de parallaxe pour passer de la direction dans laquelle ils se projettent, étant vus d'un point de la surface, à celle qu'on verrait du centre de la Terre, et qui figure dans les éphémérides.

Le mouvement diurne est la rotation uniforme de la sphère céleste ainsi définie autour d'un axe passant par le centre de la Terre, et coupant la Terre et la sphère céleste en deux points opposés appelés pôles. Le mouvement apparent se fait de gauche à droite pour un observateur placé dans l'axe de la Terre, ayant les pieds dirigés vers le pôle sud et la tête au Nord. C'est le sens du mouvement *rétrograde* des astronomes. Pour le même observateur, le mouvement *direct* est celui qui se fait de droite à gauche, tels les mouvements relatifs du Soleil et de la Lune, par exemple. Tel est aussi le sens des mouvements réels de la Terre autour de son axe et autour du Soleil.

13. — Systèmes de coordonnées.

La direction de la pesanteur, sensiblement invariable en un même lieu (1) est appelée *verticale*. Elle coupe la sphère en deux points : le *zénith*, au-dessus de l'observateur, le *nadir* en dessous. Le plan perpendiculaire à la verticale, passant par le lieu considéré, est l'*horizon géographique* de ce lieu. Ce nom s'applique aussi au grand cercle qui est la trace de ce plan sur la sphère céleste. L'*horizon vrai* est le plan parallèle au précédent mené par le centre de la Terre. L'*horizon apparent* est l'intersection de la

(1) Les variations de la verticale, dues aux actions luni-solaires, dont dépend le phénomène des marées sont assez petites pour qu'on les ait négligées jusqu'ici dans la pratique de l'Astronomie. On peut en dire autant des variations de l'axe du monde, dues à la rotation diurne, bien qu'on commence à se préoccuper de cette dernière inégalité dans les grands observatoires.

sphère céleste par un cône tangent à la surface terrestre, et qui a pour sommet l'œil de l'observateur.

Les plans passant par la verticale sont appelés plans verticaux, ou simplement *verticaux*. Le vertical parallèle à l'axe de la Terre est le *méridien* du lieu. Si la Terre est considérée comme une surface de révolution, le méridien contient l'axe de la Terre, et son intersection avec la surface est un *méridien géographique*, sa trace sur la sphère céleste, un *méridien céleste*. Tout plan passant par l'axe de la Terre coupe la sphère suivant un *cercle horaire*. La trace du méridien géographique s'appelle aussi la *méridienne*.

La *colatitude géographique* ou complément de la latitude, est l'angle de l'axe terrestre et de la verticale. Nous la compterons de 0° à deux angles droits en partant du pôle nord.

Le plan passant par le centre de la Terre et perpendiculaire à l'axe du monde, aussi bien que la trace de ce plan sur la sphère céleste, portent le nom d'*équateur céleste*. L'*équateur terrestre* est la trace de ce plan sur la surface de la Terre.

La *latitude géographique* est l'inclinaison de la verticale sur l'équateur. On la compte de 0° à 90°, de l'équateur, vers le Nord et le Sud : les latitudes boréales sont habituellement affectées du signe +, les latitudes australes du signe —. Moyennant cette convention on a, entre la latitude L et la colatitude λ la relation générale

$$\lambda = 90^\circ - L.$$

Les petits cercles de la sphère parallèle à l'équateur sont dénommés *parallèles diurnes*. Les petits cercles parallèles à l'horizon sont des *cercles de hauteur* ou *almicantarats*.

14. — Coordonnées zénithales.

Un point de la sphère peut être défini par rapport à trois axes dont l'un est la verticale, et dont les deux autres sont situés dans le plan de l'horizon. On choisit généralement pour axes les intersections de l'horizon par le méridien et par le vertical qui lui est perpendiculaire, et qui s'appelle *premier vertical*.

Un point est défini :

1° Par l'angle que fait son vertical avec le méridien : cet angle

appelé *azimut* se compte de 0° à 360° en partant du Sud vers l'Ouest (¹).

2° Par l'angle que fait la direction de son rayon visuel avec la verticale, ou *distance zénithale* ζ. Cet angle se compte à partir du zénith vers l'horizon. Il n'y a généralement pas lieu de l'affecter d'un signe.

La *hauteur* h d'un astre satisfait à la relation

$$h + \zeta = 90^\circ.$$

Les points situés au-dessous de l'horizon ont donc des hauteurs négatives.

15. — Coordonnées horaires.

On peut prendre pour axes l'axe du monde, qui contient le méridien, et les intersections de l'équateur par le méridien et par le cercle horaire qui lui est perpendiculaire.

Nous définirons un point :

1° Par l'angle que fait son cercle horaire avec le méridien, ou *angle horaire*. Nous le compterons de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens du mouvement diurne apparent, en partant du méridien supérieur (on peut aussi le compter de 0° à 180°, en affectant le signe + aux angles horaires ouest, le signe — aux angles horaires est).

2° Par l'angle que fait la direction du point avec l'axe terrestre, ou *distance polaire* δ. Nous comptons la distance polaire de 0° à 180° en partant du pôle nord.

La *déclinaison* de l'astre est le complément de la distance polaire, et définie par la relation

$$D + \delta = 90^\circ$$

(¹) Cette convention qui fait varier l'azimut dans le même sens que l'angle horaire, n'est pas universellement admise. On le compte souvent à partir du pôle élevé, tantôt dans le sens du mouvement diurne, tantôt dans les deux sens, en l'accompagnant de la désignation Est ou Ouest. Dans la marine, on le compte à partir des points cardinaux dans les deux sens, Est ou Ouest : il est toujours plus petit que 90°. Au point de vue des calculs, la convention que nous adoptons est équivalente à la numération de 0° à 180°, en comptant à partir du Sud les azimuts positifs vers l'Ouest, négatifs vers l'Est.

d'après laquelle les déclinaisons boréales sont positives, et les déclinaisons australes négatives.

Dans les deux systèmes de coordonnées que nous venons d'indiquer, les points de la sphère sont rapportés au méridien géographique, qui contient à la fois la verticale et l'axe du monde. Il est facile de passer de l'un des systèmes à l'autre au moyen des formules de transformation des coordonnées. Voici comment on conduira le calcul.

Le triangle pôle-zénith-astre est appelé triangle de position. Les formules de transformation sont les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique appliquées à ce triangle. On fera attention que l'azimut est l'angle *extérieur*.

Soient donc A l'azimut, P l'angle horaire, ϖ *l'angle à l'astre* ou angle *parallactique;* ζ la distance zénithale, δ la distance polaire, λ la colatitude. Pour passer des coordonnées horaires aux coordonnées zénithales on a les formules :

$$\begin{aligned} \cos\zeta &= \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P,\\ -\sin\zeta\cos A &= \cos\delta\sin\lambda - \sin\delta\cos\lambda\cos P,\\ \sin\zeta\sin A &= \sin\delta\sin P. \end{aligned}$$

On peut calculer ζ par la première formule en s'aidant des logarithmes d'addition; ζ une fois connu, la deuxième ou la troisième indifféremment donnent A, sans ambiguité, par son sinus et son cosinus.

On peut aussi employer un angle auxiliaire. Posons

$$\begin{aligned} m\sin\varphi &= \cos\delta,\\ m\cos\varphi &= \sin\delta\cos P, \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} \cos\zeta &= m\sin(\varphi+\lambda),\\ -\sin\zeta\cos A &= m\cos(\varphi+\lambda),\\ \sin\zeta\sin A &= \sin\delta\sin P; \end{aligned}$$

φ se calculera par sa tangente,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotang}\delta}{\cos P}.$$

On prendra sa valeur entre 0° et 180°; puis on calculera m par

$$m = \frac{\cos\delta}{\sin\varphi} = \frac{\sin\delta\cos P}{\cos\varphi},$$

il est positif, et en l'introduisant dans les équations ci-dessus on trouvera ζ et A avec vérification. Le calcul de A est plus précis par la formule

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin\delta \sin P}{m \cos(\varphi + \lambda)}.$$

La transformation inverse se fait par les formules analogues

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \cos\zeta \cos\lambda - \sin\zeta \sin\lambda \cos A, \\ \sin\delta \cos P &= \cos\zeta \sin\lambda + \sin\zeta \sin\lambda \cos A, \\ \sin\delta \sin P &= \sin\zeta \sin A. \end{aligned}$$

Nous réunissons dans le tableau qui suit l'ensemble des formules dont on peut avoir besoin, avec les notations que nous venons de définir.

$$\begin{aligned} \cos\zeta &= \cos\delta \cos\lambda + \sin\delta \sin\lambda \cos P, \\ \cos\delta &= \cos\zeta \cos\lambda - \sin\zeta \sin\lambda \cos A, \\ \cos\lambda &= \cos\zeta \cos\delta + \sin\zeta \sin\delta \cos\varpi, \\ \frac{\sin\delta}{\sin A} &= \frac{\sin\zeta}{\sin P} = \frac{\sin\lambda}{\sin\varpi}, \\ n\delta \cos\varpi &= \cos\lambda \sin\zeta + \sin\lambda \cos\zeta \cos A, \\ n\delta \cos P &= \cos\zeta \sin\lambda + \sin\zeta \cos\lambda \cos A, \\ \sin\lambda \cos A &= -\cos\delta \sin\zeta + \sin\delta \cos\zeta \cos\varpi, \\ \sin\lambda \cos P &= \cos\zeta \sin\delta - \sin\zeta \cos\delta \cos\varpi, \\ \sin\zeta \cos A &= -\cos\delta \sin\lambda + \sin\delta \sin\lambda \cos P, \\ \sin\zeta \cos\varpi &= \cos\lambda \sin\delta - \sin\lambda \cos\delta \cos P. \\ \sin A \operatorname{cotang}\varpi &= \operatorname{cotang}\lambda \sin\zeta + \cos\zeta \cos A, \\ \sin A \operatorname{cotang}\varpi &= \operatorname{cotang}\zeta \sin\lambda + \cos\lambda \cos A, \\ \sin\varpi \operatorname{cotang} A &= -\operatorname{cotang}\delta \sin\zeta + \cos\zeta \cos\varpi, \\ \sin\varpi \operatorname{cotang} P &= \operatorname{cotang}\zeta \sin\delta - \cos\delta \cos\varpi, \\ \sin P \operatorname{cotang} A &= -\operatorname{cotang}\delta \sin\lambda + \cos\lambda \cos P, \\ \sin P \operatorname{cotang}\varpi &= \operatorname{cotang}\lambda \sin\delta - \cos\delta \cos P. \end{aligned}$$

Les coordonnées qui précèdent sont directement fournies par l'observation ; les unes par l'altazimut, ou tout autre instrument pouvant donner les hauteurs ou les azimuts, les autres par l'équatorial. Pour un astre donné, elles se rapportent à un lieu et à un

instant déterminés, et ne peuvent par conséquent être réduites en Tables d'un usage général. Les Tables astronomiques renferment deux autres systèmes de coordonnées connues sous le nom de *coordonnées uranographiques*, et que nous allons définir.

16. — Coordonnées uranographiques.

Les *coordonnées équatoriales* se rapportent encore au plan de l'équateur et à l'axe du monde; mais leur point de départ, au lieu d'être un méridien terrestre, est un méridien invariable sur la sphère céleste. On choisit celui qui passe par le point où la trajectoire apparente du Soleil vient couper l'équateur, lorsque cet astre passe de l'hémisphère sud dans l'hémisphère nord. Ce point s'appelle *point vernal* ou *équinoxe de printemps*.

L'astre est encore défini par sa distance polaire (ou par sa déclinaison), et par l'angle que fait son cercle horaire avec le cercle horaire du point vernal. Cet angle α appelé *ascension droite* se compte de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h en sens inverse du mouvement diurne.

Cette convention, inverse de celle d'après laquelle on compte les angles horaires, sera justifiée quand il sera question de la mesure du temps.

L'aspect de la sphère céleste change quand on passe d'un point de la Terre à un autre. On distingue relativement à un lieu donné trois catégories d'astres : ceux qui coupent l'horizon dans le mouvement diurne, qui ont un lever et un coucher, et parmi ceux qui n'ont ni lever ni coucher, ceux qui sont constamment visibles et ceux qui ne le sont jamais.

Le ciel est ainsi partagé en trois zônes, définies par les relations entre la latitude et la distance polaire :

1° Zône de perpétuelle apparition,

$$\delta < \mathrm{L}.$$

2° Zône des étoiles qui ont un lever et un coucher,

$$180 - \mathrm{L} > \delta > \mathrm{L}.$$

3° Zône de perpétuelle occultation,

$$\delta > 180^\circ - \mathrm{L}.$$

Les étoiles de la première zône sont dites *circompolaires*. Cette expression est aussi employée pour désigner les étoiles qui passent au méridien entre le zénith et le pôle élevé, pour lesquelles $\delta < \lambda$, et qui sont caractérisées par ce fait que, ne passant pas par le premier vertical, leur azimut a un maximum, tandis que celui des étoiles équatoriales varie d'une façon continue de 0° à 360°, partie au-dessus, partie au-dessous de l'horizon. Les deux définitions ne s'accordent pas. Près de l'équateur, il y a peu d'étoiles qui ne se couchent pas, tandis que la presque totalité des astres ne passent jamais par le premier vertical. Au pôle, aucune étoile ne se couche, et toutes passent par le premier vertical.

On appelle *digression* d'une circompolaire (prise dans le deuxième sens) l'instant où son azimut est maximum. Les circompolaires, prises dans le premier sens, ont deux passages méridiens observables : le passage supérieur et le passage inférieur. Chaque fois qu'on emploie le mot de *circompolaires* il est donc nécessaire de le définir.

Les *coordonnées écliptiques* se rapportent à la trajectoire apparente du Soleil qui est plane ; le plan qui la contient, ainsi que sa trace sur la sphère, s'appellent l'*écliptique* (1). Il est incliné d'environ 23° 30′ sur l'équateur : cette inclinaison s'appelle l'*obliquité de l'écliptique*. Les deux points où il coupe l'équateur sont les équinoxes : les points situés à angle droit avec les équinoxes et qui correspondent aux maxima et minima de déclinaison du Soleil sont les solstices. On peut rapporter les astres à ce plan et à la direction qui lui est perpendiculaire, l'axe de l'écliptique, qui coupe la sphère aux pôles de l'écliptique. Les grands cercles passant par les pôles de l'écliptique sont dénommés cercles de latitude. L'arc d'équateur compris entre le cercle de latitude d'un astre et l'équinoxe de printemps est la *longitude* de l'astre. Elle se compte à partir du point vernal, de 0° à 360°, dans le même sens que les ascensions droites, c'est-à-dire en sens inverse du mouvement diurne. La longitude du Soleil va constamment en croissant. La *latitude* est la distance angulaire de l'astre à l'équateur : positive au nord de l'écliptique, négative au sud.

(1) Parce que les éclipses de Soleil et de Lune ne se produisent que lorsque la Lune est dans ce plan, ou voisine de ce plan.

Les coordonnées écliptiques ont une grande importance théorique et historique, mais elles ne sont pour ainsi dire plus d'aucun usage dans l'Astronomie pratique. Nous n'insisterons donc pas sur leur transformation en coordonnées équatoriales qui se fait au moyen des formules générales.

17 — Du temps et de sa mesure.

L'unité de temps adoptée en Astronomie est le *jour sidéral*, l'intervalle de la durée qui sépare deux retours consécutifs d'une étoile au même point du ciel. L'observation vérifie l'uniformité du mouvement diurne et la constance du jour sidéral, au moins pour les époques historiques. La méthode la plus exacte pour évaluer cette durée consiste dans l'observation des étoiles à leur culmination, c'est-à-dire à leur passage dans le plan du méridien. L'instant du passage du point lumineux derrière un repère fixe s'évalue avec d'autant plus de précision que le mouvement relatif de l'étoile est plus rapide. La vitesse apparente des étoiles, toujours parallèle à l'équateur et constante dans cette direction peut se décomposer en vitesse zénithale et vitesse azimutale : cette dernière n'est jamais nulle que pour les circompolaires à l'instant précis de leur digression ; la vitesse en distance zénithale s'annule au moment de la culmination, et à cet instant la vitesse en azimut est maximum. Ceci constitue une circonstance favorable pour l'observation de l'heure. Si l'on considère de plus que la détermination de l'azimut est indépendante des causes d'erreurs qui agissent sur la détermination des hauteurs, et notamment des flexions, des réfractions et des parallaxes, et que le passage au méridien s'observe sans l'intervention de cercles divisés, on comprendra les raisons qui font considérer cette observation comme la plus propre à déterminer l'heure avec exactitude. La vitesse apparente des étoiles étant proportionnelle au sinus de la distance polaire, ce sont les étoiles équatoriales qui se prêtent le mieux à servir d'étoiles horaires.

Le jour sidéral est divisé en 24 heures, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes (1). Son origine 0^h est l'instant du

(1) Il y a un rapport numérique relativement simple entre les unités angulaires

passage méridien du point vernal. D'après la définition que nous avons donnée de l'ascension droite, on voit que l'heure sidérale du passage d'une étoile est précisément égale à son ascension droite. Si on désigne par S l'heure sidérale, par P l'angle horaire et par α l'ascension droite d'un astre, on a la relation

$$S = \alpha + P.$$

On peut aussi définir l'heure sidérale l'angle horaire du point vernal. Les deux définitions sont équivalentes. En effet, quand une étoile passe au méridien, son angle horaire est nul : à ce moment le point vernal est en avance sur l'étoile d'une quantité égale à l'ascension droite de celle-ci, dans le sens du mouvement diurne ; son angle horaire compté vers l'Ouest est donc égal en valeur absolue à l'ascension droite de l'étoile, comptée du point vernal vers l'Est.

A la rigueur, l'astronome n'a besoin que de l'heure sidérale ; mais les usages civils réclament la régulation du temps sur la marche du Soleil, l'Astronomie emprunte au calendrier solaire au moins la date du jour : de là l'utilité d'introduire le temps solaire, quand ce ne serait que comme argument des Tables (1).

L'*heure vraie* est l'angle horaire du Soleil. Elle se compte actuellement à partir de midi vrai, c'est-à-dire de l'instant du passage du centre du Soleil au méridien. Si l'ascension droite du Soleil variait uniformément, la durée du jour solaire vrai, c'est-à-dire

---

sexagésimales et les unités de temps. C'est là la principale raison qui a empêché jusqu'ici l'adoption générale d'une division centésimale de la circonférence. Il ne semble pas impossible de lever cette difficulté en adoptant pour le jour sidéral lui-même la division décimale et d'arriver ainsi à une grande simplification des calculs astronomiques. Le jour civil étant différent du jour sidéral, cela ne préjugerait pas l'adoption du système décimal pour la mesure vulgaire du temps, et écarterait ainsi une des principales objections mises en avant pour cette réforme. Il n'y aurait à changer que les Tables pour la réduction du temps moyen en temps sidéral et réciproquement.

(1) Les expressions *temps* et *heure* sont à peu près équivalentes : elles le sont tout à fait quand on ne considère que l'intervalle diurne. On dira donc indifféremment temps sidéral ou heure sidérale. Le temps astronomique est un angle horaire et non une durée. Cet angle horaire peut s'évaluer à volonté en heures et fractions d'heures ou en unités angulaires : mais tandis que les angles sont tous de même espèce, il y a autant d'heures que d'espèces d'astres : heure sidérale, vraie, moyenne, lunaire, etc.

celle qui s'écoule entre deux passages successifs au méridien serait constante ; mais la vitesse en ascension droite est soumise à deux inégalités principales : la *réduction à l'équateur*, due à ce que l'écliptique, dans laquelle se meut le Soleil, est inclinée de 23° 30′ environ sur le plan de l'équateur, et l'*équation du centre*, conséquence des lois de Képler et de la forme elliptique de la trajectoire.

Le *temps moyen*, assez peu différent du temps vrai pour qu'il n'en résulte aucun inconvénient dans les usages civils, se règle sur un Soleil fictif défini comme suit. Concevons un Soleil qui parcoure l'écliptique d'un mouvement uniforme, et qui coïncide avec le Soleil vrai au périgée (et à l'apogée à cause de la symétrie de l'orbite). Concevons maintenant un second Soleil fictif assujetti à décrire l'équateur d'un mouvement uniforme, et à passer au point vernal en même temps que le premier Soleil fictif. Ce deuxième Soleil aura une ascension droite égale à la longitude du premier et croissant proportionnellement au temps : on l'appelle *Soleil moyen* et c'est sur lui que se règle le temps moyen. Son passage au méridien détermine l'heure 0^h à laquelle commence le jour astronomique. L'heure temps moyen est l'angle horaire du Soleil moyen.

Pour passer du temps vrai, observé directement par le passage du Soleil au méridien, au temps moyen, on se sert de l'*équation du temps*. C'est la quantité qu'il faut ajouter à l'angle horaire du Soleil vrai pour avoir le temps moyen, autrement dit : la correction du temps vrai. Pour éviter une fausse interprétation de cette convention et se dispenser de l'usage des quantités négatives, il est préférable de remplacer l'équation du temps par des éléments équivalents, savoir : le temps moyen à midi vrai, quand on veut passer du temps vrai au temps moyen, et le temps vrai à midi moyen, quand on opère la transformation inverse. L'angle horaire négatif est alors remplacé par son complément à 12 heures. Ces dénominations qui offrent l'avantage de s'expliquer d'elles-mêmes et d'affranchir le calculateur de la considération des signes algébriques, ont été adoptées par la *Connaissance des Temps*.

La correspondance entre le temps moyen et le temps sidéral se détermine par le *temps sidéral à midi moyen*, appelé quelquefois ascension droite du Soleil moyen.

Les mouvements propres du Soleil et de la Lune conduisent à considérer en dehors du jour d'autres périodes de temps, appelées années et mois. Ce ne sont point là des unités nouvelles, mais des quantités évaluées en jours, le jour sidéral étant l'unité primordiale, la seule dont la constance soit admise en principe. Une seule de ces périodes est considérée comme constante, c'est l'année sidérale, qui sépare deux retours consécutifs du Soleil au même point de l'écliptique ou à la même longitude. Elle représente la durée de la révolution de la Terre dans son orbite. La constance, déduite de la théorie et vérifiée par l'expérience, du grand axe de l'orbite, combinée avec la troisième loi de Kepler, établit l'invariabilité de cette durée. Il n'en est pas de même de celle de *l'année tropique*, comprise entre deux retours successifs du Soleil au point vernal. Celle-ci est troublée par diverses causes que nous allons résumer.

18. — Variations des plans fondamentaux.

Si l'orbite terrestre était une ellipse constante en grandeur, en forme et en position, si l'axe de la Terre restait toujours parallèle à lui-même, si enfin le système solaire n'avait aucun mouvement de translation par rapport au monde sidéral immobile lui-même, le ciel présenterait toujours le même aspect en un lieu donné : le Soleil reviendrait à intervalles réguliers à la même étoile et les coordonnées uranographiques des étoiles resteraient constantes dans la suite des siècles. En réalité, aucune de ces hypothèses n'est vraie : les coordonnées stellaires varient continuellement de quantités, petites il est vrai, mais parfaitement appréciables.

Précession et nutation. — L'attraction du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre tend à faire varier dans l'espace la direction de l'équateur terrestre et de l'axe du monde. Ce mouvement se compose de deux autres : l'un uniforme ou plutôt à longue période, la *précession luni-solaire ;* l'autre périodique, dû principalement à l'action de la Lune : c'est la *nutation* dont la période est celle de la révolution des nœuds de la Lune. Le premier mouvement se traduit par une rotation apparente de l'axe terrestre qui décrit pendant une durée de 26 000 ans environ

un cône autour du pôle de l'écliptique supposé fixe ; le deuxième, beaucoup plus faible, fait osciller le pôle des deux côtés de cette trajectoire moyenne et lui fait décrire en réalité une sorte de courbe épicycloïdale. L'équateur participe naturellement au même mouvement. Le mouvement du point vernal sur l'écliptique se fait dans le sens rétrograde, c'est-à-dire dans le sens du mouvement diurne apparent. Le point vernal paraît donc avancer dans le sens du mouvement diurne, et l'équinoxe arrive avant que le Soleil n'ait atteint le point du ciel où il se trouvait lors de l'équinoxe précédent. C'est pour cela que le même phénomène est désigné par ces deux termes en apparence contradictoires : *précession des équinoxes* et *rétrogradation du point vernal*.

L'action des planètes sur la Terre produit un déplacement du plan même de l'écliptique, dont l'angle avec le plan de l'équateur est soumis à une variation à très longue période. En réalité, la courbe décrite par la Terre autour du Soleil n'est exactement ni plane ni fermée, et sous l'influence des planètes son intersection avec l'équateur considéré comme fixe varierait.

En raison de la petitesse de cet effet, on considère l'écliptique comme plane, on la rapporte à l'une de ses positions (Laplace prend pour plan fixe la position de l'écliptique au commencement de 1750), et l'on considère ce mouvement comme composé d'un mouvement angulaire autour de la ligne des équinoxes, la *variation de l'obliquité*, et d'un mouvement de cette ligne équinoxiale elle-même qui a lieu dans le plan de l'écliptique, et, se composant avec la précession luni-solaire, produit la *précession totale*.

D'après Bessel, en prenant pour origine l'année 1750 et comptant le temps en années juliennes de $365^{j},25$, on a les expressions :

Obliquité de l'écliptique

$$\omega = 23^{\circ}28'18'',0 - 0'',48368\,t - 0'',00000\,272295\,t^{2},$$

Précession luni-solaire

$$\psi = 50'',37572\,t - 0'',0001217945\,t^{2},$$

Précession totale

$$\Psi = 50'',21219\,t + 0'',0001221483\,t^{2}.$$

Tel est l'arc de l'écliptique vraie, compris entre les points où

ce grand cercle est coupé par l'équateur aux époques 1750 et $1750 + t$.

Ces données permettent de calculer pour une date quelconque l'*équinoxe* et l'*obliquité moyens*.

Le mouvement de précession qui a lieu dans le plan de l'écliptique peut être remplacé par ses deux composantes rapportées aux coordonnées équatoriales : en négligeant la variation de l'obliquité, les expressions de la précession en ascension droite et en déclinaison sont

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \sin\alpha \operatorname{tang} D, \qquad \frac{dD}{dt} = n \cos\alpha$$

et d'après Bessel

$$m = 46'',02824 + 0'',0003086\, t, \qquad n = 20'',06442 - 0'',0000097\, t.$$

L'*équinoxe* et l'*obliquité vraies* se calculent en ajoutant aux valeurs moyennes l'effet de la nutation. Soient

$\mathfrak{Q}$ la longitude du nœud ascendant de la Lune,
$\odot$ la longitude du Soleil,
$\mathbb{C}$ la longitude de la Lune,
Π la longitude du périgée,
Π' la longitude du périgée lunaire.

On a d'après Peters, pour l'année 1900, les coefficients suivants pour les expressions des deux nutations :

Nutation en longitude

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{L} = &- 17'',2577 \sin\mathfrak{Q} + 0'',2073 \sin 2\mathfrak{Q} - 1'',2693 \sin 2\odot \\ &- 0'',2041 \sin 2\mathbb{C} + 0'',1275 \sin(\odot - \Pi) \\ &- 0'',0213 \sin(\odot + \Pi) + 0'',0677 \sin(\mathbb{C} - \Pi').\end{aligned}$$

Nutation en latitude

$$\begin{aligned}\Delta\omega = &+ 9'',2240 \cos\mathfrak{Q} - 0'',0896 \cos 2\mathfrak{Q} + 0'',5506 \cos 2\odot \\ &+ 0'',0885 \cos 2\mathbb{C} + 0'',0092 \cos(\odot + \Pi).\end{aligned}$$

Ces expressions montrent immédiatement la part prépondérante qui revient à la longitude du nœud lunaire.

Durée de l'année tropique. — On a vu que l'année sidérale est le temps que met le Soleil à parcourir sur la sphère céleste une circonférence complète de grand cercle. L'année tropique est le

temps que le Soleil met à revenir au même équinoxe. Les points équinoxiaux possédant un mouvement de rétrogradation, c'est-à-dire de sens contraire à celui du mouvement annuel du Soleil, l'année tropique est plus courte que l'année sidérale du temps qu'emploie le Soleil à parcourir l'arc Ψ. Comme la précession varie avec le temps, la différence entre l'année sidérale et l'année tropique n'est pas constante : l'année tropique elle-même est donc variable, quoique d'une quantité très faible. Sa durée est encore soumise à deux autres causes d'altération; l'une à courte période, la nutation, qui fait osciller la durée de l'année d'environ 1^s autour d'une valeur moyenne, et l'autre à très longue période provenant du déplacement du périgée, déplacement qui est de $11''{,}5$ par an. L'excentricité de l'orbite terrestre ne reste pas constante, mais varie entre 0,0033 et 0,086712 (Le Verrier). Or, la vitesse apparente du Soleil à l'époque de l'équinoxe est fonction de la longitude du périgée et de l'excentricité.

D'après Hansen et Olufsen, la durée de l'année sidérale évaluée en temps moyen est de $365^j 6^h 9^m 9^s,35 = 365^j,2563582$, et l'année tropique de

$$365^j 5^h 48^m 46^s,43 - 0^s,00595\ (t - 1800),$$

t désignant le millésime.

Le Verrier donne $365^j 5^h 48^m 46^s,045$ pour 1850 ; soit $365^j,242217$.

Pour avoir le rapport du jour sidéral au jour moyen on évaluera à l'aide d'une même unité le jour sidéral S, le jour moyen M et l'année tropique T. Le point vernal et le Soleil moyen se meuvent tous deux sur l'équateur. Dans l'intervalle d'une année tropique, le Soleil moyen décrit dans le sens direct un arc égal à $2\pi + \psi$, ψ étant la précession en ascension droite. On fait abstraction dans ce calcul de la nutation qui introduit une petite inégalité à courte période (19 ans $\frac{2}{3}$). Soient σ le nombre de jours sidéraux et μ le nombre de jours moyens contenus dans l'année tropique. En un jour sidéral le point γ décrit un angle $2\pi - \frac{\psi}{\sigma}$, donc en un an il décrit l'arc

$$\sigma\left(2\pi - \frac{\psi}{\sigma}\right) = 2\pi\sigma - \psi.$$

Pendant le même temps, le Soleil moyen décrit dans le sens

direct l'arc d'équateur $2\pi - \psi$; l'arc total décrit par le Soleil en un an dans le sens du mouvement diurne est donc

$$2\pi\sigma - \psi - (2\pi - \psi) = 2\pi(\sigma - 1).$$

Il est aisé de voir que le jour moyen étant l'intervalle de deux passages méridiens, le Soleil moyen décrit en un jour moyen 2π et en un an $2\pi\mu$; donc

$$2\pi(\sigma - 1) = 2\pi\mu.$$

D'ailleurs $\sigma = \frac{T}{S}$, $\mu = \frac{T}{M}$ et par suite $2\pi\left(\frac{T}{S} - 1\right) = 2\pi\frac{T}{M}$.

Si donc on prend le jour sidéral pour unité, on a, d'après Le Verrier,

$$\left.\begin{aligned} T &= 366{,}242217, \\ M = \frac{T}{T-1} &= \frac{366{,}242217}{365{,}242217} \end{aligned}\right\} \quad \text{(pour 1850)}.$$

La variabilité de l'année tropique entraîne celle du jour moyen, puisque le jour sidéral est constant. Les Tables de réduction du temps sidéral en temps moyen ne sont donc rigoureusement exactes que pour une époque donnée, mais l'extrême lenteur avec laquelle la précession varie permet de conserver les mêmes éléments de réduction pour un temps très long. La *Connaissance des Temps* renferme ces Tables de conversion d'un temps dans l'autre.

Parmi les autres causes de variation des éléments de l'année, le déplacement du périgée se combine dans les calculs avec la précession. La variation de l'excentricité, le grand axe restant constant, influe sur les valeurs de l'équation du temps. Toutes ces causes réunies font aussi varier la durée des saisons.

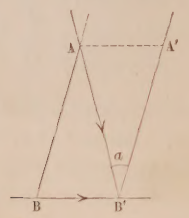
19. — Aberration.

Pour avoir la position apparente des étoiles, il est nécessaire de joindre à la considération de la précession et de la nutation celle d'une inégalité d'ordre physique due aux propriétés de la lumière, et qu'on appelle l'*aberration*.

Pour bien comprendre en quoi consiste cette nouvelle inégalité, il est nécessaire de se rendre compte de la manière même dont on

définit la position d'un astre. Celle-ci est déterminée par la direction de son rayon visuel par rapport à la Terre, une ligne droite rapportée à une direction donnée par rapport au globe terrestre. La propriété essentielle de la ligne droite étant d'être définie par deux points, il est donc toujours nécessaire de considérer deux points liés à la Terre. Ces points seront, selon le cas, le centre optique et le foyer d'une lunette, les pinnules d'une alidade, le centre optique du cristallin et un point donné de la rétine, le centre optique d'un objectif et un point déterminé d'une plaque photographique, l'œil et un objet terrestre éloigné, etc. Ces deux points doivent être fixes par rapport à la Terre, et, par suite, participer de ses mouvements. Quelle que soit l'hypothèse par laquelle on expli-

Fig. 4.



que le fait lumineux, mouvement, impression visible, phénomène chimique ou calorifique, il se propage avec une vitesse constante le long de la droite qui est dite le rayon, quels que soient les deux points qui pour nous définissent la direction de cette droite.

Dans ces conditions, soient A et B (*fig.* 4), deux points qui déterminent un rayon émané d'une étoile. Ces points devant être visibles l'un de l'autre et liés à la Terre, leur distance dans les cas les plus défavorables sera inférieure à 300 kilomètres, et la lumière la parcourra en moins de $\frac{1}{1000}$ de seconde.

L'angle dont la Terre tourne pendant cet intervalle sera de moins de $\frac{15}{1000}$ de seconde d'arc, quantité inappréciable par nos moyens d'observation; le mouvement pendant ce temps peut donc être considéré comme une translation rectiligne. Dans le mouvement autour du Soleil cet angle sera encore 365 fois plus petit.

Mettons pour fixer les idées que A soit un repère terrestre,

B l'œil, à l'instant zéro. Le pointé est fait de telle sorte que l'étoile paraîtra dans la direction BA, et l'œil la rapportera au point A. Or, à l'instant initial, le mouvement lumineux est en A : au bout du temps t il est arrivé en B′, BB′ étant la translation subie par l'œil par le mouvement de la Terre, pendant ce même temps : sa direction vraie, la direction absolue de l'étoile est donc AB′, tandis que l'œil arrivé en B′ la rapporte à A′, nouvelle position du repère A : il voit l'étoile en avance sur sa position vraie d'un angle $AB'A' = a$ que l'on calcule aisément. Soient, en effet, v la vitesse linéaire du point de la Terre, v' la vitesse de la lumière,

$$AB' = v't, \qquad BB' = vt, \qquad \sin a = \frac{v}{v'} \sin A'$$

ou, comme a est très petit,

$$a \sin 1'' = \frac{v}{v'} \sin A.$$

C'est cet angle a qu'on appelle *aberration*.

Chacun des mouvements dont la Terre est animée produit une aberration spéciale : l'*aberration diurne* provient du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe : l'*aberration annuelle* tient au mouvement de la Terre autour du Soleil. Le mouvement de translation du système solaire produit également une aberration ; mais ce mouvement, dans l'état actuel de la science, est considéré comme une translation rectiligne uniforme : il affecte donc une fois pour toutes les coordonnées de chaque étoile d'une manière constante, et il n'y a pas lieu de s'en occuper.

On voit facilement que le déplacement dû à l'aberration annuelle est nul pour les étoiles situées dans la direction du mouvement de la Terre : il est maximum pour les étoiles situées au pôle de l'écliptique, pour lesquelles l'angle A′ est droit. Si la vitesse de la Terre était constante, ces dernières paraîtraient décrire en une année un petit cercle autour de leur position vraie. Toute autre étoile paraît décrire une petite ellipse, le petit axe de cette ellipse est nul pour les étoiles situées dans le plan de l'écliptique.

En traitant la question par l'Analyse et en tenant compte de toutes les circonstances du mouvement de la Terre, on arrive à exprimer les effets de l'aberration par les formules suivantes.

Soient

α l'ascension droite vraie, α' l'ascension droite apparente d'une étoile,
D sa déclinaison vraie, D′ sa déclinaison apparente,
$\odot$ la longitude du Soleil, ω l'obliquité de l'écliptique;

en considérant le mouvement annuel comme circulaire, on a :

Aberration annuelle en ascension droite

$$\alpha' - \alpha = -20'',4451\,(\cos\odot\cos\alpha\cos\omega + \sin\odot\sin\alpha)\,\sec D;$$

Aberration annuelle en déclinaison

$$D' - D = +20'',4451\,[\cos\odot\,(\sin\alpha\sin D\cos\omega - \cos D\sin\omega) - \sin\odot\cos\alpha\sin D].$$

Nous ne donnons pas l'aberration en longitude et en latitude, dont on n'a pas occasion de se servir dans l'Astronomie pratique, non plus que l'aberration du Soleil et des planètes, différente de celle des étoiles à cause du mouvement propre des corps du système solaire. Il en est tenu compte dans le calcul des éphémérides. Le coefficient $20'',4451$ est appelé la *constante de l'aberration :* c'est le rapport $\frac{v}{v'}$ des vitesses de la Terre et de la lumière : la valeur donnée est celle qui a été déterminée par Struve. Bradley avait trouvé $20'',25$.

Aberration diurne

$$\alpha' - \alpha = 0'',311\sin\lambda\cos(S-\alpha)\,\sec D,$$
$$D' - D = 0'',311\sin\lambda\sin(S-\alpha)\sin D,$$

en désignant par λ la colatitude, par S le temps sidéral.

Cette dernière correction est assez faible pour qu'on n'en tienne généralement pas compte : le maximum de $\alpha - \alpha'$ correspond à $S = \alpha$, ou au passage méridien, et comme le coefficient $\sin\lambda\,\sec D$ est celui de la correction de collimation de la lunette méridienne, on réunit habituellement l'aberration diurne à la collimation, quand il s'agit d'observations très précises.

Il résulte de ce qui précède que si l'on connaît la position moyenne d'une étoile pour une époque donnée, et qu'on veuille trouver la position apparente de cette étoile pour une autre époque,

il faut tenir compte de la précession, de la nutation et de l'aberration.

La correction afférente à une étoile donnée est fonction des coordonnées de cette étoile et des éléments relatifs à la date (positions du Soleil et de la Lune) : on verra bientôt comment se calcule cette correction.

20. — Éphémérides astronomiques. Explication et usage de la « Connaissance des Temps. »

Les lieux des astres se calculent à l'aide de formules et de Tables que la Mécanique céleste enseigne à construire. Nous n'avons pas à indiquer ici ces méthodes qu'on trouvera exposées avec détail dans le *Traité d'Astronomie pratique* de M. Souchon, et qui n'ont pour l'observateur et le géographe qu'un intérêt purement spéculatif. Nous devons admettre que le lecteur possède des éphémérides astronomiques suffisamment complètes, où il trouvera, calculées d'avance, toutes les données qui peuvent lui être utiles. Les principales éphémérides en usage sont: la *Connaissance des Temps*, le *Nautical Almanac* et le *Berliner Astronomisches Jahrbuch*.

La *Connaissance des Temps* a reçu dans ces dernières années des perfectionnements importants qui la mettent au premier rang, et qui permettront de se passer de toute autre éphéméride, le jour, peut-être prochain, où le Bureau des Longitudes aura donné au chapitre des occultations le même développement que dans le *Nautical Almanac*. Elle contient toutes les indications nécessaires à son usage; nous ne les reproduirons pas, nous bornant à les compléter par l'explication des principales formules dont il y est question.

Prenons, pour fixer les idées, la *Connaissance des Temps* pour 1885.

Les pages 12 à 35 contiennent les éphémérides du Soleil : on y entre en prenant à volonté pour argument le temps vrai ou le temps moyen de Paris. Le temps vrai est choisi pour la commodité des marins. Les différences données servent à faire l'interpolation comme il a été expliqué au § 10. Les colonnes : « temps moyen à midi vrai » et

« temps vrai à midi moyen » permettent de s'affranchir de la considération du signe de l'équation du temps ; si l'on veut connaître cette dernière, on la prend dans la colonne « temps moyen à midi vrai », et quand le nombre de cette colonne commence par 11^h, on prend le complément à 12^h en l'affectant du signe —. Le temps sidéral à midi moyen est l'ascension droite du Soleil moyen.

Les coordonnées écliptiques des pages 36 à 44, et les coordonnées rectilignes (p. 47-54) sont d'un usage à peu près nul pour l'Astronomie pratique.

Les Tables de la Lune comprennent d'abord les heures approchées du lever, du coucher et du passage au méridien, calculées pour Paris. L'heure du passage méridien peut s'interpoler pour une autre longitude à 1^m ou 2^m près. A partir de 1888 on la trouvera, calculée à la seconde de temps, dans les Tables suivantes.

Les pages 68 à 238 renferment tout ce qui est nécessaire pour trouver avec rapidité et exactitude les coordonnées équatoriales, la parallaxe horizontale et le demi-diamètre apparent de la Lune. On y trouve pour chaque jour les coordonnées des étoiles de culmination lunaire, c'est-à-dire des étoiles dont le passage méridien doit être observé concurremment avec celui de la Lune pour la détermination des longitudes géographiques. On ne donne que deux étoiles pour chaque jour, mais il est bon d'y joindre pour l'observation, les étoiles des jours précédent et suivant.

Les positions sont calculées avec les Tables de Hansen, et affectées par suite d'erreurs assez considérables, provenant entre autres de ce que, depuis que l'on calcule les lieux du Soleil avec les Tables de Le Verrier on a altéré le rapport du temps moyen au temps sidéral qui avait été adopté antérieurement par Hansen lui-même. Aujourd'hui ces erreurs dépassent 1^s sur l'ascension droite : elles sont moindres sur la déclinaison. On peut employer les chiffres des Tables tels quels pour une première approximation, si l'on se réserve de corriger plus tard les données au moyen des observations faites dans les grands observatoires. Mais il est toujours préférable de réduire tout de suite l'erreur commise, en corrigeant immédiatement l'ascension droite et la déclinaison au moyen des Tables empiriques de M. Newcomb, qu'on trouve aux pages 712 et 713.

Les calculs d'interpolation, plus importants pour notre satellite que pour les autres astres, en raison de la rapidité de son mouve-

ment propre, sont exposés en détail aux explications (p. 728-735).

Les Tables relatives aux planètes s'expliquent d'elles-mêmes. La perfection à laquelle atteignent les Tables de Le Verrier permet d'admettre qu'au point de vue pratique les positions des planètes et du Soleil sont à peu près aussi exactes que celles des étoiles.

Les positions apparentes de 300 étoiles fondamentales sont données pages 371-509.

Au point de vue de la pratique des observations méridiennes, on se rappellera que chaque étoile passe deux fois par jour dans le plan méridien, à 12^h d'intervalle, et que son passage inférieur est observable si sa distance au pôle élevé est inférieure à la latitude du lieu d'observation.

Les distances angulaires du centre de la Lune au Soleil, aux planètes et à quelques étoiles brillantes voisines de l'écliptique sont calculées de 3^h en 3^h, telles qu'elles seraient vues du centre de la Terre (p. 510-633). Les coordonnées employées pour la Lune ont été au préalable corrigées d'après M. Newcomb. Les étoiles choisies sont voisines de l'écliptique afin de simplifier l'interpolation et d'augmenter la précision de l'observation, le mouvement de la Lune en déclinaison étant moindre que celui en ascension droite. Les explications montrent comment on se sert des distances lunaires pour le calcul de la longitude.

La Table des éclipses des satellites de Jupiter (p. 634-650) n'a besoin d'aucune explication. Rappelons seulement dès à présent qu'une éclipse d'un satellite est son entrée dans le cône d'ombre de la planète, et non son occultation par celle-ci : le satellite est donc à une certaine distance de la planète au moment où sa lumière est assez affaiblie pour qu'il disparaisse à la vue. Les observations des éclipses doivent être faites avec une lunette astronomique d'environ 1^m de distance focale : avec des instruments plus ou moins puissants, les heures de l'éclipse observée varient notablement (jusqu'à 3^{min} ou 4^{min}), la longitude tirée des Tables serait donc erronée.

Les immersions, c'est-à-dire les extinctions de lumière, sont beaucoup plus aisées à noter que les émersions ou réapparitions, qui surprennent toujours un peu l'observateur.

Il n'y a rien à ajouter au sujet des Tables suivantes (éclipses, occultations, marées, latitude et azimut par la polaire), non plus

que sur les Tables auxiliaires de réfractions, de conversion de temps et d'angles, d'interpolation, etc. Ces dernières sont à proprement parler des accessoires qu'on ne trouve pas dans toutes les éphémérides : elles restent les mêmes d'une année à l'autre.

La Table des positions géographiques qui termine le volume est destinée à donner aux voyageurs des points de repère pour vérifier leurs latitudes et surtout leurs longitudes.

21. — Catalogues d'étoiles.

Les 300 fondamentales de la *Connaissance des Temps* sont loin d'épuiser la liste de toutes les étoiles facilement observables. Il y a donc intérêt à se munir d'un Catalogue d'étoiles qui permette de déterminer la position de celles qui ne figurent pas dans les éphémérides. Il peut arriver qu'on observe par erreur une étoile non portée dans la *Connaissance des Temps*, ou qu'on soit conduit à en choisir une particulièrement bien située comme étoile de comparaison avec la Lune, ou une étoile occultée par la Lune, etc.

L'ascension droite et la distance polaire varient par l'effet de la précession, de la nutation, de la parallaxe annuelle, de l'aberration et du mouvement propre des étoiles. On n'a généralement pas à s'occuper de la parallaxe, déterminée pour très peu d'étoiles, et qui, sauf pour α du Centaure, est toujours une petite fraction de seconde d'arc.

Le *lieu moyen* d'une étoile est celui qu'on observerait en ne tenant compte que de la précession, et négligeant la nutation et l'aberration.

Le *lieu apparent* à la date t se déduit du lieu moyen au 1er janvier de l'année par les formules dues à Bessel, dans lesquelles t est exprimé en fraction d'année.

$$\alpha' = \alpha + \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + \tfrac{1}{15}\mathrm{E} + t\mu,$$
$$\delta' = \delta + \mathrm{A}a' + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}c' + \mathrm{D}d' + t\mu'.$$

δ' est ici la déclinaison, que l'on transforme facilement en distance polaire, μ et μ' sont les mouvements propres en A et en δ.

Les coefficients A, B, C, D dépendent de la date. Les deux premiers sont fonction du lieu du Soleil, et correspondent à l'effet de

l'aberration. C et D dépendent des lieux du Soleil et de la Lune. La précession depuis le 1er janvier est représentée dans C par le terme t et tous les termes de C et D, en ☊, ☉, ☾ et Γ se rapportent à la nutation. Nous ne transcrirons pas ici les expressions algébriques de ces quantités, qui se trouvent dans la *Connaissance des Temps*, à la page 371.

Le nombre $20'',4451$ qui entre dans B est la constante de l'aberration : dans A, le produit de cette constante par le cosinus de l'obliquité de l'écliptique donne $18'',7559$.

La composition du coefficient C montre que la position moyenne doit être calculée pour le commencement de l'année et non pour le jour de l'observation.

Les facteurs $a, b, c, d, a', b', c', d'$ dépendent uniquement des coordonnées de l'étoile : c est la précession annuelle en Æ, c' la précession en déclinaison ou en distance polaire. Bien qu'ils varient avec le temps, puisque α, δ et ω varient eux-mêmes, comme ils ne servent qu'au calcul de termes très petits, on peut, sans erreur appréciable, les considérer comme fixes pour une durée assez longue ; certains Catalogues, notamment celui de Baily, dit de l'*Association Britannique* (par abréviation B.A.C.) donnent leurs logarithmes tout calculés.

Les coefficients A,B,C,D dépendants de la date, sont donnés par leurs logarithmes aux pages 372-377 de la *Connaissance des Temps*.

Il est utile de savoir que les notations de Baily, adoptées par la *Connaissance des Temps* et le *Nautical Almanac*, diffèrent de celles que Bessel avait choisies d'abord. Si l'on veut passer des unes aux autres, on aura recours au tableau de concordance ci-après.

Baily, *C. des T.*, *N.A.* et B.A.C.....	A B C D $a\ b\ c\ d$ $a'\ b'\ c'\ d'$
Bessel.....	C D A B $c\ d\ a\ b$ $c'\ d'\ a'\ b'$

Les signes des quantités a', b', c', d' dans le Catalogue de Baily se rapportent à la distance au pôle nord et non à la déclinaison. Cela ne fait rien aux signes de A,B,C,D.

Certains Catalogues, notamment ceux de M. Airy (*Seven years* et *Twelve years Catalogue*) contiennent un autre système de constantes $e, f, g, h, e', f', g', h'$, et les coefficients correspondants relatifs à la date E,F,G,H sont calculés dans le *Nautical Almanac*.

Le but de cette transformation a été surtout d'éviter les erreurs de signe en n'opérant que sur des nombres positifs.

Voici les relations entre ces constantes et les précédentes.

$$\begin{aligned}
&E = A + 25, \quad e = a + 1{,}2, \quad e' = a' + 1{,}2,\\
&F = B + 25, \quad f = b + 1{,}2, \quad f' = b' + 1{,}2,\\
&G = C + 1{,}2, \quad g = c + 25, \quad g' = c' + 25,\\
&H = D + 25, \quad h = d + 1{,}2, \quad h' = d' + 1{,}2,\\
&L = 210 - 1{,}2\,E - 1{,}2\,F - 25\,G - 1{,}2\,H,\\
&l = 210 - 25\,e - 25\,f - 1{,}2\,g - 25\,h,\\
&l' = 210 - 25\,e' - 25\,f' - 1{,}2\,g' - 25\,h'.
\end{aligned}$$

L'explication de l'usage de ces constantes accompagne les éphémérides et les Catalogues qui les emploient.

Quand le Catalogue d'étoiles dont on se sert ne contient pas les logarithmes des coefficients $a\,b\,c\,d\,a'\,b'\,c'\,d'$, on a avantage à employer les formules

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha + \tfrac{1}{15}\,[f + g\sin(G + \alpha)\tang\delta + h\sin(h + \alpha)\sec\delta] + t\mu,\\
\delta' &= \delta + g\cos(G + \alpha) + h\cos(H + \alpha)\sin\delta + i\cos\delta + t\mu',
\end{aligned}$$

les f, g, h ayant une autre signification que ci-dessus. Voir la *Connaissance des Temps*; les valeurs de f, g, G, h, H et i, qui dépendent de la date, y sont données pages 378-386. Voici un spécimen de la disposition du B.A.C.

PAGE DE GAUCHE.

NUMÉRO d'ordre.	DÉSIGNATION de l'étoile.	GRANDEUR.	ASCENSION droite, 1er janvier 1850.	PRÉCESSION annuelle.	VARIATION séculaire.	MOUVEMENT propre.	LOGARITHME DE a	b	c	d
536	52 Ceti τ	$3\,\frac{1}{2}$	$2^h37^m6^s{,}09$	$2^s{,}905$	$-0^s{,}002\,4$	$-0^s{,}117$	8,8025	8,4567	0,4362	$-8{,}2617$

PAGE DE DROITE.

NUMÉRO d'ordre.	DÉSIGNATION de l'étoile.	GRANDEUR.	DISTANCE au Pôle nord, 1er janvier 1850.	PRÉCESSION annuelle.	VARIATION séculaire.	MOUVEMENT propre.	LOGARITHME DE a'	b'	c'	d'	AUTORITÉS et remarques.
536	52 Ceti τ	$3\,\frac{1}{2}$	$106°34'43''{,}5$	$18''{,}28$	$+0''{,}174$	$+0''{,}150$					

Les numéros précédant immédiatement le nom de la constellation sont ceux du Catalogue de Flamsteed. Les lettres grecques correspondent à une classification par ordre de grandeur dans la constellation, α représentant généralement l'étoile la plus brillante.

La variation séculaire de la précession sert à calculer la précession annuelle pour une époque autre que 1850,0.

Pour l'époque $1850 + t$, on a les positions moyennes suivantes :

$$\alpha'' = \alpha + \left(\text{préces. ann.} + \text{mouv. propre} + \frac{\text{variat. séc.}}{100} \times \frac{1}{2} t\right) t,$$

$$\delta'' = \delta + \left(\text{préces. ann.} + \text{mouv. propre} + \frac{\text{variat. séc.}}{100} \times \frac{1}{2} t\right) t.$$

C'est la colonne « mouvement propre » qui est la plus incertaine : elle contient des erreurs souvent sensibles, et lorsqu'on recherche une grande précision, il est nécessaire, surtout quand on opère pour une valeur considérable de t (exprimé en années) de vérifier la position moyenne en recourant aux observations les plus récentes.

CHAPITRE III.

FORME ET DIMENSIONS DE LA TERRE. — ATMOSPHÈRE. CORRECTIONS QUI EN RÉSULTENT.

22. — Coordonnées géographiques.

Les mesures de méridiens et de parallèles qui ont été faites à la surface du globe démontrent qu'on peut sensiblement considérer la Terre comme un ellipsoïde de révolution, ayant pour petit axe la ligne des pôles et pour grand axe le diamètre équatorial. Ce résultat est exact en moyenne, au moins dans les limites d'une précision ordinaire. On n'oubliera pas qu'il ne s'applique qu'à une surface idéale, le niveau moyen des mers supposé étendu à toute la Terre. L'ignorance où nous sommes, dans la plupart des cas, des influences locales capables de dévier la verticale (influences qui peuvent vicier aussi bien les observations du pendule que celles des positions géographiques d'un réseau trigonométrique), empêche d'ailleurs d'attribuer à cette notion autre chose qu'une valeur approximative. Mais cette approximation est parfaitement suffisante pour le calcul des corrections dont l'Astronomie emprunte les éléments à la Géodésie.

Un *méridien terrestre* est un plan passant par l'axe de la Terre, ou encore la trace de ce plan sur la surface. L'ellipsoïde étant de révolution autour de cet axe, tous les méridiens sont égaux. On choisit pour origine un premier méridien arbitraire. La *longitude géographique* est l'angle que fait le méridien d'un lieu donné avec le *premier méridien* choisi, que l'on pourrait encore mieux appeler méridien zéro, ou méridien d'origine. On ne considère comme méridien géographique d'un lieu que la moitié de la courbe méridienne qui est du même côté de l'axe que le lieu lui-même : l'autre moitié est appelée *anti-méridien* ou *méridien antipode*.

Les longitudes géographiques se comptent habituellement de 0° à 180° et se distinguent en longitudes est ou orientales et longitudes ouest ou occidentales. On peut aussi les affecter d'un signe. Il est plus rationnel de les compter dans un sens unique de 0° à 360°; on s'affranchit ainsi de la considération des signes algébriques. Nous adopterons ce système en comptant les longitudes vers l'Ouest.

De cette manière, les longitudes croissant dans le sens du mouvement diurne de la sphère céleste, si l'on a besoin d'interpoler une valeur donnée pour le premier méridien, la longitude croît en même temps que les heures de ce premier méridien. La longitude ainsi envisagée est la correction qu'il faut appliquer à l'heure locale pour avoir l'heure du premier méridien. On est conduit à la même convention si l'on veut que les longitudes terrestres croissent dans le sens des azimuts et des angles horaires.

Au point de vue des calculs et des signes des lignes trigonométriques, cette convention revient au même que celle qui compte de 0° à 180° vers l'Est et vers l'Ouest en donnant le signe — aux longitudes est.

Dans les éphémérides de la Lune et des Planètes, la *Connaissance des Temps* compte les longitudes de 0^h à 24^h de l'Est vers l'Ouest: c'est notre convention. Dans certains cas spéciaux (calcul des occultations), on y donne le signe + aux longitudes est.

En attendant que l'introduction du système décimal permette de représenter le temps et les angles par les mêmes nombres, à la virgule près, nous préférons compter les longitudes en temps. Partout ailleurs qu'à l'équateur, un degré de longitude ne représente en effet pas la même grandeur itinéraire qu'un degré de latitude, et il y a quelque inconvénient à ce point de vue à les exprimer par les mêmes unités. Nous compterons donc les longitudes de 0^h à 24^h, à partir du méridien de Paris, vers l'Ouest. C'est pour ce méridien qu'est calculée la *Connaissance des Temps*.

Le méridien initial, étant arbitraire, a varié avec les temps et varie encore selon les nations. Les trois principaux en usage sont :

1° Le méridien de Paris, adopté par la France, et passant par le centre du bâtiment principal de l'Observatoire de Paris;

2° Le méridien de Greenwich, qui passe par le grand cercle

méridien de l'Observatoire de Greenwich, à $9^m21^s,0$ à l'ouest du méridien de Paris (¹).

3° Le méridien de l'île de Fer, dont l'usage remonte à Richelieu, et qui n'est plus qu'un méridien conventionnel, que l'on place à 1^h20^m ou 20° à l'ouest de celui de Paris.

Une conférence internationale réunie à Washington en 1884 a recommandé l'adoption du méridien de Greenwich comme méridien universel, mais la France n'a pas adhéré à cette décision. Cette question du premier méridien n'a pas l'importance qu'on lui attribue quelquefois. Au point de vue astronomique, il suffit que le méridien initial soit celui des éphémérides. Au point de vue géographique, la grande majorité des cartes, en dehors des mappemondes, ne contiennent pas le méridien zéro : l'exactitude de la représentation topographique ne dépend que des positions rapportées à un méridien de la carte elle-même. Enfin il est très facile de passer, par la simple addition d'un nombre constant, d'un système de longitudes à un autre. Si pourtant on tenait à obtenir l'uniformité en cette matière, il semblerait rationnel de choisir un méridien conventionnel, aussi maritime que possible, défini par ses distances en longitude aux principaux observatoires : c'est la solution dont la France avait recommandé l'étude dans la conférence précitée.

Nous étendrons, avec Yvon Villarceau, la notion de longitude à la sphère céleste, et nous appellerons *longitude géographique d'un astre* la longitude, à l'ouest du premier méridien, des lieux où cet astre passe au méridien, ou encore l'angle horaire de l'astre par rapport au méridien d'origine, compté également vers l'Ouest.

Un *parallèle terrestre* est, sur l'ellipsoïde, le lieu des points dont les normales sont également inclinées sur l'axe. Dans l'ellipsoïde de révolution, ces normales coupent l'axe en un même point; le lieu devient alors un petit cercle perpendiculaire à l'axe et est appelé aussi *cercle de latitude*. Tous les points d'un même parallèle ont même colatitude astronomique ou géographique. La *colatitude géocentrique* est l'angle du rayon vecteur d'un point avec la moitié nord de l'axe de la Terre.

(¹) Telle est du moins la valeur actuellement adoptée. La première valeur trouvée par le télégraphe électrique était de $9^m20^s,6$. On est revenu depuis lors aux chiffres acceptés vers 1817.

23. — Éléments de l'ellipsoïde.

Si l'équation de l'ellipse méridienne est mise sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

on sait qu'on a les relations suivantes, pour définir l'excentricité e et l'aplatissement α de l'ellipsoïde :

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}, \qquad \alpha=\frac{a-b}{a}, \qquad e^2=2\alpha-\alpha^2.$$

On admet actuellement avec M. Faye que l'aplatissement est égal à $\frac{1}{292}$. Cette valeur est déduite des mesures d'arcs de méridien et des déterminations de la longueur du pendule à secondes.

Laplace admettait $\frac{1}{305}$ d'après la théorie de la Lune. On a adopté $\frac{1}{308}$ pour la carte de France : cette valeur paraît, en effet, convenir plus spécialement à notre pays. Bessel avait calculé $\frac{1}{299,1528}$ avec un luxe de décimales qui dissimule mal l'incertitude du résultat.

La valeur que nous admettons a remplacé depuis peu le chiffre $\frac{1}{294}$. La question des dimensions absolues de la Terre est toujours ouverte. A l'origine, le mètre devait être 1 dix-millionième du quart du méridien. Aujourd'hui l'on admet le mètre légal comme unité de longueur, et l'on a, avec $\alpha=\frac{1}{292}$,

$$a=6\,378\,393^{m}\pm 79, \qquad b=a-21\,844^{m}=6\,356\,559^{m},$$
$$e^2=0{,}00683\,76,$$

le quart du méridien a une longueur de 10 001 965 mètres.

Soient maintenant λ la colatitude astronomique, λ' la colatitude géocentrique, on a

$$\operatorname{cotang}\lambda=-\frac{dy}{dx}, \qquad \operatorname{tang}\lambda'=\frac{x}{y};$$

on tire de l'équation de l'ellipse par différentiation

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0,$$

d'où, avec les valeurs de cotang λ et tang λ' et de e^2,

$$\operatorname{cotang}\lambda = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{cotang}\lambda', \qquad \operatorname{tang}\lambda = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\lambda' = (1 - e^2)\operatorname{tang}\lambda'.$$

Il est aisé de voir que la différence entre λ et λ' est maximum pour les valeurs voisines de 45° et qu'elle s'élève dans ce cas à $12'$ environ : elle s'évanouit aux pôles et à l'équateur où le rayon vecteur se confond avec la normale.

Pour trouver le rayon vecteur

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sin\lambda},$$

on tire de l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{y^2}{x^2}\right) = 1,$$

et en vertu des relations ci-dessus

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{x^2}{y^2}}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{cotang}\lambda \operatorname{cotang}\lambda'}},$$

d'où enfin

$$R = a\sqrt{\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda' \cos(\lambda' - \lambda)}}.$$

Les formules qui précèdent exigent l'emploi de logarithmes à six ou sept décimales, si l'on veut avoir exactement la colatitude géocentrique. Ce n'est pas précisément la donnée dont on a besoin généralement, mais plutôt la différence $\lambda' - \lambda$ qui peut se trouver par un développement en série. On a en effet

$$\operatorname{tang}(\lambda' - \lambda) = \frac{\operatorname{tang}\lambda' - \operatorname{tang}\lambda}{1 + \operatorname{tang}\lambda' \operatorname{tang}\lambda};$$

substituant à tang λ' sa valeur $\dfrac{a^2}{b^2}$ tang λ, cette expression devient

$$\frac{\operatorname{tang}\lambda\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)}{1 + \dfrac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}^2\lambda};$$

multipliant haut et bas par $2\cos^2\lambda$ et remarquant que

$$2\cos^2\lambda = 1 + \cos 2\lambda, \qquad 2\sin^2\lambda = 1 - \cos 2\lambda,$$

il vient

$$\operatorname{tang}(\lambda' - \lambda) = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\sin 2\lambda}{1 + \frac{a^2}{b^2} + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\cos 2\lambda} = \frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\sin 2\lambda}{\frac{a^2}{b^2} + 1 - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos 2\lambda}.$$

Divisons numérateur et dénominateur par $\frac{a^2}{b^2} + 1$, et remarquons que, puisque

$$\frac{b^2}{a^2} = (1 - \alpha)^2,$$

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} + 1} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{2 - 2\alpha - \alpha^2} = n,$$

l'expression devient

$$\operatorname{tang}(\lambda' - \lambda) = \frac{n\sin 2\lambda}{1 - n\cos 2\lambda} \tag{33}$$

et peut se développer suivant la formule des parallaxes.

On peut trouver aussi une expression plus commode à calculer pour R, indépendamment de la valeur de son logarithme que nous avons trouvé en traitant des parallaxes.

On élimine pour cela x^2 entre les équations

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \alpha)^2} = 1,$$

et, puisque $y = R\cos\lambda'$, on arrive à

$$R = a(1 + 2\alpha\cos^2\lambda')^{-\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Si on néglige α^2, cela revient à

$$R = a(1 - \alpha\cos^2\lambda').$$

C'est la formule donnée dans la *Connaissance des Temps*.

Avec la valeur $\alpha = \frac{1}{292}$ le développement de $\lambda' - \lambda$ effectué suivant la formule (29) du § 6, prend les coefficients numériques ci-dessous :

$$\lambda' - \lambda = 11'47'',6\sin 2\lambda + 1'',2\sin 4\lambda. \tag{35}$$

24. — Rayons de courbure principaux.

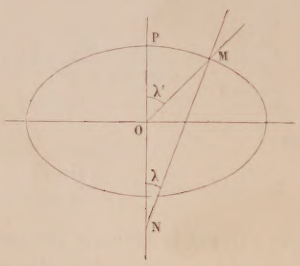
En Géodésie on est amené à considérer pour chaque point de la Terre les deux rayons de courbure principaux de la surface.

Le rayon de courbure du méridien est

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}. \tag{36}$$

La section perpendiculaire au méridien a pour rayon de courbure

Fig. 5.



ρ' la longueur N de la grande normale MN (*fig.* 5) terminée au petit axe,

$$\rho' = \frac{a}{(1-e^2\cos^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}. \tag{37}$$

Ces quantités, comme on le verra plus tard, servent au calcul des positions géographiques des points voisins les uns des autres. Nous en donnons des Tables.

Les logarithmes de ces Tables sont à cinq décimales : ce chiffre est suffisant dans la plupart des cas de la pratique. D'ailleurs la dernière décimale est à peine certaine, eu égard à l'approximation avec laquelle l'aplatissement est déterminé (1).

---

(1) Une différence de ± 7 sur le dénominateur de l'aplatissement correspond à 177 unités du 7e ordre décimal pour le rayon de 45° de colatitude.

D'autre part, sur une longueur d'un degré de latitude, l'erreur itinéraire qui correspond à une unité décimale du cinquième ordre n'atteint pas 3^m, soit $0'',1$, quantité dont on ne répond même pas dans les observatoires.

Nous y joignons une Table des valeurs de R = OM et de $\lambda' - \lambda$, calculées également avec l'aplatissement $\frac{1}{292}$. Tandis que ρ et ρ' sont exprimés en mètres, on exprime R en parties du rayon équatorial.

La valeur de R n'est exacte que pour le niveau de la mer. Pour un point qui n'est pas à ce niveau, il faut ajouter l'altitude. A la rigueur même, la différence $\lambda' - \lambda$ change avec celle-ci, mais d'une quantité négligeable.

Il n'en est pas ainsi de l'altitude même, qui peut altérer sensiblement la parallaxe. On en tiendra compte d'une façon suffisamment approchée en ajoutant au logarithme de R une unité de la dernière (5e) décimale par chaque 147 mètres d'altitude.

25. — Parallaxes.

On désigne généralement sous le nom de *parallaxe* (παραλλαξις, changement, variation), l'angle de deux directions aboutissant à un même point. C'est dans ce sens qu'il est question de parallaxe des fils pour une lunette imparfaitement mise au point; on peut aussi considérer comme une parallaxe la réduction au centre d'un signal géodésique. En Astronomie on considère encore la parallaxe annuelle des étoiles, qui est l'angle sous lequel serait vu d'une étoile le demi-grand axe de l'orbite terrestre. Mais la parallaxe sans épithète est l'angle que font entre elles deux droites partant d'un astre et aboutissant, l'une au centre de la Terre, l'autre en un point de la surface. C'est donc la correction qu'il faut appliquer à une direction mesurée à la surface, pour avoir cette direction vue du centre.

La position du centre d'un astre est définie par ses coordonnées angulaires et par sa distance au point considéré. Le calcul des parallaxes, pris d'une façon générale, a donc pour objet de fixer ces trois coordonnées. On voit qu'il y aura à considérer la parallaxe pour les divers systèmes de coordonnées zénithales, équatoriales, écliptiques.

Ce calcul a été fait plus haut (§ 6). Il ne reste, pour appliquer ces formules générales, qu'à définir dans chaque cas spécial considéré les positions des axes coordonnés. Remarquons d'abord que, puisqu'il s'agit de la surface et du centre de la Terre, la distance dénommée ρ est égale ici au rayon terrestre R, défini par la relation (34) en prenant le demi grand axe a du méridien terrestre pour unité.

Les quantités auxiliaires $m = \frac{\rho}{D}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}$ et $n = \frac{\rho}{D}\frac{\cos\theta}{\cos\gamma}$ qui interviennent dans ce calcul contiennent toutes deux

$$\frac{\rho}{D} = \frac{a\sqrt{1 + 2\alpha\cos^2\lambda}}{D}.$$

Les Tables astronomiques ne donnent pas la distance D des centres de la Terre et de l'astre évaluée en unités linéaires, mais on y trouve la *parallaxe horizontale équatoriale* π définie par la relation

$$\sin\pi = \frac{a}{D},$$

dont nous verrons tout à l'heure la signification. Cela posé, nous allons appliquer les formules aux divers systèmes de coordonnées.

26. — Parallaxe en azimut et en distance zénithale.

On prend pour axe des z' positifs la verticale apparente dirigée vers le zénith : les deux autres axes sont dans le plan de l'horizon, l'axe des x' est la trace du méridien, dirigée vers le Sud, l'axe des y' celle du premier vertical, dirigée vers l'Ouest. Les coordonnées sans accents correspondent à des axes parallèles aux précédents, et passant par le centre de la Terre. Soient respectivement λ et λ' les latitudes apparente et géocentrique. On posera :

$$\theta_1 = \lambda' - \lambda, \qquad \psi_1 = 0, \qquad \theta = \zeta, \qquad \theta' = \zeta', \qquad \psi = A, \qquad \psi' = A',$$

et l'on aura

$$m = R\frac{\sin\pi\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin\zeta}.$$

La parallaxe en azimut est $A' - A$, elle sera donnée par la formule exacte

$$\text{tang}(A' - A) = \frac{m\sin A}{1 - m\cos A} \tag{38}$$

ou par la série

$$A' - A = \frac{m}{\sin 1''}\sin A + \frac{m^2}{2\sin 1''}\sin 2A + \dots. \tag{39}$$

La parallaxe en distance zénithale est $\zeta' - \zeta$, et donnée par

$$\text{tang}(\zeta' - \zeta) = \frac{n \sin(\zeta - \gamma)}{1 - n \cos(\zeta - \gamma)} \tag{40}$$

ou par la série

$$\zeta' - \zeta = \frac{n}{\sin 1''} \sin(\zeta - \gamma) + \frac{n^2}{2 \sin 1''} \sin 2(\zeta - \gamma) + \dots \tag{41}$$

dans laquelle on a fait

$$n = R \frac{\sin\pi \cos(\lambda' - \lambda)}{\cos\gamma}, \qquad \text{tang}\,\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A + A')}{\cos\frac{1}{2}(A' - A)} \text{tang}(\lambda' - \lambda).$$

Si l'on était à l'équateur, on aurait $R = 1$, $\lambda' - \lambda = 0$, par suite $\gamma = 0$, et il en résulterait

$$n = \sin\pi.$$

Si maintenant on fait $\zeta = 90^\circ$ dans la valeur de tang $(\zeta' - \zeta)$ il vient

$$\text{tang}(\zeta' - \zeta) = \sin\pi.$$

L'angle π est petit; il ne dépasse guère 1° pour la Lune, qui est l'astre le plus rapproché : on a donc sensiblement

$$\zeta' - \zeta = \pi$$

π est ainsi la parallaxe d'un astre qui serait à l'horizon géocentrique d'un point de l'équateur terrestre. De là le nom de parallaxe horizontale équatoriale que nous lui donnons.

Dans la pratique ordinaire, même quand il s'agit de la Lune observée ailleurs que dans les grands observatoires, on peut employer avec une exactitude suffisante les formules approchées

$$\gamma = (\lambda' - \lambda)\cos A,$$

$$\zeta' - \zeta = \frac{R \sin\pi \sin(\zeta - \gamma)}{\sin 1''}, \tag{42}$$

$$m = R(\lambda' - \lambda)\frac{\sin\pi}{\sin\zeta},$$

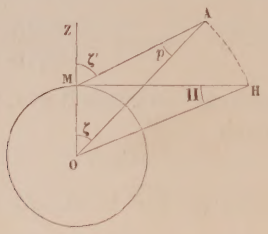
$$A' - A = m \sin A = R(\lambda' - \lambda)\frac{\sin A \sin\pi}{\sin\zeta}. \tag{43}$$

On voit que la parallaxe en azimut est toujours très petite : elle est nulle si on suppose la Terre sphérique ou $\lambda' = \lambda$. Elle est nulle encore dans le méridien. Elle croît au contraire sans limites quand

ζ se rapproche de zéro : cela tient au développement substitué à la formule rigoureuse. Il est clair d'ailleurs que pour $\zeta = 0$ la parallaxe en azimut n'a plus de sens.

Démonstration géométrique. — L'importance de la question nous engage à la reprendre par des considérations de pure Géométrie

Fig. 6.



(*fig.* 6). Supposons la Terre sphérique, on aura, en conservant les mêmes notations et appelant p l'angle à l'astre,

$$\sin p = \frac{R}{D}\sin\zeta'.$$

Si on fait $\zeta' = 90^\circ$, p acquiert sa valeur maximum π, telle que

$$\sin\pi = \frac{R}{D},$$

π est l'angle sous lequel le rayon terrestre est vu de l'astre considéré. On a, avec une exactitude suffisante dans cet ordre d'approximation,

$$p = \pi\sin\zeta', \qquad \zeta = \zeta' - p.$$

Il n'y a pas de parallaxe d'azimut, le vertical de l'astre passant par le centre de la Terre. La parallaxe horizontale π se trouve dans les éphémérides, et la parallaxe de hauteur p se calcule par la formule donnée. Les Tables III et IV de la *Connaissance des Temps* donnent ce calcul tout fait pour le Soleil et les planètes.

Quand il s'agit de la Lune, il faut avoir égard à l'aplatissement et alors la parallaxe en azimut n'est plus nulle.

Pour calculer la parallaxe en distance zénithale rapportée au

zénith vrai, c'est-à-dire à la direction du rayon terrestre, on a toujours

$$\sin p = \sin \pi_1 \sin \zeta' ;$$

mais ici π_1 se déduit de la parallaxe horizontale équatoriale en la multipliant par le rayon R, ou approximativement

$$\pi_1 = \pi (1 - \alpha \cos^2 \lambda).$$

Pour passer aux distances au zénith apparent (verticale), il faut établir une relation entre la distance de l'astre aux deux zéniths. Soit ζ la distance au zénith vrai, ζ' la distance au zénith apparent, A l'azimut; on a

$$\cos \zeta' = \cos (\lambda' - \lambda) \cos \zeta - \sin (\lambda' - \lambda) \sin \zeta \cos A.$$

Comme $\lambda' - \lambda$ est très petit, on peut négliger son carré, remplacer sin $(\lambda' - \lambda)$ par l'arc et le cosinus par l'unité, d'où

$$\cos \zeta' - \cos \zeta = - (\lambda' - \lambda) \sin \zeta \cos A.$$

Remplaçant le premier membre par un produit, remarquant que la différence entre $\sin \frac{1}{2} (\zeta + \zeta')$ et $\sin \zeta$ est de même ordre que $\lambda' - \lambda$ et $\zeta - \zeta'$ et remplaçant $\sin \frac{1}{2} (\zeta - \zeta')$ par $\frac{1}{2} (\zeta - \zeta')$ on aura

$$\zeta - \zeta' = (\lambda' - \lambda) \cos A,$$

d'où l'on tirera ζ si ζ' a été observé. Mais il n'y a généralement pas à recourir à ces calculs, et il est inutile de passer par la distance au zénith vrai qui n'est d'aucun usage. Il est préférable de recourir aux formules (39) et (41) en prenant pour première valeur $A = A'$, ce qui est toujours suffisamment exact pour le calcul numérique.

En raison de la petitesse de la parallaxe en azimut, on peut d'ailleurs la déterminer d'abord. Voici le calcul direct.

Projetons la Lune L (*fig.* 7) sur l'horizon du point M en L_1 et soit S le point Sud. L'azimut apparent est SML_1. L'azimut rapporté à la même direction verticale, mais tel qu'il serait pris du centre est $SM'L_1$, et la parallaxe ML_1M'. On peut prendre pour l'arc MM' la portion de la tangente au méridien en M comprise entre M et la parallèle OM' à la verticale de M, et la droite MM' a pour longueur $R \sin(\lambda' - \lambda)$.

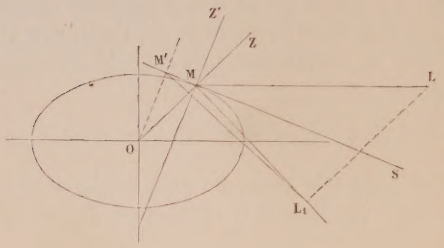
D'ailleurs, ζ' étant la distance zénithale Z'ML, on a

$$M'L_1 = D \sin \zeta'.$$

On a immédiatement

$$\frac{\sin (A - A')}{R \sin (\lambda' - \lambda)} = \frac{\sin A}{D \sin \zeta'};$$

Fig. 7.



négligeant les termes du deuxième ordre en $A - A'$ et $\lambda' - \lambda$, et remplaçant $\frac{R}{D}$ par $\sin \pi$,

$$A - A' = (\lambda' - \lambda) \sin \pi \frac{\sin A}{\sin \zeta'}.$$

Tant que $\sin \zeta$ n'est pas très petit, $A - A'$ est beaucoup plus petit que $\lambda' - \lambda$ à cause du facteur $\sin \pi$. Cette formule suffit ordinairement, même en y remplaçant A par A'. La colatitude géocentrique n'intervient que par la différence $(\lambda' - \lambda)$.

L'effet de cette parallaxe est d'écarter l'astre de la portion du méridien opposée au pôle élevé; si on compte les azimuts avec les signes + et — des deux côtés de cette droite, la valeur absolue de l'azimut apparent est toujours plus grande que celle de l'azimut vrai. On voit qu'il est inutile de s'occuper dans ce calcul du zénith vrai auquel aucune observation n'est rapportée. Le zénith apparent est seul à considérer.

27. — Parallaxe en ascension droite et en distance polaire.

Les coordonnées horaires et équatoriales ont le même axe des z, l'axe de la Terre pour les coordonnées géocentriques, et une paral-

lèle à cet axe menée par le point considéré de la surface, pour les coordonnées apparentes.

Occupons-nous d'abord des coordonnées horaires.

Le plan des xy est l'équateur, celui des $x'y'$ lui est parallèle. Nous comptons les x positifs sur la méridienne vers le Sud, les y positifs sur la trace du premier vertical vers l'Ouest. Nous aurons alors, P étant l'angle horaire, δ la distance au pôle nord.

$$\theta = \delta, \qquad \psi = P,$$
$$\theta_1 = \lambda', \qquad \psi_1 = 0,$$

et la substitution de ces valeurs dans (16), (18) et (24) donnera les formules suivantes :

1° Pour la parallaxe en angle horaire $P' - P$,

$$m = \rho \frac{\sin\lambda' \sin\pi}{\sin\delta},$$

$$\operatorname{tang}(P' - P) = \frac{m \sin P}{1 - m\cos P};$$

2° Pour la parallaxe en distance polaire $\delta' - \delta$, P et P′ étant connus par ce qui précède,

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(P + P')}{\cos\frac{1}{2}(P - P')}\operatorname{tang}\lambda', \qquad n = \frac{R\sin\pi}{\cos\gamma},$$

$$\operatorname{tang}(\delta' - \delta) = \frac{n\sin(\delta - \gamma)}{1 - n\cos(\delta - \gamma)}.$$

Nous nous dispensons d'écrire les développements en série qui s'aperçoivent à première vue. Remarquons seulement qu'ici γ n'est plus une petite quantité comme dans le cas précédent.

Comme $\frac{1}{2}(P + P')$ diffère peu de P, que $\frac{1}{2}(P' - P)$ diffère peu de zéro, que λ' enfin est voisin de λ, on a approximativement

$$\operatorname{tang}\gamma = \cos P \operatorname{tang}\lambda.$$

C'est la relation connue des triangles rectangles : γ est donc sensiblement la projection par arc de grand cercle, sur le cercle de déclinaison de l'astre, de l'arc compris entre le pôle et le zénith; la parallaxe en distance polaire est par conséquent sensiblement nulle quand l'angle à l'astre est droit, ce qui arrive pour les circompolaires à leurs digressions.

Pour passer des coordonnées horaires aux coordonnées équato-

riales, l'axe des z reste le même : la seule différence est qu'on a l'habitude de faire passer l'axe des x positifs par le point vernal. Mais l'ascension droite est liée à l'angle horaire par la relation

$$P = S - \alpha;$$

pour un point de la surface,

$$P' = S' - \alpha';$$

on a d'ailleurs $S = S'$, puisque l'heure sidérale est l'ascension droite du méridien local, qui est le même pour le centre et la surface; donc

$$\alpha - \alpha' = P' - P.$$

Le développement en série serait ainsi

$$\alpha - \alpha' = P' - P = \frac{m \sin P}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 2P}{2 \sin 1''} + \dots$$

On se rappellera que les angles horaires sont comptés, à partir du méridien supérieur vers l'Ouest, de 0° à 360°. Si l'on avait à faire souvent ces calculs en un lieu donné, on aurait avantage à dresser des Tables donnant les logarithmes de m et les valeurs de n et γ.

Nous ne donnerons pas ici le calcul des parallaxes en coordonnées écliptiques, qui se ferait exactement comme les précédents en prenant pour axe des z l'axe de l'écliptique, et pour axe des x la ligne des équinoxes; les coordonnées écliptiques, autrefois usitées pour le calcul des éclipses et des occultations, sont aujourd'hui d'un emploi nul en Astronomie pratique, et n'ont plus d'importance que pour la théorie.

28. — Influence de la parallaxe sur le diamètre apparent.

La grandeur du diamètre apparent des astres dépend de leur distance : l'effet de la parallaxe sur cette quantité n'est appréciable que pour la Lune. Soit r le rayon linéaire de la Lune, Δ son demi-diamètre angulaire apparent, vu du centre de la Terre et donné dans les éphémérides, Δ' le demi-diamètre angulaire vu du point M de la surface, la Lune est assez sensiblement sphérique pour

qu'on ait

$$r = D \sin\Delta = D' \sin\Delta'.$$

On a vu que

$$\frac{D'}{D} = f = 1 + n^2 - 2n\cos(\theta - \gamma)$$

et

$$\log\frac{D'}{D} = M\left[n\cos(\theta-\gamma) - \frac{n^2}{2}\cos 2(\theta-\gamma)\ldots\right] :$$

Si l'on connaît ζ et A, on fera

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+A')}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\operatorname{tang}(\lambda'-\lambda), \qquad n = \frac{R\sin\pi\cos(\lambda'-\lambda)}{\cos\gamma}$$

et $\theta = \zeta$.

Si l'on se donne δ et P (ou α), on aura

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(P+P')}{\cos\frac{1}{2}(P-P')}\operatorname{tang}\lambda', \qquad n = \frac{R\sin\pi}{\cos\lambda}$$

et $\theta = \delta$.

On a d'ailleurs aussi l'expression (26) du § 6.

$$\frac{D'}{D} = \frac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\theta'-\gamma)}.$$

La relation des diamètres apparents devient donc

$$\sin\Delta' = \sin\Delta\,\frac{\sin(\theta'-\gamma)}{\sin(\theta-\gamma)},$$

θ étant selon le cas la distance zénithale ou la distance polaire.

Dans le premier cas, γ est toujours petit et inférieur à $\lambda' - \lambda$, on peut donc le négliger et écrire

$$\sin\Delta' = \sin\Delta\,\frac{\sin\zeta'}{\sin\zeta} \quad \text{ou} \quad \Delta' = \Delta\,\frac{\sin\zeta'}{\sin\zeta}.$$

Dans le second cas, il ne sera pas possible d'appliquer cette formule dans le voisinage des valeurs de δ pour lesquelles $\delta = \gamma$, mais alors la parallaxe est négligeable. Si l'on ne recherche pas une grande précision, on peut remarquer que, puisque

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{D}{D'} = \frac{\sin(\zeta+p)}{\sin\zeta} \qquad \text{et} \qquad \sin p = \sin\pi\sin\zeta,$$

on doit avoir

$$\Delta' = \Delta\,(\cos p + \cos\zeta \sin\pi)\,.$$

ou approximativement

$$\Delta' = \Delta\,(1 + \sin\pi\cos\zeta).$$

29. — Courbes de hauteur.

On appelle *courbe de hauteur* le lieu des points de la surface terrestre pour lesquels un astre donné, à un moment donné, a la même hauteur ou la même distance zénithale. Un point de la surface est évidemment déterminé par l'intersection de deux courbes de ce genre, c'est-à-dire par l'observation des hauteurs de deux astres.

Il est aisé de voir que si la Terre était supposée sphérique, la courbe de hauteur d'un astre quelconque serait un petit cercle ayant pour pôle le point qui a cet astre à son zénith, et pour rayon sphérique un arc égal à la distance zénithale de l'astre : ou, ce qui revient au même, cette courbe serait la trace sur la sphère d'un cône de révolution, ayant pour axe la droite qui joint l'astre au centre de la Terre, et pour angle au sommet, c'est-à-dire au centre, la distance zénithale. Ce petit cercle étant coupé normalement par les grands cercles qui passent par son pôle, la tangente à la courbe de hauteur en un point quelconque est perpendiculaire au vertical de l'astre.

Si l'on restitue à la Terre sa forme ellipsoïdale, la courbe de hauteur n'est plus un petit cercle, mais une courbe à double courbure; le lieu des normales au sphéroïde le long de cette courbe n'est plus un cône, mais une surface gauche, lors même que l'ellipsoïde est de révolution. Mais si l'on considère d'une part cette surface, et de l'autre le cône de révolution auquel elle se réduit dans le cas d'une sphère, on voit que chacune des normales à l'ellipsoïde a sa correspondante qui lui est parallèle parmi les génératrices du cône : que, par conséquent, le pied d'une normale de colatitude donnée a même longitude par rapport au point qui a l'astre au zénith, qu'il s'agisse de la sphère ou de l'ellipsoïde, et réciproquement.

Les deux courbes diffèrent :

1° En ce que les distances, mesurées à la surface de l'ellipsoïde, des points du lieu à la verticale de l'astre ne sont pas égales entre elles, cette verticale ne passant pas par le centre du lieu géométrique, ou mieux, ce lieu n'ayant pas de centre; tandis que sur la sphère il y a symétrie complète autour de cette droite.

2° En ce que la tangente au lieu géométrique n'est plus rigoureusement perpendiculaire au vertical de l'astre.

Il résulte de là que si l'on se borne à la recherche des coordonnées angulaires d'un point (longitude et colatitude), on peut conduire le calcul en supposant la Terre sphérique. Si l'on fait, au contraire, intervenir les azimuts et les distances linéaires, il est nécessaire d'avoir égard à l'aplatissement. De la petitesse de cet élément et du fait que l'ellipsoïde est de révolution il résulte que ces corrections sont petites. C'est plus spécialement dans la pratique de la navigation qu'on est amené à considérer les courbes de hauteur : on peut alors négliger l'influence de l'aplatissement sur l'azimut et admettre que le lieu est normal au vertical de l'astre. Il est tenu compte de l'influence sur les distances par l'introduction de l'aplatissement dans le calcul des latitudes croissantes des cartes marines. Mais dans les calculs des lieux géométriques, où les latitudes croissantes sont employées comme quantités tabulaires auxiliaires, il faut employer celles qui sont calculées pour la sphère, comme on les trouve dans les Tables de Callet.

La courbe de hauteur est déterminée en grandeur par son rayon sphérique, et en position par les coordonnées géographiques de son centre.

On a vu que le rayon sphérique est la distance zénithale; la colatitude du centre est la distance polaire, et sa longitude, l'angle horaire de l'astre relativement au méridien initial : nous avons appelé cette quantité la *longitude géographique de l'astre*.

Soient $\mathcal{L}$ la longitude géographique de l'astre comptée positivement vers l'Ouest, α l'ascension droite, S_p l'heure sidérale du premier méridien, on a pour calculer $\mathcal{L}$ la relation

$$\mathcal{L} = S_p - \alpha.$$

La connaissance de l'heure sidérale du premier méridien et des coordonnées équatoriales de l'astre détermine donc le centre du

petit cercle de hauteur, dont l'observation de distance zénithale fournit le rayon.

Sur une sphère ce lieu se trace aisément à l'aide du compas sphérique. Sur une projection stéréographique il se traduit par un petit cercle assez facile à construire. Sur les autres systèmes de projection, ces courbes prennent des formes plus compliquées.

Analytiquement, si l'on désigne par G la longitude d'un point quelconque, l'angle horaire de l'astre en ce point est $\mathcal{L} - G$ et l'équation du cercle de hauteur est

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos(\mathcal{L} - G).$$

Nous aurons à revenir sur diverses applications de ces principes.

30. — Réfractions astronomiques.

La direction suivant laquelle on aperçoit un point quelconque est la tangente à la trajectoire du rayon lumineux émané de ce point. Si le milieu qui sépare l'œil du point est homogène, cette trajectoire est une droite, et la direction apparente du point se confond avec sa direction vraie. Il n'en va pas de même quand le milieu est hétérogène, car à chaque passage d'un milieu dans un autre de réfrangibilité différente, le rayon lumineux subit une déviation : sa trajectoire est une ligne brisée. Si la réfrangibilité du milieu interposé varie d'une manière continue, cette ligne devient une courbe.

L'existence de l'atmosphère et l'inégalité de densité de ses diverses couches introduisent dans les pointés des astres et des points terrestres une hétérogénéité de ce genre. Le rayon lumineux est dévié : l'angle que le rayon arrivant à l'œil fait avec la direction géométrique vraie du point visé est appelé la *réfraction*. Selon qu'il s'agit d'astres ou de points terrestres, on distingue la réfraction astronomique ou la réfraction géodésique.

La théorie des réfractions est la moins avancée des théories astronomiques. Les géomètres ont exercé sur elle toute leur sagacité, mais il faut bien reconnaître que leurs efforts n'ont pas abouti à un résultat satisfaisant de tout point, et la conclusion la plus nette de ces recherches est que le problème ne comporte pas une solution précise. Aussi voyons-nous tout récemment M. Lœwy

prendre résolument le parti de déterminer les réfractions empiriquement en comparant entre elles les distances de deux mêmes astres observés dans différentes régions du ciel, ou plutôt en mesurant micrométriquement les variations de ces distances.

Nous allons indiquer la partie de cette théorie qui soulève le moins d'objections.

Pour établir la théorie, on suppose la Terre sphérique. On admet que l'atmosphère se compose de couches également sphériques, concentriques à la Terre, homogènes chacune dans toute son étendue et dont la densité décroît d'une façon continue du bas vers le haut. On néglige donc dès l'abord l'aplatissement : on ne tient pas compte de l'inégale distribution des pressions barométriques à la surface, non plus que de la forme des surfaces isothermes de l'atmosphère qui, au lieu d'être concentriques au sphéroïde, le coupent, puisque l'isotherme de zéro, par exemple, coupe la Terre vers le cercle polaire, tandis qu'à l'équateur elle est à une hauteur d'environ 4000 mètres.

L'hypothèse admise implique la symétrie de l'atmosphère autour de la verticale d'un lieu, ce qui exclut toute déviation azimutale d'un rayon lumineux : la courbe décrite par celui-ci est donc plane et renfermée dans le vertical de l'astre. On admet aussi que l'indice de réfraction va croissant depuis la limite de l'atmosphère jusqu'au sol; à chaque passage d'une couche dans une autre le rayon serait donc rapproché de la normale : il décrirait ainsi une courbe sans inflexions, dont la concavité serait tournée vers la Terre, l'angle de contingence représentant ce que nous avons appelé la réfraction.

Disons tout de suite qu'en réalité aucun de ces postulats n'est rigoureusement vrai.

La réfraction azimutale à l'horizon est la principale cause d'erreur des mesures géodésiques : les températures, au lieu de décroître d'une façon continue quand on s'élève dans l'atmosphère, sont sujettes à des variations oscillatoires le long d'une même verticale, et l'hypothèse des couches n'est qu'une grossière approximation.

Soit r le rayon d'une couche quelconque infiniment mince. Soit g (*fig.* 8) le point où le faisceau lumineux arrive à l'atmosphère, ab, bc deux éléments consécutifs de sa trajectoire : soient l et $l + dl$ les indices de réfraction correspondants. Rapportons la courbe à des coordonnées polaires ayant pour origine le centre O de la Terre,

et pour axe la verticale du point M. Soit $abO = \zeta'$, $bcO = \zeta' + d\zeta'$.

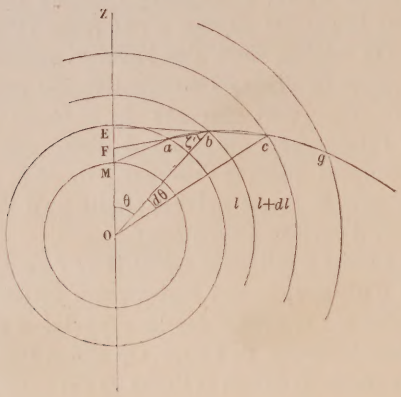
La loi de Descartes nous donne

$$\frac{\sin EbO}{\sin \zeta'} = \frac{l + dl}{l}.$$

Or on a

$$EbO = \zeta' + d\zeta' + d\theta ;$$

Fig. 8.



donc

$$\frac{\sin(\zeta' + d\zeta' + d\theta)}{\sin \zeta'} = \frac{l + dl}{l}$$

ou

$$\frac{\sin \zeta' \cos(d\zeta' + d\theta) - \cos \zeta' \sin(d\zeta' + d\theta)}{\sin \zeta'} = 1 + \frac{dl}{l}.$$

Remplaçant $\cos(d\zeta' + d\theta)$ par l'unité, $\sin(d\zeta' + d\theta)$ par l'arc $d\zeta' + d\theta$,

$$-\frac{\cos \zeta'}{\sin \zeta'}(d\zeta' + d\theta) = \frac{dl}{l} \qquad (44)$$

ou encore

$$-\frac{\cos \zeta'}{\sin \zeta'} d\zeta' - \frac{d\theta}{\operatorname{tang} \zeta'} = \frac{dl}{l};$$

on a d'ailleurs par la formule connue des tangentes aux courbes

rapportées à des coordonnées polaires

$$\operatorname{tang}\zeta' = r\frac{d\theta}{dr}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{\operatorname{tang}\zeta'} = \frac{dr}{r},$$

ce qui donne par substitution dans la relation précédente

$$-\frac{\cos\zeta'}{\sin\zeta'}d\zeta' - \frac{dr}{r} = \frac{dl}{l},$$

et en intégrant

$$-\operatorname{Log}\sin\zeta' - \operatorname{Log} r = \operatorname{Log} l + \text{const},$$

ce qui équivaut à

$$rl\sin\zeta' = \text{const}.$$

Considérons maintenant l'angle $b\,\mathrm{F}\,\mathrm{Z}$ formé par la tangente à la trajectoire du rayon lumineux avec la verticale du lieu d'arrivée de ce rayon : il est égal à $\theta + \zeta'$. Si on passe d'un élément à l'élément voisin, la variation différentielle de cet angle représentée par

$$dz = d\theta + d\zeta'$$

est précisément l'angle de contingence. Si donc on remplace $d\theta$ par sa valeur $\frac{dr}{r}\operatorname{tang}\zeta'$

$$dz = d\zeta' + \frac{dr}{r}\operatorname{tang}\zeta'. \tag{45}$$

Nous avons trouvé la valeur de $rl\sin\zeta'$; affectant l'indice 1 aux éléments relatifs au point M, cette valeur peut s'écrire

$$rl\sin\zeta' = r_1 l_1 \sin\zeta'_1. \tag{46}$$

Tirons de (44) la valeur de $\frac{dr}{r}$ et substituons dans (45)

$$dz = -\frac{dl}{l}\operatorname{tang}\zeta'$$

et remplaçant enfin la tangente par sa valeur en fonction du sinus tirée de (46)

$$dz = -\frac{dl}{l}\,\frac{\frac{r_1 l_1}{rl}\sin\zeta'_1}{\sqrt{1-\left(\frac{r_1 l_1}{rl}\sin\zeta'_1\right)^2}}.$$

Cette équation intégrée entre les deux valeurs de l qui se rapportent à la limite de l'atmosphère, c'est-à-dire 1, et au point M, c'est-à-dire l, donnera l'angle de contingence z de la courbe ou la réfraction : ζ' sera la distance zénithale apparente. Mais pour effectuer cette intégration il faut éliminer la variable r; il faut donc connaître la relation qui lie r à l, c'est-à-dire l'indice de réfraction d'une couche à sa distance au centre de la Terre.

Malheureusement la loi de la variation de densité des couches aériennes en fonction de leur altitude est mal connue, ou pour mieux dire, elle n'est pas toujours et partout la même. Elle se lie à la loi de la distribution des températures sur la verticale, et il y a lieu de penser qu'elle n'est pas la même sous toutes les latitudes. On sait d'ailleurs que fréquemment la température va d'abord en s'élevant à partir du sol pour décroître ensuite. Tout ce que l'on peut donc faire c'est de chercher une hypothèse qui rende le mieux compte de la moyenne des faits observés. Le critérium à appliquer à ces hypothèses est de les comparer avec l'observation, et la théorie devient empirique.

Parmi ces hypothèses nous nous contenterons de citer les principales, et nous comparerons les résultats qu'on en tire pour la réfraction horizontale à 0° de température et 760^{mm} de pression avec le nombre $37'31''$ qu'Argelander a tiré de l'observation.

Cassini supposait la densité constante :

Réfraction à l'horizon. . . . . 20′.

Newton admet que la température est constante, ce qui, combiné avec la loi de Mariotte, conduit à considérer la pression comme décroissant en progression géométrique quand l'altitude croît en progression arithmétique :

Réfraction à l'horizon. . . . . $39'54''$.

Bouguer admet une loi de la forme

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m,$$

m étant à déterminer par l'observation : cela revient à admettre que les densités décroissent en progression arithmétique :

Réfraction à l'horizon. . . . . $30'24''$.

Laplace s'est proposé de satisfaire à la condition que le décroissement de la température avec l'altitude soit de 1° par 173 mètres, comme cela résulte de l'ascension aérostatique de Gay-Lussac :

Réfraction à l'horizon. . . . . 35′7″.

Bessel suppose que le binôme de dilatation $1 + \alpha t$ relatif à l'air, qui intervient dans le calcul de la densité, et par suite l'indice de réfraction, peut s'exprimer par une exponentielle de la forme $e^{-\frac{as}{h}}$ dans laquelle $s = \frac{r - r_1}{r}$, et h est une constante qui se détermine par la condition de satisfaire aux réfractions observées. Mais en opérant ainsi on ne trouve plus d'accord entre la théorie et la loi de décroissance des températures.

Ivory met également $1 + \alpha t$ sous la forme d'une exponentielle, mais en s'imposant, avec Laplace, de satisfaire à la loi admise de décroissance des températures :

Réfraction à l'horizon. . . . . 36′39″.

Enfin citons encore le travail de M. Liais qui s'est efforcé de trouver une formule indépendante de la loi de décroissance des densités et dont il a déterminé les coefficients par l'observation. Le résultat obtenu dans les pays tropicaux diffère de celui d'Argelander.

Delambre a remarqué que toutes les formules de la réfraction peuvent se développer en série convergente de la forme

$$z = a \operatorname{tang} \zeta' + b \operatorname{tang}^3 \zeta' + c \operatorname{tang}^5 \zeta' + \dots$$

dont les coefficients peuvent être déterminés par l'observation. Mais il est clair qu'à l'horizon cette formule n'a plus de sens.

Ce qui reste certain, c'est que pour les distances zénithales inférieures à 70° toutes les formules donnent des résultats à peu près concordants. Cela tient à la petitesse moyenne des réfractions dans cette zône ; mais il ne faudrait pas en induire que, même dans ces limites, l'observation est toujours conforme à la théorie : on a constaté avec certitude des anomalies fréquentes, qui s'expliquent par les considérations antérieurement présentées sur le manque de symétrie des couches et sur la fréquente inversion des températures.

La concordance des formules entre 0° et 70° de distance zénithale, rapprochée de la grandeur des anomalies révélées par l'observation prouve qu'on ne peut tirer de l'étude des réfractions astronomiques aucune conclusion *générale* relativement à l'état de l'atmosphère, puisque n'importe quelle loi donne les réfractions pour les grandes hauteurs, et que pour les petites hauteurs l'irrégularité des résultats de l'observation est telle qu'aucune formule ne la représente avec l'approximation requise. Il y aurait par contre à tirer parti des anomalies constatées pour y chercher des conclusions relatives à l'état actuel de l'atmosphère, et l'Astronomie, au lieu d'emprunter des données à la Météorologie, serait ainsi amenée à lui en fournir. On sera peut-être conduit quelque jour à ajouter à l'observation suivie du baromètre et du thermomètre, l'étude régulière des réfractions aux divers azimuts de l'horizon.

La *Connaissance des Temps* renferme une Table des réfractions, calculée par M. Caillet, d'après les formules de Laplace. Pour les distances zénithales inférieures à 74° on emploie la formule

$$z = 60'',567 \tan\zeta_1' - 0'',067 \tan^3\zeta_1'.$$

Pour les distances zénithales plus grandes que 74° on a recours à la formule suivante, dans laquelle $T = 25,962 \cos\zeta'$,

$$z = 2790'',157\,(0,75479 - 0,49042\,T^2)\sin\zeta_1' \frac{2}{\sqrt{\pi}} E^{-T^2}\int_T^\infty E^{-t^2}dt + 10021'',34 \sin 2\zeta_1'.$$

L'intégrale définie du second membre se calcule par la série

$$\int_T^\infty E^{-t^2}dt = \frac{E^{-T^2}}{2T}\left[1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{(2T^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2T^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2T^2)^4} + \dots\right]$$

qui, bien que divergente, jouit de cette propriété que son reste est toujours plus petit que le terme immédiatement précédent, et qui peut servir, par conséquent, pour certaines valeurs de T, au calcul numérique de l'intégrale, en s'arrêtant au moment où les termes commencent à croître; le dernier terme calculé fournit la limite de l'approximation obtenue.

Ces formules donnent la réfraction pour une température de 0°

et une hauteur barométrique de $0^m,760$. Les Tables de réfractions moyennes de la *Connaissance des Temps* sont calculées pour la température de $+10°$ et la pression de $0^m,760$.

Les constantes de la formule sont des fonctions de la température et de la pression. La *Connaissance des Temps* donne la Table II, où l'on trouve les facteurs par lesquels il faut multiplier la réfraction moyenne pour avoir celle qui correspond aux circonstances météorologiques de l'observation. Il paraît inutile de transcrire ici les formules d'après lesquelles cette Table est calculée.

A l'étranger et dans les observatoires on se sert des Tables de Bessel : mais l'usage en est moins simple que celui des Tables de M. Caillet. Bessel met la réfraction sous la forme

$$\delta\zeta = a \operatorname{tang}\zeta' \gamma^{1+p} (\mathrm{B\,T})^{1+q}$$

dans laquelle a, p, q sont des fonctions de la distance zénithale apparente ζ' dont les valeurs sont contenues dans une première Table ayant pour argument ζ'; γ dépend de la température de l'air, B de la hauteur barométrique brute, T de la température du baromètre à mercure. Ces quantités sont également réduites en Tables.

Jusqu'à 81° de distance zénithale, les *erreurs probables* de ces Tables, conclues de l'observation, ne dépasseraient pas $1''$; elles iraient à $\pm 20''$ pour $\zeta' = 89°30'$. Mais les erreurs réellement commises peuvent être, et sont en effet beaucoup plus fortes.

Si nous avons insisté sur les imperfections de la théorie des réfractions ce n'est pas pour critiquer des travaux très savants et d'ordre élevé. Nous tenons à faire pénétrer dans l'esprit du lecteur la conviction que la réfraction est une source d'erreurs sérieuses et qu'il faut, par conséquent, être toujours en éveil à son endroit. Comme conclusion pratique, nous dirons ceci :

On ne doit jamais observer à plus de 70° ou 80° du zénith, si l'on veut pouvoir compter sur les résultats.

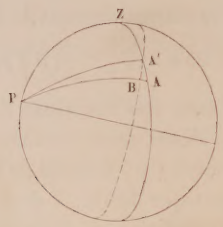
Il est nécessaire de tenir toujours compte des corrections barométriques et surtout thermométriques.

Il est surtout nécessaire de disposer ses observations de manière à éliminer le plus possible des résultats les effets de la réfraction, en observant à des azimuts très variés, et contrôlant les observations faites à l'Ouest par celles faites à l'Est, combinant les observations au Nord avec celles faites au Sud.

31. — Effet de la réfraction sur les coordonnées et les dimensions apparentes des astres.

La réfraction élève les astres dans leur vertical. Elle s'ajoute à la hauteur vraie, ou se retranche de la distance zénithale : l'azimut n'est pas altéré. Pour calculer la réfraction en distance polaire et en ascension droite, soit A (*fig.* 9) la position réelle de l'astre, A′

Fig. 9.



sa position apparente, A′B l'arc de parallèle céleste compris entre les cercles de déclinaison vrai et apparent.

En raison de la petitesse de l'arc AA′ qui est la réfraction z, on peut assimiler le triangle ABA′ à un triangle rectiligne rectangle en B : l'angle en A est l'angle de position ϖ ; AB est la correction de la distance polaire δ, AA′ la correction de l'ascension droite α ; et si $\alpha'\delta'$ sont les positions apparentes, on a

$$\alpha' = \alpha + z \sin \varpi,$$
$$\delta' = \delta - z \cos \varpi.$$

Le signe de cos ϖ détermine celui de cette dernière correction. On pourrait donner un signe à sin ϖ : il est plus simple de se rappeler, en faisant la figure, que la correction d'α est + dans l'Ouest du méridien, — dans l'Est.

Cette formule suffit généralement : quand les valeurs de la réfraction sont grandes, on a vu qu'elles sont incertaines et que la correction ne comporte que peu de précision.

La réfraction altère aussi le diamètre apparent des astres.

Soit Δ le demi-diamètre apparent. La réfraction élève plus le bord inférieur que le bord supérieur : si la figure primitive est circulaire, elle sera donc aplatie dans le sens vertical. Comme le demi-diamètre n'excède jamais 16′, il s'en suit que l'accroissement de la réfraction du bord supérieur au centre est sensiblement le même que du centre au bord inférieur, et que la figure résultante peut être considérée comme une ellipse dont le demi-diamètre non altéré est le grand axe horizontal : les ordonnées verticales du cercle sont en effet réduites dans un rapport constant par la différence de réfraction qui leur est proportionnelle. Soient donc r la réfraction du centre, r' celle du bord inférieur; en posant $\frac{r' - r}{\Delta} = a$ on a la formule

$$\rho = \Delta (1 - a \cos^2 \lambda),$$

λ étant ici l'angle que fait avec la verticale la rayon ρ que l'on considère, et le demi-diamètre accourci sera

$$\Delta - (r' - r) \cos^2 \lambda.$$

32. — Dépression de l'horizon.

On a vu (§ 13) que l'horizon apparent est l'intersection de la sphère céleste par un cône ayant pour sommet l'œil de l'observateur, et tangent à la surface terrestre. L'angle au sommet de ce cône est moindre que 90°, son complément à 90° est la *dépression vraie* de l'horizon. En considérant la Terre comme sphérique, ce cône sera à base circulaire et aura pour axe la verticale. Les circonstances dans lesquelles on est amené à considérer la dépression sont telles qu'il n'est pas nécessaire d'avoir égard à l'aplatissement. L'approximation à laquelle on s'arrête ainsi est suffisante dans la pratique, parce que l'horizon, à une très grande hauteur, cesserait d'être net et distinct. Si l'on voulait pousser l'approximation plus loin, la dépression ne serait plus la même dans le sens du méridien et dans le sens perpendiculaire, à cause de la différence des courbures; elle serait fonction de l'azimut aussi bien que de la latitude. M. Faye a fait voir qu'au sommet du Pic de Ténériffe (3780 mètres) la différence entre les deux dépressions

atteint 20″; si donc l'horizon était observable à de pareilles altitudes, et si on pouvait compter sur l'égalité des réfractions dans tous les sens, les observations faites en un seul point de hauteur bien connue permettraient de calculer l'aplatissement.

Par l'effet de la réfraction le rayon lumineux issu de l'horizon et arrivant à l'œil chemine en ligne courbe : l'angle de contingence de cette courbe est la correction qu'il faut retrancher de la dépression vraie pour obtenir la dépression apparente. Il n'y a lieu de calculer la dépression que pour l'horizon de la mer. On voit facilement que la dépression vraie est égale à l'angle que font au centre de la Terre deux verticales : celle de l'observateur, et celle du point de contact de la tangente menée par l'œil de l'observateur au point de l'horizon considéré.

Si donc nous désignons par h la hauteur de l'œil au-dessus du niveau de la mer, par R le rayon terrestre, par C la dépression vraie, le triangle rectangle qui a pour sommets l'œil, le centre de la Terre et le point de contact de la tangente susdite, nous donnera la relation

$$(R + h)\cos C = R,$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\frac{h}{R}$ est très petit, que par suite C l'est aussi, et que le produit de ces quantités est négligeable

$$2\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

ou, si l'on veut avoir C en secondes d'arc,

$$C = \frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Dans la théorie de la réfraction géodésique, on admet que la trajectoire courbe d'un rayon lumineux entre deux points terrestres est telle que les tangentes à ses extrémités sont également inclinées sur la corde qui joint ces extrémités. On admet de plus que l'angle de ces deux tangentes, ou la réfraction totale, est proportionnel à l'angle au centre, c'est-à-dire à la dépression vraie. Rien ne prouve que ces hypothèses soient parfaitement rigoureuses : quand la différence d'altitude des deux points est grande, les circonstances de

température et de pression, d'où dépend la réfraction, sont très différentes aux deux extrémités de la corde. C'est ce qui explique comment en Géodésie, même en opérant par distances zénithales réciproques et simultanées, on arrive à un degré de précision beaucoup moindre qu'avec le nivellement topographique direct.

Pour le cas particulier qui nous occupe, cette hypothèse est suffisamment exacte; il est d'ailleurs évident qu'en tout état de cause cette trajectoire est tangente à l'horizon de la mer. Il est aisé, d'après cela, de calculer la dépression apparente.

Par hypothèse la dépression est

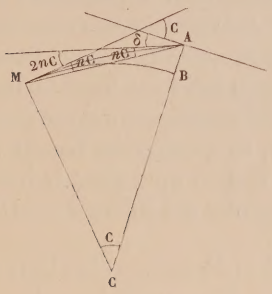
$$\delta = C - 2nC = C(1 - 2n),$$

n étant un coefficient à déterminer par la théorie de la réfraction ou, mieux, par l'expérience.

Le triangle MCA (*fig.* 10) donne, en posant $MA = x$, $AB = h$,

$$(R + h)^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \sin nC$$

Fig. 10.



ou

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2 - 2\frac{x}{R}\sin nC$$

et aussi, par la règle des sinus,

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin C}{\cos(\delta + nC)} = \frac{\sin C}{\cos(C - nC)},$$

Remplaçant par cette valeur, développant les lignes trigono-

métriques et négligeant les termes du troisième ordre, on a

$$\frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2} = C^2(1-2n)[1 + C^2(1-n)^2];$$

multiplions par $1-2n$, observons que $C(1-2n) = \delta$ et que $\frac{h}{R}$ est de l'ordre de C^2, $\frac{h^2}{R^2}$ de l'ordre de C^4, que nous négligeons, de même que le produit de $C^2(1-2n)$ par le deuxième terme de la parenthèse, il vient

$$\delta = \frac{1}{\sin 1''}\sqrt{(1-2n)\frac{2h}{R}}.$$

Pour les plus hautes montagnes $\frac{h}{R}$ ne dépasse guère $\frac{1}{1000}$ et l'erreur relative résultant de la suppression de $\frac{h^2}{R^2}$ n'est que de $\frac{1}{4000}$. Les incertitudes de la réfraction géodésique et le fait même de s'en tenir à l'hypothèse de la Terre sphérique introduisent des erreurs au moins égales.

On a donné des valeurs diverses de ce coefficient n.

On a longtemps admis pour la Géodésie $n = 0{,}08$, d'après Biot et Arago. En partant de la théorie de la réfraction astronomique, on trouverait avec M. Faye 0,067. Le colonel Everest a tiré $n = 0{,}055$ de mesures géodésiques faites aux Indes. L'ingénieur hydrographe Monnier a trouvé que le coefficient qui convient à la Martinique est à peu près le même, $n = 0{,}054$. Au Caucase, Struve donne 0,09 pour le pied de la chaîne, 0,07 pour le haut. Ces discordances doivent être dues en partie aux différences de température, dont on ne tient pas compte.

Il résulte de là que la dépression n'est jamais connue qu'approximativement. Il serait bon, quand on recherche le maximum de précision, de la déterminer empiriquement dans chaque cas particulier. Un instrument à réflexion pouvant mesurer des angles voisins de 180° peut servir de dépressiomètre. (Cercle avec miroir additionnel de Daussy, cercle à prisme de Pistor). Mais l'expérience même ne donne pas toujours des valeurs suffisamment concordantes. Il faut d'ailleurs supposer alors que la dépression est la même dans toute l'étendue de l'horizon, ce qui resterait à prouver.

Ce qui est établi par l'expérience, c'est que les Tables de dépressions, calculées avec le coefficient 0, 08 donnent souvent lieu à des erreurs pouvant s'élever à 2′; M. de Tessan l'a montré par des mesures directes : nous en avons acquis nous-même la preuve en comparant des latitudes observées à l'horizon de la mer avec des latitudes exactes données par le théodolite.

Les mesures d'altitude par la dépression de l'horizon ne donneront donc en général, et *a fortiori*, qu'une approximation médiocre; cette approximation est encore moindre quand on emploie, comme cela se fait quelquefois, des dépressions assez petites pour la détermination des distances horizontales.

Lorsque la mer est agitée, le cône des rayons visuels est tangent à la surface supérieure des lames. Si donc on considère la hauteur de celles-ci comme étant la même dans toute l'étendue de l'horizon visible, et si on est parvenu à la mesurer, il faudra diminuer la hauteur de l'œil, avec laquelle on entre dans les Tables de dépression comme argument, d'une quantité égale à la moitié de l'amplitude des lames, c'est-à-dire de la distance verticale qu'il y a entre le creux et la crête.

Par mer agitée il y aurait intérêt à augmenter la hauteur de l'œil pour réduire cette erreur. Il est vrai qu'on augmenterait d'autant la difficulté d'observer, due aux mouvements du navire.

Lorsqu'il y a du mirage, on peut être exposé à des erreurs beaucoup plus fortes que celles que nous avons signalées. M. de Tessan cite des cas de dépression négative, d'où on déduirait $n = 0{,}53$ et même $n = 0, 75$ (en remplaçant dans la formule $\sqrt{1 - 2n}$ par $1 - n$). D'autres fois il a observé des dépressions exagérées qui conduiraient à des valeurs négatives — 0, 13 et — 0,08 de ce coefficient. De l'ensemble de ses observations à la mer on déduirait $n = 0, 045$. M. le lieutenant de vaisseau Perrin est arrivé récemment au même résultat. La Table des dépressions que nous donnons est calculée avec ce chiffre. Nous avons adopté, pour le rayon, le rayon de courbure moyen par 30° de latitude, parce qu'on navigue rarement au delà de 60° de latitude et que, dans ce cas là, on subit des gros temps qui enlèvent toute précision aux observations faites à l'horizon. Nous prenons donc

$$R = 6\,364\,323 \text{ mètres}, \qquad \log R = 6,80396.$$

Nous n'avons pas à parler ici d'une manière plus détaillée de la réfraction géodésique. Il n'est pourtant pas sans intérêt de donner la formule à l'aide de laquelle on peut calculer la différence de niveau de deux points, en l'un desquels on a observé la distance zénithale de l'autre. Soit h cette différence, d la distance itinéraire en mètres, c'est-à-dire la longueur de l'arc de grand cercle, ζ la distance zénithale observée, on a

$$h = d \operatorname{cotang} \zeta + 0,42 \frac{d^2}{R}.$$

Le coefficient $0,42 = \frac{1}{2} - 0,08$ dépend du coefficient n de la réfraction géodésique. Il sera bon de lui substituer $0,44$ dans les pays chauds.

LIVRE II.

THÉORIE DES INSTRUMENTS.

CHAPITRE IV.

INSTRUMENTS DE MESURE DES ANGLES.

33. — Classification des instruments.

Tous les problèmes de Géographie mathématique se ramènent en dernière analyse à la considération du triangle de position pôle-zénith-astre, et à des transformations de coordonnées. Les instruments dont se sert l'Astronomie pratique sont destinés à la détermination des coordonnées des astres, en vue des transformations qui permettront d'en déduire les coordonnées géographiques du lieu d'observation et la direction de son méridien.

Les coordonnées uranographiques, ascension droite et distance polaire, seront toujours supposées connues exactement au moyen des éphémérides et des Catalogues d'étoiles. Leur détermination est le but spécial de l'Astronomie d'observatoire et de la Mécanique céleste : nous ne nous en occuperons pas. L'observation d'un astre comprend deux opérations : la détermination de la direction de l'astre, et le rattachement de cette direction aux plans fondamentaux du lieu d'observation, ou mesure des cordonnées.

Les coordonnées sont exprimées en angles. Nous aurons donc à examiner successivement :

1. Les instruments destinés à donner *une* direction : ce sont plutôt les *organes* d'instruments plus complets : Lunettes, niveaux, collimateurs, pinnules, etc.

2. Les instruments destinés à mesurer l'angle entre deux directions : ce sont les micromètres, les cercles divisés et les instruments complets.

Les angles peuvent s'évaluer de deux manières : on peut les *mesurer*, par exemple sur un cercle divisé, ou bien les estimer en temps. En raison de l'importance des instruments destinés à la mesure du temps, nous leur consacrerons un chapitre spécial.

34. — Lunette astronomique.

Le rôle de la lunette astronomique est double : elle sert à accroître la visibilité des objets et à déterminer une direction.

Il est toujours possible d'obtenir dans la pratique un achromatisme suffisant des images : le léger défaut d'achromatisme qui peut encore subsister dans la partie centrale du champ des lunettes ne fait pas obstacle à une bonne visée : si sur les bords du champ ce défaut augmente, on ne doit pas observer dans cette partie.

Il ne sera pas inutile de rappeler ici les principes fondamentaux d'Optique relatifs aux lunettes.

La vision d'un corps lumineux dépend de son éclat et de ses dimensions apparentes. On distingue :

L'éclat *intrinsèque*, ou la quantité de lumière I qu'envoie l'unité de surface à l'unité de distance ;

L'éclat *total à l'unité de distance*, ou la quantité de lumière E qu'envoie la surface S à l'unité de distance,

$$E = SI;$$

L'éclat *total* proprement dit, ou la quantité A de lumière qu'envoie la surface S à la distance r

$$A = \frac{E}{r^2} = \frac{SI}{r^2};$$

L'éclat *apparent*, ou la quantité de lumière P qu'envoie l'unité

de surface apparente à la distance r. Il est égal à l'éclat total divisé par la surface apparente σ. (1). Or $\sigma = \frac{S}{r^2}$, donc

$$P = \frac{A}{\sigma} = I.$$

L'éclat apparent est donc égal à l'éclat intrinsèque. C'est lui qui détermine la visibilité.

Pour l'étude de la lunette astronomique on peut s'en tenir à la formule élémentaire des lentilles, c'est-à-dire les supposer infiniment minces. On sait que, dans ce cas, il existe dans chaque lentille un point appelé *centre optique*, qui est le centre de symétrie de toutes les images.

Soient à partir du centre optique : p la distance de l'objet, p' la distance de l'image, f la distance focale principale, c'est-à-dire la distance à laquelle se forme l'image d'un point assez éloigné pour que les rayons qui en émanent puissent être considérés comme parallèles, ce qui est vrai dès que le diamètre apparent de la lentille vue de ce point peut être considéré comme insensible; la formule des lentilles est

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Ces longueurs sont comptées positivement à partir de la lentille vers le côté d'où vient la lumière.

Cette formule n'est exacte que pour les rayons qui passent par le centre optique. Ceux qui passent par des points de plus en plus distants du centre optique d'une lentille convergente forment leurs foyers à des distances décroissantes de ce centre : il en résulte ce qu'on appelle l'*aberration de sphéricité*, en vertu de laquelle l'image d'un point s'étale et prend une dimension apparente, comme le fait comprendre la *fig.* 11, qui représente la *caustique*.

De là résulte la convenance de ne faire usage que des rayons sensiblement centraux, en d'autres termes, de *diaphragmer* les lentilles.

---

(1) Cette surface apparente est proportionnelle au carré des dimensions apparentes. Dans la pratique, les *dimensions apparentes* s'évaluent par les angles sous-tendus par les images et qui ont leur sommet dans l'œil.

La *Lunette astronomique* se compose :

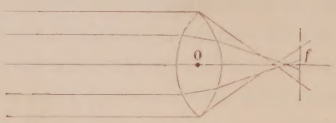
1° D'une lentille convergente à long foyer, appelée *objectif*, qui reçoit les rayons, considérés comme parallèles, émanant du corps lumineux, et forme une image réelle ;

2° D'une loupe, lentille ou système de lentilles convergent, à l'aide de laquelle l'œil regarde cette image, et qu'on appelle *oculaire*.

L'image réelle se forme dans le plan focal principal de l'objectif. Elle est renversée et grossie.

L'objectif, considéré comme corps lumineux, produit une image réelle en arrière de l'oculaire. C'est ce que l'on nomme l'*anneau oculaire*. C'est en ce point qu'il faut placer l'œil pour recevoir le

Fig. 11.



maximum de lumière. Dans ce cas l'objectif n'agit pas comme lentille, car si on l'enlève l'image réelle subsiste.

La visibilité d'un objet dépend de son éclat apparent, égal, comme on l'a vu, à l'éclat intrinsèque, et de ses dimensions apparentes, c'est-à-dire de l'angle qu'il sous-tend. Elle dépend encore de la différence entre l'intensité lumineuse de l'objet et celle du fond sur lequel il se détache, de la couleur, de la forme et des autres dimensions de l'objet. De plusieurs lignes d'égale largeur tracées sur un même fond, les plus courtes cessent d'abord d'être visibles, lors même que la longueur est plus grande que la largeur. Une raie blanche sur fond noir est plus visible qu'une raie noire de même largeur sur fond blanc : cela tient à l'irradiation.

Les conditions physiologiques dans lesquelles se trouve l'organe de la vue sont très variables. On conçoit donc qu'il soit difficile de donner des chiffres précis pour les limites de la vision distincte. On a indiqué 10″, 20″ et 30″ comme limites des grandeurs apparentes visibles à l'œil nu, en considérant des objets blancs sur fond noir. Ces limites ne se rapportent pas à la grandeur apparente géo-

métrique, mais à celle de l'image rétinienne. Les deux ne sont pas égales : l'aberration de sphéricité combinée avec l'irradiation dilate l'image d'un point lumineux. Le passage des rayons dans l'objectif donne naissance à des phénomènes de diffraction, grâce auxquels l'image d'une étoile, qui devrait être un point, est une petite surface brillante, entourée de cercles lumineux concentriques dont l'intensité va en décroissant à partir de l'objet. Ces cercles de diffraction augmentent en nombre et en éclat, à mesure qu'on diaphragme davantage l'objectif : le phénomène est peu sensible pour les objectifs à grande ouverture.

Mettant de côté les conditions variables qui précèdent, nous nous contenterons d'admettre qu'un objet est d'autant plus nettement visible, à grandeur apparente égale, qu'il a plus d'éclat intrinsèque : à éclat intrinsèque égal, qu'il a plus de grandeur apparente. Pour juger de la valeur d'une lunette il faut donc examiner séparément son grossissement et sa clarté.

Du grossissement. — Le grossissement d'une lunette astronomique est le produit du grossissement de l'oculaire par le grossissement de l'objectif.

Pour évaluer le grossissement de l'objectif, soit M la grandeur de l'image formée par l'objectif, et F la distance focale principale de celui-ci : $\frac{M}{F}$ représente sensiblement l'angle sous lequel l'image est vue de l'objectif, égal à celui sous lequel l'objet est vu à l'œil nu. Soit Δ la distance de la vision distincte, $\frac{M}{\Delta}$ sera l'angle sous lequel l'image est vue de l'œil, et on aura

$$\text{Grossissement de l'objectif. . . . . } \frac{M}{\Delta} : \frac{M}{F} = \frac{F}{\Delta} = g_o.$$

Le grossissement de l'oculaire se trouve en remarquant qu'une loupe de distance focale f a pour effet de reporter à la distance de la vision distincte l'image d'un objet placé plus près de l'œil que le foyer principal. Le centre optique de la loupe est un centre de similitude pour les deux images, donc :

$$\text{Grossissement de l'oculaire. . . . . } g_c = \frac{p'}{p},$$

p et p' étant les distances de l'objet et de l'image à la loupe.

La formule des lentilles donne dans ce cas

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{f}.$$

Si z est la distance de l'œil à la loupe, $p' = \Delta - z$. On tire de là

$$g_c = 1 + \frac{\Delta - z}{f}.$$

La puissance d'une loupe dépend de l'angle sous lequel on voit une dimension donnée, un millimètre par exemple, que l'on examine avec son aide. Si l'on prend le millimètre pour unité, l'image aura la grandeur g_c et $\frac{g_c}{\Delta}$ sera l'angle en question. Or

$$\frac{g_c}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left(1 - \frac{z}{f}\right) + \frac{1}{f}$$

et puisque f est le même pour deux vues différentes, $\frac{g_c}{\Delta}$ sera d'autant plus grand que Δ sera plus petit. Effectivement les vues myopes sont plus avantageuses pour les observations.

Le grossissement G de la lunette astronomique est d'après cela

$$G = g_b g_c = \frac{F}{\Delta}\left(1 + \frac{\Delta - z}{f}\right) = \frac{F}{f}\left(1 + \frac{f - z}{\Delta}\right).$$

Comme $f - z$ est généralement petit vis-à-vis de Δ, on peut se contenter de l'expression approchée

$$G = \frac{F}{f}$$

qui est exacte pour un œil infiniment presbyte.

La distance de l'oculaire à l'objectif est sensiblement $F + f$. D'après cela, si on désigne par Ω le rayon de l'objectif, par a le rayon de l'anneau oculaire, qui est comme on l'a vu, l'image réelle de l'objectif, formée par l'oculaire au foyer conjugué distant de p', la formule des lentilles dans laquelle on fait $p = F + f$ donne

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F + f} \qquad \text{et comme} \qquad \frac{a}{p'} = \frac{\Omega}{F + f},$$

$$\frac{\Omega}{a} = \frac{F}{f} = G,$$

donc le grossissement est mesuré par le rapport du rayon de l'objectif au rayon de l'anneau oculaire.

On mesure le grossissement à l'aide du *dynamètre de Ramsden*. On se fait facilement un dynamètre en traçant des traits régulièrement espacés sur un morceau de corne ou de papier calque : on présente cette échelle près de l'oculaire, jusqu'au moment où l'anneau oculaire s'y peint bien nettement, et on évalue alors son diamètre. On prend pour Ω le rayon du diaphragme de l'objectif.

On mesure aussi les grossissements à l'aide d'un prisme biréfringent d'angle connu. On taille pour cela deux prismes de même angle dans une même substance biréfringente : la face d'entrée du premier est parallèle à l'axe cristallographique, celle du second est perpendiculaire à cet axe. On les accole de telle manière qu'ils s'achromatisent réciproquement, et en regardant au travers on aperçoit les objets dédoublés. Pour les faire servir à la mesure du grossissement, on a tracé sur fond blanc une série de cercles noirs de rayons décroissants connus. On se place à une distance de cette mire telle qu'en regardant à l'œil nu à travers le prisme le plus grand cercle de la série, les deux images aperçues soient tangentes. Cette distance trouvée, on interpose le prisme entre l'œil et l'oculaire de la lunette à éprouver, et l'on cherche quel est celui des cercles dont les deux images se touchent. Si r est le rayon de ce cercle, R celui du cercle visé à l'œil nu, le grossissement est $\frac{R}{r}$.

35. — Champ d'une lunette. Sa clarté.

Le *champ* angulaire d'une lunette est l'angle du cône qui a pour base le diaphragme et pour sommet le centre optique de l'objectif. On peut facilement l'évaluer si l'on connaît le rayon du diaphragme.

Pour calculer l'ouverture du diaphragme, soient Ω le rayon et F la distance focale de l'objectif; ω et f les données correspondantes relatives à l'oculaire, AB le plan focal commun (on raisonne dans l'hypothèse d'un œil infiniment presbyte) (¹).

(¹) Au point de vue des approximations dont on a besoin ici, l'erreur ainsi commise est de peu d'importance, malgré ce qu'il y a d'étrange à considérer

On a

$$\overline{\Omega y} = \Omega \frac{F + f}{\Omega + \omega}, \qquad \overline{\omega y} = \omega \frac{F + f}{\Omega + \omega}$$

d'où

$$\overline{By} = \overline{\omega y} = f = \frac{\omega F - \Omega f}{\Omega + \omega},$$

on a aussi

$$\overline{AB} = \omega \frac{\overline{Ay}}{\overline{\omega y}} = \frac{\omega F - \Omega f}{F + f}.$$

Fig. 12.

Le demi-champ angulaire a pour expression

$$\frac{\overline{AB}}{F} = \frac{\frac{\omega}{f} - \frac{\Omega}{F}}{\frac{F}{f} + 1} = \frac{\frac{\omega}{f} - \frac{\Omega}{F}}{G + 1}.$$

Il résulte de là que le champ diminue quand le grossissement augmente : en pratique, avec un objectif donné, on ne peut pas dépasser certains grossissements.

La *clarté* d'une lunette est le degré d'illumination ou l'éclat intrinsèque des images qu'elle produit au fond de l'œil.

Considérons d'abord la vision à l'œil nu d'un objet de diamètre apparent donné : soit ϖ le rayon de la pupille, en prenant les notations du § 34 on voit que l'œil recevra une quantité de lumière pro-

---

comme infinie une longueur qui est en réalité de $0^m,20$ à $0^m,30$. Cela tient à la petitesse de la distance focale des oculaires habituellement employés : d'ailleurs, fît-on erreur d'un dixième sur la valeur vraie d'un grossissement, que cela n'aurait aucune importance pratique. Le grossissement est en réalité variable pour le même individu, à cause de la faculté d'adaptation variable aussi, de notre œil, qui peut voir nettement à toutes les distances comprises entre $0^m,20$ et l'infini, pourvu que la grandeur apparente et l'éclat de l'objet le rendent visible, de sorte que Δ n'est pas une constante.

portionnelle à $\frac{SI}{D^2}\varpi^2$, tandis que la quantité de lumière reçue par l'objectif est proportionnelle à $\frac{SI}{D^2}\Omega^2$, et c'est cette quantité de lumière qui, en négligeant l'absorption par les verres, se répartit dans l'anneau oculaire de rayon a. Si ce rayon est égal à celui ϖ de la pupille, le rapport des quantités de lumière reçues par l'œil appliqué à la lunette et par l'œil non armé est $\frac{\Omega^2}{a^2} = G^2$, c'est-à-dire au rapport des surfaces apparentes des deux images : l'illumination totale, G^2 fois plus forte pour la vision dans la lunette, se répartit sur une surface d'image G^2 fois plus grande et l'éclat intrinsèque reste le même.

Si l'anneau oculaire diminue et devient plus petit que l'ouverture de la pupille, l'illumination totale de l'image reste la même, mais l'image augmente d'étendue, et son éclat intrinsèque décroît proportionnellement à G^2. La clarté diminue à mesure que le grossissement augmente.

Faisons au contraire croître a ($a > \varpi$), c'est-à-dire réduisons le grossissement. La quantité totale de lumière reçue par l'œil décroît proportionnellement à a^2, mais en se répartissant sur une image dont la surface décroît elle-même proportionnellement à a^2 ; l'éclat intrinsèque de cette image ne change pas.

Il résulte de là que, pour voir des objets dont le diamètre apparent est appréciable, on ne peut pas augmenter indéfiniment le grossissement sans porter atteinte à la clarté. Lors donc qu'on doit observer des objets peu éclairés, il ne faut pas dépasser la limite du grossissement pour laquelle l'anneau oculaire est égal à la pupille. Ceci s'applique spécialement aux observations de nuit. On n'oubliera pas que dans l'obscurité l'ouverture de la pupille s'étend notablement. Dans ce cas, obligé qu'on est de se donner une certaine grandeur de l'anneau oculaire, on doit chercher à accroître le grossissement en augmentant le diamètre de l'objectif : tel est le principe des lunettes de nuit.

Ce qui est le plus délicat dans les observations de nuit faites en mer, c'est d'apercevoir bien nettement la ligne d'horizon. En vertu du principe qu'à largeur égale, une ligne est d'autant plus visible qu'elle est plus longue, on est conduit à allonger la ligne d'horizon dans la lunette en faisant croître le champ. On y arrive en aug-

mentant l'ouverture de l'objectif et réduisant la distance focale dans la mesure où ces changements ne donnent pas lieu à une trop forte aberration de sphéricité.

Les considérations qui précèdent ne s'appliquent pas aux étoiles, dont le diamètre apparent, même avec les plus forts grossissements employés, peut être considéré comme nul. Si elles paraissent avoir des dimensions sensibles dans les lunettes, cela tient, comme on l'a vu, à la diffraction et à l'aberration de sphéricité. Quel que soit le grossissement employé, l'éclat intrinsèque des étoiles n'est pas affaibli. Mais si l'on considère la portion limitée du ciel sur laquelle l'étoile se détache, elle se trouve dans le cas d'un objet de diamètre apparent sensible : pour de forts grossissements son éclat est fortement atténué; celui de l'étoile restant le même, celle-ci devient donc de plus en plus visible. C'est ainsi que le nombre des astres visibles en plein jour augmente avec la puissance des lunettes.

La meilleure manière d'éprouver une lunette est d'examiner son pouvoir séparateur sur des étoiles doubles. Ce pouvoir séparateur dépend du grossissement, de la clarté et de la faiblesse des effets de diffraction; le diamètre apparent dû à cette dernière cause croît en effet avec le grossissement de l'oculaire, puisque la diffraction, due aux diaphragmes de l'objectif, se produit dans l'image réelle formée au foyer de celui-ci.

On peut admettre qu'à clarté égale, la précision du pointé croît proportionnellement au grossissement linéaire. Celui-ci peut aller jusqu'à 200 diamètres pour les lunettes des observatoires, ce qui, dit M. Faye, répond à $0''{,}1$ pour les pointés d'étoiles.

Les lunettes des instruments portatifs peuvent atteindre à la précision de $1''$ à $2''$ pour les pointés d'étoiles. Avec les instruments géodésiques ordinaires on atteint aussi cette approximation dans le pointé des objets terrestres, moyennant quelques précautions. Ainsi, quand les points ne sont pas très brillants, il y a tout avantage, au lieu de les bissecter par un fil sombre, à les amener au milieu de l'intervalle entre deux fils rapprochés. On peut mettre ces fils à $12''$ ou $15''$ l'un de l'autre quand le grossissement de la lunette est de 45 à 50 diamètres. L'espacement, pour des grossissements moindres, doit être multiplié par le rapport inverse des grossissements. L'œil apprécie avec beaucoup de netteté la bissection d'un pareil intervalle. Il convient aussi, dans ce cas, de

tenir compte d'une remarque de M. Hatt, à savoir que lorsqu'on met au point les fils du réticule, l'œil s'adapte, pour regarder cet objet qu'il considère instinctivement comme rapproché, au minimum de distance de la vision distincte, soit $0^m,15$ environ. Au contraire, pour regarder dans la même lunette un point éloigné, au moment de la mise au point du réticule au foyer de l'objectif, l'œil juge l'objet très éloigné et s'adapte pour la vision à l'infini. De cette manière, les deux mises au point ne concordent pas, et en fixant bien l'attention sur le réticule, l'image de l'objet s'efface sensiblement.

Quand on pointe un objet un peu pâle sous le fil, celui-ci paraît bordé de chaque côté d'une bande blanchâtre, dans laquelle les contours de l'objet disparaissent, et le pointé devient incertain.

Ce sont ces difficultés qui ont conduit à substituer aux signaux naturels des signaux solaires le jour, et des signaux lumineux la nuit, pour l'exécution des travaux de triangulation d'une grande précision.

36. — Réticule et micromètre. Mise au point.

Nous venons de parler du réticule que nous avons supposé connu au moins de nom. Quand la lunette astronomique est destinée à donner une direction, le diaphragme situé au foyer de l'objectif porte une combinaison de fils très fins, un réseau ou réticule. Celui-ci se réduit généralement à deux fils croisés à angle droit, au moins dans les lunettes ordinaires des instruments portatifs.

On choisit pour cela des fils d'araignée très fins; mais on peut aussi employer des fils métalliques d'une ténuité convenable.

La droite passant par le centre optique de l'objectif et la croisée des fils est l'*axe optique* de la lunette, qui ne doit pas être confondu avec l'axe géométrique ou axe de figure, non plus qu'avec la ligne qui joint les centres optiques de l'objectif et de l'oculaire. Cette dernière peut être mobile sans inconvénient : il y a même avantage à permettre à l'oculaire un mouvement de déplacement parallèle au plan du réticule, quand celui-ci comprend un plus grand nombre de fils, afin d'arriver à une vision moins oblique pour les fils excentriques. Dans ce dernier cas, on peut considérer plusieurs axes optiques, pourvu que leurs relations de po-

sition réciproque soient bien définies. On peut déplacer l'axe optique en déplaçant le réticule dans son plan ; des vis latérales permettent ordinairement d'effectuer ce réglage. Si l'on possède un moyen de mesurer les déplacements angulaires de l'axe optique, on mesurera par là même l'angle entre les points successivement rencontrés par cet axe.

Les fils d'un réticule sont facilement sujets à avarie, il importe donc de savoir les remplacer. Voici comment on procède :

On se procurera de préférence un cocon d'araignée : sinon, on prendra les fils de la trame d'une toile d'araignée. On détache un de ces fils avec une fine pince brucelle ; on engage chacune de ses extrémités dans une boulette de cire dans laquelle on a introduit un petit grain de plomb de chasse. On extrait le diaphragme de la lunette : on y voit généralement, avec une loupe, de fines gouttières qui ont été tracées par l'artiste pour repérer le réticule. On nettoie ces gouttières et on les dégage des poussières et fragments de fil adhérents ; puis, plaçant le fil tendu par les deux bouts sur le diaphragme, on le fait glisser avec précaution jusqu'à ce qu'il soit engagé dans les gouttières, en s'aidant d'une loupe. On dépose alors à ses deux extrémités une gouttelette de colophane liquéfiée par la chaleur, ou d'un mélange de cire et de colophane. Il est prudent d'emporter en voyage de la cire, de la colophane et des fils d'araignée : ce dernier article est souvent plus difficile à trouver qu'on ne serait disposé à le croire de prime abord.

Mise au point de la lunette. — Lorsque la lunette ne porte pas de réticule, la mise au point se fait très simplement par un tirage du tube porte-oculaire, jusqu'à ce que l'image d'un point éloigné apparaisse bien nette. De jour, on peut mettre au point sur un objet terrestre éloigné d'une dizaine de kilomètres. Si l'on dispose de verres colorés pour amortir l'éclat du Soleil, on opérera avec beaucoup de précision en visant les taches de cet astre. La nuit, on visera les taches de la Lune, ou à leur défaut une étoile fixe. Dans ce dernier cas, la mise au point est obtenue au moment où la surface apparente de l'étoile est la plus petite possible. Ce procédé s'applique aux grandes lunettes astronomiques destinées à observer les occultations et les éclipses, aux longues-vues et jumelles et à la lunette de Galilée.

Lorsque la lunette porte un réticule, celui-ci est engagé dans un

tube porte-réticule, glissant dans le tube porte-objectif. L'oculaire glisse dans le tube porte-réticule. On commence par mettre l'oculaire au point, en le tirant ou le repoussant jusqu'à ce que les fils soient bien nettement visibles. On dirige alors la lunette sur un objet éloigné bien net, terrestre ou céleste, et on fait mouvoir le tube porte-réticule sans toucher à l'oculaire, jusqu'à voir bien clairement l'image de cet objet. Si l'opération a été bien faite, on doit alors distinguer avec la même facilité les images de l'objet et des fils, et le plan du réticule coïncidera avec le plan focal principal de l'objectif. Mais, d'après l'observation citée plus haut, il peut arriver que les mises au point des fils et de l'objet éloigné soient faites avec des adaptations différentes de l'œil, et qu'ainsi les deux images n'aient pas la même netteté. Il est donc nécessaire de vérifier la mise au point. Pour cela, après avoir superposé un des fils à un des points de l'image, on déplace l'œil devant l'oculaire dans le sens perpendiculaire à ce fil : si la mise au point est bonne, la coïncidence des images doit persister; sinon, elles se déplacent l'une par rapport à l'autre, et l'on dit qu'il y a *parallaxe des fils*, parce que ceux-ci ne sont plus dans le plan de l'image focale.

Le sens du déplacement indique le sens du défaut de mise au point. Par exemple, après avoir bissecté l'image d'une tour par le fil vertical, si en portant l'œil vers la droite, l'image de la tour se transporte aussi vers la droite, par rapport au fil considéré comme fixe, l'image est entre le réticule et l'objectif, et on enfoncera le tube porte-réticule jusqu'à ce que la coïncidence persiste nonobstant le mouvement de l'œil.

Si, à la suite de ce déplacement, les images ont perdu de leur netteté, on la leur rendra en touchant légèrement à l'oculaire, ce qui ne rétablit pas la parallaxe des fils. Avec un peu d'habitude, on arrive à faire ces opérations d'instinct et sans raisonner.

Le réticule doit donc être placé dans le plan focal principal de l'objectif, c'est-à-dire à une distance constante de celui-ci. Une longueur donnée dans le plan focal, vue du centre optique de l'objectif sous-tend ainsi un angle constant. Si donc nous concevons deux fils parallèles, deux fils verticaux, par exemple, et qu'après avoir pointé un objet sous l'un d'eux, nous l'amenions sous le second par un mouvement horizontal de la lunette, celle-ci aura

tourné d'un angle égal à celui que font les plans passant par les fils et le centre optique de l'objectif. Si deux objets sont pointés simultanément par les deux fils, leur distance angulaire horizontale est mesurée par cet angle supposé connu, aussi bien qu'elle serait mesurée par la rotation de la lunette bissectant successivement les deux objets par le même fil. Ceci fait voir comment une disposition convenable du réticule permet de mesurer de petits angles, et c'est la raison qui lui a fait donner le nom de *micromètre*.

La construction de la *lunette stadia* est basée sur ce principe. Supposons une lunette munie de deux fils parallèles : on a ainsi un angle constant dans le champ. Si l'on regarde avec cette lunette une mire divisée, le nombre des divisions comprises entre les deux fils varie sensiblement en raison inverse de la distance de la mire à l'objectif. Si les deux fils sont espacés de telle manière qu'à une distance de 100 mètres, ils comprennent une longueur d'un mètre, le nombre de centimètres lus entre les deux fils donnera en mètres la distance à laquelle on se trouve de la règle.

On peut aussi avoir un réticule de plusieurs fils parallèles, tendus à des distances croissantes les uns des autres, et apprécier la distance d'un objet de grandeur connue par les numéros des fils entre lesquels son image est comprise. Si le contact n'a pas lieu exactement entre deux fils placés perpendiculairement à la dimension de l'objet, il peut se produire en faisant tourner la lunette autour de son axe, et évaluant l'inclinaison des fils au moment du contact. Il serait aisé de donner des formules pour ces divers cas : nous devons nous borner à cette indication du principe.

Au lieu de deux fils, on peut n'en avoir qu'un seul, mobile à l'aide d'une vis micrométrique : le déplacement linéaire de ce fil, évalué en nombre de tours et fractions de tours de la vis, donne une mesure angulaire. C'est le principe du *micromètre à fil mobile*.

Le micromètre à fil mobile devrait être classé parmi les instruments complets plutôt que parmi les organes d'instruments ; mais comme il fait souvent partie intégrante des lunettes et des microscopes, il convient d'en parler ici. Il se compose essentiellement d'un fil ou d'une paire de fils, tendus sur un chariot qu'une vis micrométrique fait mouvoir. La vis pénètre dans un écrou fixé au corps de la lunette et pousse le chariot. Pour permettre le

mouvement de celui-ci dans les deux sens, on pourrait s'arranger de manière à en faire l'écrou même de la vis : mais, pour éviter les *temps perdus*, il est préférable de faire buter la vis contre le chariot et d'actionner celui-ci par un ressort antagoniste, qui le maintient constamment au contact de l'extrémité de la vis.

La vis est indispensable pour produire de très petits mouvements : sa précision est d'autant plus grande que son pas est moindre.

Elle porte un tambour divisé qui tourne avec elle, et dont les déplacements angulaires sont repérés à un index fixé à la lunette. Il est facile de comprendre sans autre explication comment on peut mesurer un déplacement par le nombre de tours et de fractions de tour nécessaires pour le produire.

Le tambour divisé est mobile à frottement autour de la vis, afin de permettre de faire correspondre la division zéro à une position donnée du fil.

Quand on se sert de ce micromètre il n'y a plus, à proprement parler, d'axe optique, ou plutôt celui-ci est mobile et passe à chaque instant par le centre optique de l'objectif et le point considéré du fil mobile, et ce sont ses déplacements angulaires qui mesurent les petits angles auxquels on applique ce mode d'observation. C'est dans ce cas surtout qu'il est avantageux que l'oculaire soit mobile parallèlement au plan du micromètre, pour éviter d'observer dans une position autre que la position normale.

Dans le mode ordinaire d'emploi de la lunette astronomique, l'œil perçoit les images virtuelles du réticule et de l'objet visé. Si l'on tire davantage l'oculaire, on obtient en arrière de lui une image réelle, que l'on peut projeter sur un écran et observer à l'œil nu ou armé d'une loupe. Ce procédé est souvent utile pour l'observation du Soleil. Il permet à plusieurs personnes d'observer simultanément à la même lunette, et peut avoir ainsi son utilité pour la détermination des équations personnelles.

La bonne mise au point n'intéresse pas seulement la netteté de la vision. La lunette astronomique ne peut servir comme micromètre qu'à condition que le rapport de grandeur entre l'objet et son image soit constant. Une mise au point défectueuse dilate le diamètre apparent des astres et produit une erreur sur le pointé au bord : dans les observations de Lune en particulier, il peut en

résulter des erreurs notables sur la longitude. On ne saurait trop recommander l'usage d'un collier adapté à l'oculaire et destiné à permettre à celui-ci de tourner autour de son axe, en lui interdisant le mouvement de tirage à partir du moment où, la mise au point étant jugée bonne, on a serré ce collier.

Nous ne croyons pas utile de décrire ici les autres genres de réticules, micromètre circulaire, micromètre rhomboïdal, etc. On remarquera seulement que le champ même de la lunette pourra servir de micromètre, et le temps, par exemple, que met un astre à parcourir une corde de ce champ est fonction de la longueur de cette corde, et par suite, de sa distance au centre : on conçoit donc comment cette observation peut servir à comparer entre elles les distances auxquelles deux astres différents passent de ce centre.

37. — Autres instruments d'Optique.

Nous n'insisterons pas davantage sur les autres genres de lunettes. Bornons-nous à rappeler que la *longue-vue* est une lunette terrestre dont l'objectif est en tout semblable à celui d'une lunette astronomique. L'image réelle formée au foyer de cet objectif est renversée : on la redresse au moyen d'une combinaison de deux lentilles éloignées l'une de l'autre de la somme de leurs distances focales principales. La première lentille est disposée de telle sorte que l'image réelle formée par l'objectif soit à son foyer principal : elle envoie ainsi à la deuxième lentille un faisceau de rayons parallèles, et au foyer principal de cette deuxième lentille on retrouve l'image réelle redressée, que l'on regarde au moyen d'un oculaire à un ou deux verres, comme celui de la lunette astronomique; ce dernier peut être positif ou négatif. On voit que le redressement des images ne s'obtient que grâce à une augmentation de longueur de la lunette.

La *lunette de Galilée* comprend un objectif et un oculaire divergent, qui intercepte les rayons issus de l'objectif avant qu'ils aient formé une image réelle et produit une image virtuelle redressée. Par suite, elle ne comporte pas de réticule. La distance de l'objectif à l'oculaire est $F - f$ et le grossissement $\frac{F}{f}$. On tire l'oculaire pour les vues presbytes, on l'enfonce pour les vues myopes.

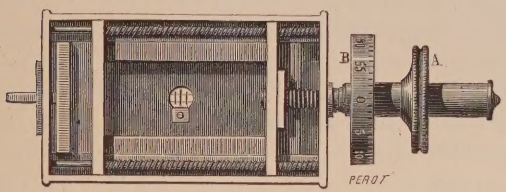
Les *jumelles* ont des oculaires négatifs de Dollond qui redressent les images. La vision binoculaire est très avantageuse au point de vue de la clarté : c'est ce qui a engagé M. de Magnac à adapter une jumelle à son sextant de nuit.

Le *microscope* est analogue à la lunette astronomique. L'objectif est à court foyer : l'image réelle de l'objet est regardée à l'aide d'une loupe simple ou composée. Un diaphragme est placé dans le plan focal où se forme l'image réelle.

Dans les microscopes dont se servent les naturalistes, le porte-objet est mobile, ainsi que l'oculaire : la mobilité du porte-objet permet de produire l'image réelle dans le plan fixe du diaphragme, et on arrive à régler la position de l'oculaire pour les diverses vues en le tirant.

Les microscopes adaptés aux instruments astronomiques sont

Fig. 13.



destinés en général à mesurer les angles sur les cercles divisés. Ici le porte-objet n'est plus mobile : c'est le microscope lui-même qu'on rapproche ou qu'on éloigne du limbe sur lequel est gravée la graduation.

Dans le plan focal se trouve un micromètre. On peut prendre pour cela une plaque de verre portant des divisions également espacées, d'une valeur angulaire donnée : cette disposition est quelquefois employée pour les microscopes des boussoles de déclinaison : elle permet d'évaluer à vue l'amplitude des excursions de l'aiguille. D'autres fois on emploie un micromètre à fil mobile. Il n'y a pas à revenir sur ce qui a été dit de la valeur angulaire des divisions à propos de la lunette astronomique : la théorie des deux instruments est la même.

La seule différence se trouve dans l'opération de la mise au

point. On commence encore par l'oculaire. Une fois qu'on a obtenu une image nette du micromètre, comme celui-ci est par construction à une distance invariable de l'objectif, on met au point sur les divisions du limbe par un mouvement de tirage du microscope entier. On vérifie ensuite par l'observation de la parallaxe des fils.

La bonne mise au point est encore plus nécessaire pour le microscope que pour la lunette. En dehors de l'inconvénient, commun aux deux, d'une parallaxe des fils résultant d'une mise au point défectueuse, le microscope présente cet inconvénient spécial que la grandeur absolue de l'image réelle, c'est-à-dire la valeur angulaire d'une grandeur donnée, varie rapidement avec la distance de l'objectif à l'objet. Une fois qu'on a déterminé la valeur des divisions, il ne faut plus changer la mise au point de l'objectif, sous peine d'avoir à procéder à une nouvelle détermination de cette valeur angulaire.

Micromètre à double image. — La lunette de Rochon est une lunette astronomique dans laquelle un prisme biréfringent, ayant ses faces normales à l'axe optique de la lunette, peut se mouvoir entre l'objectif et l'oculaire. La moitié du prisme tournée vers l'objectif est taillée dans un cristal biréfringent, de façon que la face d'entrée des rayons soit normale à l'axe cristallographique. Le rayon passe sans se dédoubler et tombe sur la deuxième moitié, dont l'arête réfringente est parallèle à l'axe cristallographique et qui le dédouble : l'angle de bifurcation d est constant pour un prisme donné, et fonction de l'angle du prisme. On obtient ainsi dans le plan focal principal deux images du même objet : on amène ces images au contact par le déplacement longitudinal du prisme, qui se mesure le long d'une graduation tracée sur le tube de la lunette.

Soit I la grandeur de l'image réelle, d la distance du prisme au plan focal, les deux images étant en contact, on a

$$I = d \operatorname{tang} \delta$$

et comme $\frac{I}{F}$ représente la grandeur apparente de l'objet et que $\frac{\operatorname{tang} \delta}{F}$ est une constante spécifique de l'instrument, on voit que I

est proportionnel à d. L'instrument une fois étalonné sur des angles connus, on voit qu'il peut servir à mesurer des angles dans les limites de son champ.

On obtient le même résultat, c'est-à-dire le dédoublement d'une image, en employant une lunette dont l'objectif est scié en deux, suivant un plan méridien de sa surface. Les deux moitiés sont mobiles parallèlement au plan de séparation. Chacune d'elles fonctionne comme un objectif complet et forme une image réelle de l'objet visé. Leurs déplacements relatifs s'opèrent à l'aide d'une vis micrométrique simple ou double, dont les rotations sont mesurées au moyen d'un tambour divisé; on peut aussi noter les déplacements relatifs sur une échelle linéaire avec un vernier. L'instrument s'étalonne et se vérifie comme la lunette de Rochon par la mesure d'un angle connu d'avance avec précision, et son emploi est le même : on établit le contact des images de deux points par le déplacement des portions d'objectif. L'idée première de ce micromètre est due à Dollond, qui l'appliqua à l'héliomètre. La marine française emploie beaucoup le micromètre dit de Lugeol, avec cadran Lorieux : c'est une vraie longue-vue donnant les images droites; les déplacements sont évalués à la vis micrométrique. On peut mesurer des angles jusqu'à 1°40′ avec une approximation de moins de 5″.

38. — Principe de la collimation. (1).

Un point supposé éclairé, placé dans le plan focal d'un objectif, envoie à cet objectif des rayons qui en ressortent parallèles entre eux et à la direction qui joint ce point au centre optique. Ces rayons peuvent être reçus sur l'objectif d'une autre lunette, et se comportent alors relativement à celle-ci comme s'ils émanaient d'un objet infiniment éloigné. Si donc on pointe avec une lunette la

(1) Le mot de *collimation* a plusieurs significations en Astronomie : nous verrons ultérieurement les erreurs de collimation de la lunette méridienne et du sextant. Le sens général commun est celui de la détermination d'une direction dans un instrument. Il n'y a pas grand inconvénient à employer ce mot dans différentes acceptions qui ne prêtent pas à confusion, pourvu qu'on spécifie chaque fois quelle est celle dont il s'agit; mais il est important que le lecteur soit prévenu de cette circonstance dès le début.

croisée des fils d'une autre lunette éclairée par son oculaire, les directions des deux axes optiques seront parallèles. On remarquera qu'un léger déplacement latéral d'une des lunettes n'a pas d'influence, aussi longtemps du moins que l'image reste visible : le parallélisme des axes subsiste, on peut donc en toute rigueur considérer ce pointé comme un pointé à l'infini. Une lunette ainsi disposée est appelée un *collimateur*. Afin de mieux assurer la direction, il est important que le réticule du collimateur soit suffisamment éloigné de son objectif : il n'y a aucun inconvénient à allonger sa distance focale principale, dans la mesure de l'espace dont on dispose, puisqu'il n'est souvent pas nécessaire que le réticule et l'objectif soient reliés entre eux par un tube de lunette quand il s'agit, par exemple, d'assurer la direction d'un instrument méridien. De là, les collimateurs à *long foyer*. L'objectif du collimateur doit avoir à peu près la même ouverture que celui de la lunette avec laquelle on l'observe.

Une lunette peut se servir à elle-même de collimateur. L'image de la croisée des fils éclairée convenablement produit un faisceau de rayons parallèles au sortir de l'objectif. Si l'on reçoit ce faisceau sur une surface plane réfléchissante perpendiculaire à sa direction, chaque rayon revient sur lui-même, traverse l'objectif et revient converger au point d'où il est parti : on a donc là le moyen de déterminer la direction d'une lunette perpendiculairement à une surface réfléchissante.

L'observation se fait en plaçant, en avant et très près de l'oculaire, soit un prisme à réflexion totale, soit plus simplement une glace mince inclinée à 45° sur l'axe de la lunette et formant chambre claire. On éclaire latéralement la face de la glace tournée vers la lunette et on place l'œil de manière à viser le réticule à travers cette glace. La face intérieure réfléchit de la lumière dans le tube et éclaire le réticule, et quand la direction convenable est obtenue par le mouvement de la lunette, l'œil voit à la fois l'image directe des fils et leur image réfléchie qu'on amène à une coïncidence parfaite en achevant le pointé par de petits mouvements appropriés. Le petit appareil qu'on ajoute à la lunette est appelé *oculaire nadiral*, parce que si la surface réfléchissante est horizontale, comme celle d'un liquide au repos, on peut ainsi rendre l'axe optique vertical et pointer au nadir ou au zénith.

39. — Éclairage des lunettes pour les observations de nuit.

Quand on observe de jour, les fils du réticule se détachent en noir sur un fond lumineux. La nuit on n'aperçoit plus les fils : de là la nécessité de les éclairer. On éclaire habituellement le champ à l'aide d'un miroir, disposé pour réfléchir la lumière d'une lampe. Dans certains instruments, ce miroir se dispose en avant de l'objectif et se fixe à la lunette au moyen d'un collier : on place la lampe latéralement, et le miroir est orienté de manière que la tige qui le porte et autour de laquelle il tourne soit dans le vertical de la lunette. Dans d'autres instruments, le miroir se place à l'intérieur de la lunette, incliné à 45° sur son axe de figure : il reçoit les rayons de la lampe par une ouverture latérale du tube et les renvoie sur les fils. Ce miroir, de forme elliptique, est évidé en son milieu pour laisser passer les rayons issus de l'objectif; il forme diaphragme.

L'éclairage des lunettes et des divisions des cercles est une des grandes difficultés qu'on rencontre en voyage. En fait, il en résulte dans beaucoup de cas, pour les observations d'étoiles comparées à celles du Soleil, une infériorité marquée. Quand on n'a que deux fils en croix, il n'est guère possible de se tromper, et on peut éclairer le champ aussi faiblement qu'on voudra, pourvu qu'on soupçonne la place des fils, car la bissection des étoiles est toujours très nette.

40. — Détermination de la verticale. Horizon artificiel.

La direction primordiale qui caractérise un point de la Terre est celle de la verticale, c'est-à-dire de la perpendiculaire à la surface des liquides en équilibre. C'est, en réalité, à cette direction que doivent être rapportées toutes les observations astronomiques. La position d'un lieu terrestre est déterminée par la direction de sa verticale, puisque géométriquement un point de l'ellipsoïde est déterminé par la direction et le sens de sa normale. En choisissant une surface liquide qui peut réfléchir la lumière, on trouvera de la manière la plus simple la position de la verticale ou du plan qui lui est perpendiculaire.

Quand il s'agit de pointer au nadir, on emploie généralement une cuvette contenant du mercure, et on fait la *collimation au nadir*, dont le résultat est de rendre l'axe de la lunette normal à l'horizon, c'est-à-dire vertical, selon ce qui a été expliqué plus haut.

Diverses précautions sont nécessaires pour bien réussir cette observation.

Il faut d'abord que la surface réfléchissante soit bien nette. Pour se débarrasser de toutes les impuretés qui flottent généralement à la surface du mercure, on verse le liquide dans une peau de chamois disposée en poche, on tord et on comprime cette poche, et le liquide filtre parfaitement net. Il n'est pas hors de propos de se rappeler ici que le mercure attaque et amalgame très vite la plupart des métaux, surtout l'argent et l'or, et qu'au moment de faire cette manipulation il faut écarter les bijoux, bagues, chaînes de montres, etc. Dans les grands observatoires fixes, le bain de mercure est disposé à peu près comme un encrier à pompe : en faisant refluer le mercure dans la grande branche, les poussières y montent à la surface, et on obtient ensuite un horizon très brillant dans la petite branche.

L'immobilité de la surface, indispensable à la netteté des images, exige un support très stable et qui ne reçoive aucune trépidation du sol. L'agitation se faisant généralement par cercles concentriques, le meilleur pointé d'un fil se fait sur les bords de la cuvette, dans la direction d'un rayon de celle-ci.

On s'efforce aussi d'obvier à la trop grande mobilité du mercure et on a proposé pour cela des cuvettes dont le fond est cannelé de rainures parallèles très fines : ou bien le fond de la cuvette est en cuivre amalgamé que le mercure mouille ; on met alors ce liquide en couche très mince. On garantit la surface contre l'agitation de l'air à l'aide d'écrans convenablement disposés, et destinés en outre à arrêter les rayons lumineux parasites, arrivant par d'autres voies que le tube de la lunette, et qui rendraient l'image réfléchie moins visible. En général, il faut s'efforcer de supprimer toutes les causes d'agitation, si faibles soient-elles. L'opération du pointé au nadir exige aussi un très bon éclairage ; elle est souvent difficile à réussir.

Pour les observations faites avec les instruments à réflexion,

l'horizon artificiel à fluide se compose d'une cuvette rectangulaire en fonte de fer, que l'on surmonte d'un toit en métal, dont les deux faces, inclinées à 45° sur l'horizon, sont percées d'ouvertures fermées par des glaces. Ces glaces doivent avoir leurs faces bien planes et bien parallèles : elles peuvent tourner dans leur plan, pour éliminer les erreurs auxquelles leur défaut de parallélisme donne lieu. Il est facile de voir que si l'on observe la distance zénithale de l'image réfléchie d'un astre, en supposant cette distance zénithale constante, et ne considérant qu'une des glaces, elle produit une certaine déviation du rayon lumineux. Après une première observation, on fait tourner cette glace de 180° dans son plan : le défaut de parallélisme étant supposé très petit, l'incidence reste sensiblement la même, mais le prisme étant retourné le sens de la déviation change. L'égalité des deux déviations n'est complète que si l'incidence est normale, mais il y a toujours compensation dans une certaine mesure, l'incidence n'étant jamais très oblique. Ainsi la moyenne des observations faites avant et après retournement est sensiblement corrigée de la déviation. Si la distance zénithale varie, la compensation sera aussi imparfaite, mais il n'en résulte pas grande erreur. Ce qui est dit d'une glace est évidemment vrai de l'ensemble des deux. Au lieu de faire tourner les glaces dans leurs ouvertures, on peut encore retourner le toit en son entier, en mettant du côté de l'observateur la glace qui était d'abord tournée vers l'objet. Cette précaution est généralement moins nécessaire quand les glaces sont formées de lames minces de mica, obtenues par clivage.

Le liquide employé peut être du mercure : on lui substitue avec avantage, pour l'observation du Soleil, des surfaces un peu moins brillantes mais moins mobiles, qu'on obtient en versant dans la cuvette de l'huile, de l'encre épaisse, du goudron. Il est à peine besoin de faire remarquer que souvent une mare d'eau bien calme fournit un excellent miroir qui peut être employé comme horizon artificiel.

L'horizon artificiel à glace n'a pas l'inconvénient de la mobilité du liquide, mais il exige un réglage préalable et répété et l'emploi du niveau dont nous allons parler.

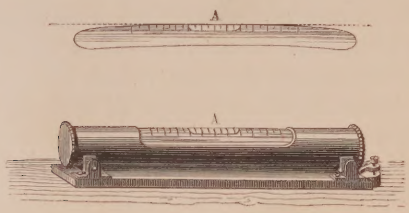
41. — Niveau à bulle.

La méthode qui précède est la plus parfaite : malheureusement elle comporte des instruments disposés d'une façon spéciale, et son application en voyage est difficile.

Si l'on n'abesoin que d'une direction approchée, le fil à plomb la fournit : pour plus de précision on a recours au *niveau à bulle*.

Cet organe d'instrument se compose d'une fiole dont la surface intérieure a une double courbure circulaire : la fiole est remplie incomplètement d'un liquide très fluide, au-dessus duquel flotte ainsi une bulle gazeuse qui, par l'effet de la pesanteur, tend à se

Fig. 14.



placer à la partie la plus élevée du tube. Pour des instruments grossiers on emploie un niveau sphérique, dont la fiole a intérieurement la forme d'une calotte sphérique. Plus ordinairement le niveau à bulle est formé par un tube de verre cylindrique. On lui donne quelquefois la forme d'un tore en le courbant dans toute son étendue; mais on n'arrive pas ainsi à une grande régularité; les niveaux précis ont extérieurement la forme cylindrique; l'intérieur seul est travaillé; la surface est celle produite par la rotation d'un arc de cercle autour de sa corde. Le tube est rempli d'alcool ou d'éther; l'eau, moins mobile, aurait encore l'inconvénient de geler aux basses températures. On y laisse un vide dont on chasse l'air par l'ébullition du liquide, puis on ferme le tube à la lampe. L'expression de niveau à bulle d'*air*, bien que d'un usage fréquent, est donc inexacte. La dilatation des liquides étant plus grande que celle du verre, une élévation de température réduit le volume de la bulle : si celle-ci se composait d'air, la pression

croîtrait rapidement, elle s'ajouterait à la tension de la vapeur, et l'exposition au Soleil ferait éclater la fiole, tandis que, si l'air est expulsé, la pression ne dépasse jamais la tension de la vapeur saturée, correspondant à la température éprouvée.

La fiole ainsi remplie et fermée est généralement enchâssée dans une monture en métal, percée à sa partie supérieure d'une fenêtre par laquelle on aperçoit la bulle.

Les variations de volume de la bulle par l'effet de la température permettent de se servir du niveau comme d'un thermomètre : il suffit de dresser un tableau de concordance des longueurs et des températures, pour que la lecture des deux extrémités, qui se fait

Fig. 15.

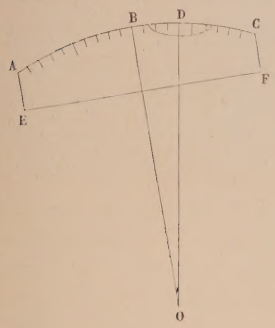
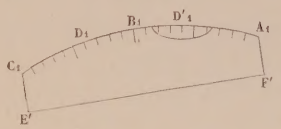


Fig. 16.



à chaque observation, puisse remplacer la lecture du thermomètre, dont on a besoin pour le calcul de la réfraction.

Pour comprendre le fonctionnement de l'appareil, considérons la génératrice la plus élevée de la surface de révolution intérieure. On a tracé extérieurement une graduation arbitraire en parties égales. Soient ABC (*fig.* 15) cet arc de cercle, O son centre : plaçons l'appareil sur une surface qui approche assez d'être horizontale pour que les deux extrémités de la bulle soient visibles.

La bulle se placera de telle sorte que son milieu D se trouvera au point de l'arc AC où la tangente est horizontale, et par suite le rayon OD vertical. On appelle *lecture* d'une extrémité de la bulle, le chiffre de la graduation auquel correspond cette extrémité, et *lecture du niveau* ou de la bulle, la moyenne des lectures des

extrémités. Si nous supposons le niveau construit de telle sorte que lorsque EF est horizontal, le milieu de la bulle se trouve en B, l'arc BD ou l'angle BOD mesurera l'inclinaison de EF.

Si le point B était connu et fixe, une seule lecture donnerait cette inclinaison. C'est ce qui n'a pas lieu ordinairement; mais on peut déterminer sa position et la lecture qui lui correspond, en retournant le niveau bout pour bout. Si D'_1 (*fig.* 16) est la lecture du niveau dans cette nouvelle position, il est facile de voir que la lecture de B_1 est la moyenne des lectures de D'_1 et D_1. Soient donc L la lecture du niveau dans la première position, L′ cette lecture dans la deuxième position, l'arc BD ou l'inclinaison sera

$$L - \frac{L + L'}{2} = \frac{L - L'}{2},$$

en supposant le zéro de la graduation en A, et exprimant l'inclinaison en parties du niveau. Pour avoir l'inclinaison en arc, on multiplie ce nombre par la valeur angulaire d'une partie du niveau.

Ce résultat peut s'obtenir sans la considération du point fictif B.

Soient GH (*fig.* 17) la droite dont on demande l'inclinaison, et GC

Fig. 17.

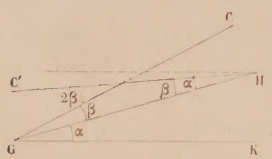
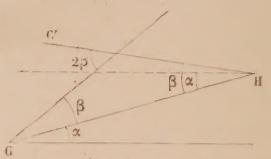


Fig. 18.



une direction liée au niveau : supposons encore le zéro de la graduation en G, dans la première position, et soit L la lecture du niveau; après retournement ce zéro viendra en H, et la lecture sera L′ : la direction GC sera venue en HC′; à la lecture L correspond un angle $\beta + \alpha$, et à la lecture L′ un angle $\beta - \alpha$; par suite, l'inclinaison α qu'il s'agit de mesurer est

$$\alpha = \frac{\beta + \alpha - (\beta - \alpha)}{2} = \frac{L - L'}{2}$$

L et L′ étant réduits en arc, ou, si n représente la valeur angu-

laire d'une partie

$$\alpha = n \frac{L - L'}{2}$$

Niveler une direction GH, c'est, dans le sens le plus général, déterminer son inclinaison à l'aide du niveau. Dans un sens plus restreint, ce mot représente l'opération par laquelle on rend GH horizontal. C'est à quoi l'on parviendra si le point H, par exemple, est mobile dans le sens vertical : en l'abaissant dans le cas présent, on arrivera par tâtonnement à une position telle que la bulle occupe la même place avant et après retournement, et qui correspond à l'horizontale.

Si nous avons défini dès l'abord le nivellement comme la mesure d'une petite inclinaison, c'est parce qu'en réalité l'horizontalité parfaite est difficile à atteindre et surtout à conserver.

La mobilité de la bulle n'est pas complète : ce que l'on a appelé improprement son inertie, et ce qui n'est qu'un effet de la viscosité du liquide empêche le point milieu d'atteindre toujours la position où la tangente est horizontale. Les changements de température font varier les dimensions de la bulle : leur action inégale sur la monture et sur l'instrument tout entier fait varier la position du niveau par rapport à l'instrument auquel il est lié, aussi bien que la position de cet instrument lui-même : on doit donc se borner en général à établir l'horizontalité aussi exactement que possible, sans y perdre trop de temps, et mesurer ensuite avec soin l'erreur qui subsiste encore.

C'est là d'ailleurs un principe général sur lequel on ne saurait trop insister. Théoriquement, on supposera toujours les instruments bien rectifiés ; en fait, il subsiste nécessairement des erreurs qu'on doit apprendre à déterminer. Telle est la pratique de l'Astronomie de précision, et en général de toutes les sciences d'observation qui poursuivent les dernières limites de l'exactitude.

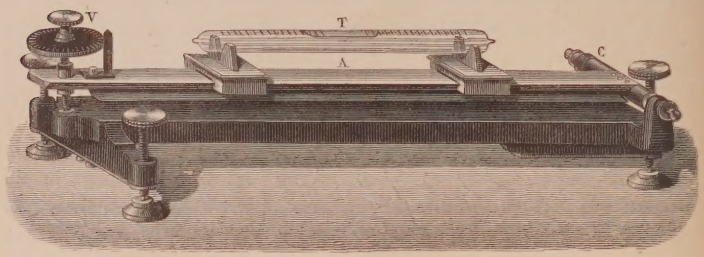
On remarquera que l'opération ne s'applique qu'aux points G et H par lesquels le niveau est en contact avec un corps donné, par exemple avec l'axe de rotation d'une lunette. Si les tourillons n'ont pas une forme parfaitement régulière, leur axe de figure ne se trouvera pas nivelé, et il sera nécessaire de déterminer la correction qui en résulte.

La théorie qui précède suppose que la section principale du niveau est exactement circulaire, et que l'on connaît sa courbure, ou du moins la valeur angulaire d'une division.

On vérifie la forme du niveau et l'on détermine en même temps la valeur des parties par une seule et même opération, qui consiste à faire tourner l'appareil de quantités angulaires égales et connues autour d'un axe perpendiculaire à son plan de symétrie longitudinal et à noter les lectures de la bulle qui correspondent à ses positions successives.

Les constructeurs d'instruments emploient à cet effet un appareil appelé *examinateur de niveaux*. Il se compose essentiellement

Fig. 19.



d'un banc de métal en forme de T dont l'extrémité large porte sur deux vis calantes, l'autre bout reposant sur une seule vis. Une quatrième vis, celle-là très soignée, sert à élever ou à abaisser une pièce sur laquelle on a placé le niveau à essayer. On a mesuré avec précision la distance l de l'axe de cette vis à l'axe horizontal autour duquel tourne la pièce qu'elle commande, et son pas p. La règle étant primitivement horizontale, si on tourne la vis d'un tour, l'inclinaison de la règle sera

$$\frac{p}{l \sin 1''}.$$

La lecture des tours et fractions de tours se fait au moyen d'un cercle divisé qui sert de tête à la vis.

Tout trépied à vis calantes peut être installé pour cet usage; on sera donc toujours en mesure de faire cette détermination, abso-

lument indispensable quand on se sert d'instruments à niveau (¹).

Quand on dispose d'un cercle vertical gradué avec exactitude, on peut se dispenser de mesurer le pas des vis et leurs distances. On attache le niveau à l'instrument et on fait mouvoir les vis du pied. Si l'instrument porte une lunette, on ramène chaque fois celle-ci sur un objet donné, un collimateur ou un point éloigné bien net : sa rotation mesurée sur le cercle divisé est alors égale à celle du niveau placé parallèlement à la lunette et sert à l'évaluer.

On peut encore opérer comme suit :

Le niveau est attaché parallèlement au cercle divisé, et perpendiculairement à la ligne de deux des vis du trépied. Il est alors parallèle à une des hauteurs du triangle de base. On agit sur la vis du sommet correspondant à cette hauteur; on fait deux lectures successives du niveau : puis on le ramène à sa lecture primitive par un mouvement du cercle divisé ou de son alidade, et on note les deux lectures successives du cercle : leur différence donnera la valeur angulaire de la différence des lectures du niveau.

Exemple. Théodolite réitérateur de Brunner n° 1.

Pointé une arête de maison :

Lectures	de la bulle.	$0^p,0$, $11^p,4$.
	du cercle	$106°45'49'',5$.

Tourné la vis du pied qui est du côté de l'objet, et rétabli le pointé en tournant la vis de rappel de la lunette :

Lectures	de la bulle.	$18^p,0$, $29^p,3$.
	du cercle	$106°42'42'',0$.

D'après cela les lectures de la bulle sont : $5^p,70$ et $23^p,65$, différence $17^p,95$; la différence des lectures du cercle est $3'7'',5$ et le quotient $\frac{187'',5}{17,95} = 10'',42$ donne la valeur d'une partie du niveau.

Quand le niveau est adapté à un instrument réglé par vis

(¹) Nous avons supposé que la graduation du niveau est continue en partant d'un des bouts. Il existe pourtant des niveaux où la partie médiane n'est pas graduée, et dont la graduation est faite dans les deux sens à partir de ce milieu. Nous indiquerons le moyen de niveler avec un pareil instrument, mais nous recommanderons avant tout de s'en débarrasser si l'on peut le remplacer; on peut encore le munir d'une graduation auxiliaire, que l'on trace sur une bande de papier et que l'on colle latéralement : on fait cette graduation continue d'un bout à l'autre de la partie visible de la fiole. C'est ce qu'il y a lieu de faire *a fortiori* quand le niveau, comme cela arrive parfois, ne porte aucune graduation.

calantes, on peut déterminer le pas d'une de ces vis et la distance de son axe à celui d'une des autres vis par une mesure directe avec la règle ou le compas. On peut diviser la tête de vis pour évaluer les fractions de tour et opérer alors comme avec l'examinateur de niveaux.

Si la section principale n'était pas bien circulaire, la valeur des parties serait variable d'un point à l'autre. On s'en assure en calculant la valeur des parties pour diverses positions de la bulle; on doit toujours trouver le même nombre, dans les limites des erreurs d'observations. Un niveau imparfait doit être étudié ainsi, et on dresse une table des valeurs correspondantes à diverses lectures. Mais, en pratique, les niveaux sont généralement assez bien exécutés pour que l'opération en question ne révèle aucune anomalie sensible.

Pour obtenir toute la précision que le nivellement comporte, il est nécessaire de prendre un certain nombre de précautions. Le liquide du niveau, avons-nous dit, est un véritable thermomètre, très sensible. La forme et les dimensions de la fiole dépendent également de la température : les effets observés ne sont pas les mêmes avec les températures croissantes et décroissantes. Des causes, peu connues encore, parmi lesquelles nous nous contentons de signaler les variations des actions capillaires sous l'influence de l'état électrique, peuvent produire des adhérences anormales, des changements dans la viscosité du liquide. Il suffit *d'approcher* la main d'un niveau sensible pour voir naître des mouvements, et un nivellement ne doit être réputé bon que s'il est la moyenne d'un grand nombre de mesures.

Nous citerons telle observation de latitude par hauteurs circumméridiennes dont les résultats partiels, corrigés chaque fois au moyen des lectures correspondantes du niveau, présentaient des divergences de près de $1'$, tandis qu'en se servant de la moyenne de cinq ou six nivellements, la concordance se retrouvait à $2''$ ou $3''$ près. Nous avons déjà fait ces remarques lorsque nous avons conseillé de déterminer les erreurs plutôt que de chercher à les rendre nulles; nous y revenons, car il est de la plus haute importance d'être attentif à cette cause d'incertitude.

Il faut donc étudier avec soin le niveau, dans des circonstances variées de température, et à diverses reprises; le manier avec les mêmes précautions qu'un thermomètre; lui laisser reprendre son

équilibre statique et son équilibre de température avant de faire la lecture; veiller avec soin l'action de la lampe quand on observe de nuit; au besoin faire la lecture avec une loupe à long foyer ou avec une lunette; éviter tout contact, soit de la main, soit de l'haleine; réitérer chaque nivellement un grand nombre de fois, etc.

42. — Nivellement d'un triangle et réglage du niveau.

Pour établir l'horizontalité d'un plan on le fait porter sur trois vis calantes A, B, C dont les pieds forment un triangle équilatéral. On place d'abord le niveau parallèlement à l'un des côtés AB du triangle : on agit sur une des vis de ce côté, ou sur les deux, en les faisant mouvoir en sens inverse l'une de l'autre, jusqu'à ce que les deux extrémités de la bulle soient visibles.

On fait la lecture L du niveau, puis on le retourne bout pour bout; ce retournement se fait avec le niveau seul, s'il est libre; s'il est attaché à l'instrument, on fait tourner la partie mobile de l'instrument de 180°.

Si la lecture dans cette nouvelle position est L, la ligne AB est horizontale. Si elle est L′, l'inclinaison est $\frac{L - L'}{2}$, et la lecture correspondante à l'horizontalité $\frac{L + L'}{2}$: on fait alors mouvoir une des vis AB, ou plutôt les deux, jusqu'à ce qu'on arrive à cette lecture, qui doit rester la même pour vérification, après un nouveau retournement. La ligne AB étant rendue horizontale, on disposera le niveau perpendiculairement à AB, et l'on opérera avec la vis C seule comme on vient d'opérer avec les autres, pour niveler la hauteur du triangle aboutissant en C. Si la lecture reste égale à $\frac{L + L'}{2}$ après retournement de 180°, cette hauteur du triangle est horizontale, et comme on n'a pas modifié l'horizontalité de AB puisqu'on n'a pas touché à ses vis, le plan ABC est horizontal lui-même. Si pourtant on avait imprimé à la vis C des mouvements d'une grande amplitude, il pourrait en être résulté des sauts d'une des autres vis, et il serait nécessaire de revenir à la position AB et de vérifier si le nivellement s'est conservé : si cela n'était plus vrai, on ferait tourner A et B en sens inverses de quantités égales en opérant

avec précaution, et ainsi de suite. Le plan contenant deux horizontales est ainsi horizontal.

Avec un instrument bien construit, cette opération réussit nécessairement. Si on ne pouvait pas arriver à l'horizontalité dans tous les azimuts, ce serait signe que le mouvement de l'instrument ne se fait pas dans un plan, que l'instrument, en d'autres termes, est faussé.

On peut néanmoins obtenir des résultats acceptables avec un instrument légèrement faussé, en ayant soin de faire des lectures nombreuses.

Chaque nivellement comprenant deux lectures, l'une dans la position directe, l'autre dans la position inverse du niveau, il est nécessaire que dans ces deux positions la bulle soit entièrement visible. On atteindra le mieux ce résultat si, dans la position horizontale, la bulle occupe exactement le milieu de la partie visible de la fiole. Afin d'y arriver, chaque niveau porte ordinairement une vis de rectification. Voici comment le réglage se fera.

Soit proposé, par exemple, d'assurer l'horizontalité d'une règle analogue à l'examinateur de niveaux. On place le niveau sur la règle, et en tournant la vis micrométrique on amène la bulle au milieu de la graduation. On retourne ensuite le niveau bout pour bout.

Ordinairement la nouvelle lecture sera différente de la première. On agit alors sur la vis *micrométrique* de manière à faire parcourir à la bulle la moitié de l'arc qu'elle a parcouru, c'est-à-dire à avoir la lecture moyenne entre les deux lectures faites dans les deux positions : si l'opération a été bien faite, la lecture restera la même après un nouveau retournement du niveau, et la règle sera horizontale. Si alors la bulle n'est pas au milieu de la graduation, on l'y ramène en agissant sur la vis *du niveau*, ce qui ne dérange pas l'horizontalité de la règle. Comme on le voit, cette opération n'est qu'accessoire : tant que les lectures sont possibles, il est inutile de toucher aux vis de rectification.

43. — Cercles divisés. Mesure des angles. Verniers et microscopes.

Pour mesurer le déplacement angulaire de l'axe optique d'une lunette dans un plan, cette lunette est assujettie à tourner autour

d'un axe perpendiculaire à ce plan. Le cercle divisé est centré sur ce même axe. Il peut être lié à la lunette (cercle méridien, etc.), et alors il est mobile avec elle, et ses déplacements sont évalués par rapport à un repère fixe : ou bien c'est le cercle qui est fixe et la lunette est montée sur une alidade portant des repères mobiles avec elle (théodolite réitérateur), ou encore ces deux conditions sont réalisées alternativement (instruments répétiteurs).

Le cercle divisé porte des traits équidistants qui partagent sa circonférence en arcs égaux. Le limbe divisé est généralement dans le plan même du cercle; quelquefois c'est un cylindre (division sur tranche) ou un tronc de cône, sur lesquels les divisions sont des génératrices. Pour évaluer les arcs plus petits que l'intervalle de deux divisions consécutives, on se sert du vernier ou du microscope micrométrique.

Le *vernier* est basé sur ce fait d'expérience que l'œil a plus de facilité pour apprécier la coïncidence de deux lignes que pour évaluer les fractions de quantités données (¹).

Supposons un cercle divisé en n parties égales, chaque partie est égale à $\frac{360^\circ}{n}$, et soit proposé d'apprécier la m^e partie d'une de ces divisions, c'est-à-dire $\frac{360^\circ}{mn}$; m et n sont des nombres entiers.

Imaginons une alidade concentrique à la graduation et coupons celle-ci suivant un cercle. On prend sur ce cercle $m - 1$ divisions, ce qui fait un arc de $\frac{360^\circ (m-1)}{n}$ que l'on divise en m parties égales sur l'alidade : la valeur d'une de ces parties est $\frac{(m-1)\,360}{mn}$ et la différence

$$\frac{360}{n} - \frac{(m-1)\,360}{mn} = \frac{360}{mn}$$

est précisément la quantité qu'il s'agit d'apprécier.

L'origine de la graduation du vernier, tracée aussi sur l'alidade est le *zéro* du vernier. Prenons pour point de départ du petit arc à évaluer la position de l'alidade dans laquelle le zéro du vernier

(¹) L'oreille jouit d'une propriété analogue : elle réussit mieux à apprécier la coïncidence de deux bruits simultanés qu'à fractionner l'intervalle de deux sons successifs. *Voir* plus loin l'application aux comparaisons des chronomètres.

coïncide avec un trait de la graduation, puis faisons tourner l'alidade d'un arc moindre que $\frac{360^\circ}{n}$.

Soit p le numéro d'ordre du trait du vernier qui coïncide avec un des traits de la graduation du limbe, $p < m$. Le déplacement du zéro est mesuré par $p \times \frac{360^\circ}{mn}$.

Par exemple : un limbe est divisé en arcs de 10′ et on veut évaluer 10″. On a ici

$$n = 2160 \qquad m = 60.$$

On prendra donc un intervalle de $59 \times 10' = 9^\circ 50'$ sur le cercle limbe; on le portera sur l'alidade et on le divisera en 60 parties dont chacune sera ainsi de 9′50″ et diffèrera par suite de 10″ des 10′ du limbe. Si c'est la 25ᵉ division qui coïncide, le petit arc cherché sera de 4′10″.

Sur les figures (*fig.* 20 et 21) on a pris $n = 10$ et la lecture est 0°, 3.

Fig. 20.

Fig. 21.

En général, on n'a pas besoin de faire ce calcul et la graduation est disposée avec des traits de longueurs différentes, de telle sorte, qu'avec un peu d'habitude on lit immédiatement les arcs.

Le zéro du vernier est le repère universel de tous les angles : on lit sur le cercle limbe le numéro du trait qui précède immédiatement la position de ce zéro dans le sens de la graduation croissante, puis on y ajoute la petite fraction évaluée comme ci-dessus.

Si la coïncidence n'a pas lieu rigoureusement, il y a deux traits contigus du vernier qui coïncident sensiblement avec deux traits de la graduation. Alors la lecture est

$$\frac{p + (p+1)}{2} \frac{360}{mn}.$$

Si, dans l'exemple cité, ces traits étaient le 25ᵉ et le 26ᵉ, le petit arc serait 4′15″.

Pour mieux juger de la coïncidence on se sert de la loupe. On arrive ainsi à apprécier assez bien les 10″ avec un cercle de $0^m,08$ de rayon : c'est dire que l'œil armé d'une loupe discerne ici le $\frac{1}{250}$ de millimètre. A l'estime, et en se servant de la même loupe, on n'arriverait guère qu'à l'approximation d'une minute.

L'observation du vernier est assez facile de jour, bien que toujours plus fatigante que celle du microscope. De nuit, il est assez difficile de bien éclairer la graduation. On se sert dans ce cas, soit de la lampe, dont on projette la lumière sur le vernier en ayant soin de ne pas la recevoir directement dans l'œil, soit d'un petit morceau de charbon incandescent. On peut préparer de petits bâtonnets de bois que l'on trempe dans une solution de nitre et qu'on laisse bien sécher. Une allumette ordinaire, bien allumée, puis soufflée, reste assez longtemps en ignition pour qu'en la plaçant parallèlement au bord du limbe, sous le verre dépoli qui abrite le vernier, on ait le temps de faire une bonne lecture. On arrive à un éclairage supérieur au moyen d'une très petite lampe électrique à incandescence, dont on tient la pile dans sa poche, et que l'on place de manière à lui faire éclairer les divisions en la tenant elle-même hors du champ de la loupe. Le commandant Fleuriais a imaginé de réduire le nombre des lectures du cercle, sans diminuer celui des pointés, et de rapporter toutes les lectures successives à une seule d'entre elles faite avec soin. Il se sert pour cela de la vis de rappel de l'alidade du sextant dont il mesure les rotations avec un tambour divisé, lequel joue alors le rôle de vis micrométrique. On pourrait adapter ce dispositif à d'autres instruments que le sextant.

Mais, en définitive, les conditions d'usage facile de la loupe limitent beaucoup son grossissement. C'est pour cela qu'on atteint une précision supérieure par l'emploi du *microscope micrométrique*. Ici le repère est une position donnée du fil mobile, et la fraction de division s'apprécie par le nombre de tours et de fractions de tour dont il faut faire mouvoir la vis micrométrique pour amener le fil mobile à coïncider avec l'image d'un des traits. Le nombre entier de tours se lit sur le peigne qui est au foyer, et la fraction sur un tambour divisé que porte la vis.

Pour obtenir une sensibilité plus grande de ce pointé, on se sert habituellement de deux fils parallèles dont l'écartement est un peu

supérieur à la largeur de l'image d'un trait. On amène celle-ci entre les deux fils, et l'œil juge avec une grande sûreté du moment où les deux plages lumineuses situées de chaque côté du trait sont égales.

L'usage du microscope micrométrique donne ainsi plus de précision que celui du vernier, en raison de la puissance du grossissement qu'on peut employer. Avec un cercle des dimensions précitées, on arrivera à apprécier la seconde d'arc. Les lectures sont aussi faciles de nuit que de jour, et la fatigue de l'œil est bien moindre.

La petitesse du champ ne permet généralement pas de lire le numéro des divisions du limbe : on est alors obligé de recourir à un repère auxiliaire qui est, soit la croisée des fils d'un microscope de moindre grossissement et de champ plus étendu, soit un simple trait marqué sur une alidade fixe relativement aux microscopes, et que l'on observe à la loupe. Le microscope est préférable. Ce trait donne les degrés et un nombre rond de minutes ; les secondes seules sont lues au microscope micrométrique. De plus il est nécessaire, si l'on veut tirer de ce procédé toute la précision qu'il comporte, de déterminer à chaque lecture la valeur angulaire du tour de vis, ce qui se fait en pointant successivement les deux traits entre lesquels se trouve le repère du microscope.

On trouvera plus loin un exemple d'usage de microscopes micrométriques.

44. — Erreurs des Cercles.

Un instrument de mesure d'angles comprend un cercle divisé et une alidade mobile relativement au centre de ce cercle, entraînant soit une pinnule, soit une lunette astronomique. Pour mesurer l'angle entre deux objets on amène la lunette à les pointer successivement sous la croisée des fils : à chaque fois on lit le vernier, et la différence des deux lectures donne l'angle.

Si le cercle était exactement divisé, si l'axe optique se mouvait parfaitement dans son plan et dans celui des objets, si les verniers ou microscopes étaient sans erreur, si enfin l'axe autour duquel tourne la lunette passait par son axe optique et par le centre de la graduation, cette différence serait l'angle exact, aux erreurs de pointé près. Malgré la perfection qu'on peut apporter à la construction et

à la rectification des instruments, il n'en existe aucun dans lequel ces conditions soient absolument remplies. Chaque lecture est donc entachée d'une erreur, somme de toutes les erreurs partielles.

On distinguera plus tard entre les erreurs accidentelles et systématiques : on verra que les premières sont celles qui ne suivent aucune loi, ou plutôt dont la loi est inconnue, et qu'elles ne peuvent être calculées, mais que leur influence s'atténue en multipliant et variant les observations. Nous ne considérerons donc ici que les erreurs systématiques, c'est-à-dire celles qui sont constamment les mêmes pour une direction donnée de la lunette ou pour une lecture déterminée de l'instrument.

Il y a lieu de distinguer parmi ces erreurs celles qui sont inhérentes au cercle gradué et celles qui dépendent de la position et du mouvement de la lunette par rapport à ce cercle. Puisque tout angle est la différence de deux lectures, on n'aura qu'à étudier les erreurs des lectures.

1. *Erreur d'excentricité.* — L'axe de rotation de l'alidade ne coïncide pas avec l'axe de la graduation. La distance e des deux axes est l'excentricité. Avec certaines dispositions de vernier, l'excentricité a pour effet de faire varier, dans l'étendue de la circonférence, le rapport de grandeur entre les divisions du limbe et celles du vernier. Nous négligerons pour le moment cet effet, ou plutôt nous admettrons que l'estimation de la lecture se fait théoriquement par rapport à un seul trait, lié à l'alidade et mobile avec elle. L'objet visé est supposé assez éloigné pour que les droites qui le joignent aux deux centres soient sensiblement parallèles. Si on pointe un objet situé sur la ligne CC′ des centres (*fig.* 22), l'erreur de lecture est évidemment nulle. Visons maintenant un objet dans la direction CA. S'il n'y avait pas d'excentricité, la lecture vraie serait : lecture de $O + OCA$, que nous représentons par $O + A$ (la graduation est supposée croître de gauche à droite). En réalité, la direction de l'alidade est C′A′, parallèle à CA, et elle coupe le cercle en A′, dont la lecture est $O + A'$. La correction à ajouter à A′ erroné pour avoir A vrai est donc

$$A - A' = A'C'A = C'AC.$$

La simple inspection de la figure indique qu'on doit appliquer

la formule des parallaxes de hauteur; et si $r = CA$ représente le rayon du cercle gradué; la correction cherchée est donnée par la formule

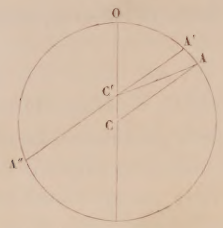
$$\operatorname{tang}(A - A') = \frac{\frac{e}{r}\sin(A' - O)}{1 - \frac{e}{r}\cos(A' - O)}$$

ou par le développement

$$A - A' = \frac{e}{r \sin 1''}\sin(A' - O) - \dots$$

dont le premier terme suffit toujours à cause de la petitesse de $\frac{e}{r}$.

Fig. 22.



On voit que $\operatorname{tang}(A - A')$ prend la même valeur avec un signe contraire si l'on ajoute 180° à A'. Si l'on adapte à l'alidade deux repères diamétralement opposés, leurs erreurs sont égales et de signes contraires et disparaissent de la moyenne. On éliminera donc l'erreur d'excentricité par l'emploi de verniers ou de microscopes *diamétralement opposés*.

Il convient d'autant plus d'effectuer ainsi cette élimination que la grandeur e de l'excentricité et la direction CC' des centres ne sont pas parfaitement constantes. En effet, pour que la rotation de l'alidade soit possible, il est nécessaire que les axes aient un certain jeu, d'où résulte une mobilité irrégulière de l'axe de l'alidade relativement à l'axe de la graduation. Aussi paraît-il superflu de développer ici la détermination de l'excentricité qui se déduirait facilement des différences deux à deux des lectures A' et A'' faites en divers points de la circonférence. Nous y reviendrons à

propos des instruments à réflexion, les seuls qui ne sont généralement pourvus que d'un seul vernier.

2. *Erreurs de graduation.* — La graduation des limbes se fait au moyen d'une machine à diviser. Les imperfections de cette machine, l'excentricité du cercle pendant l'opération de la division, son inclinaison sur le plan de la machine, les variations de la température pendant le travail et plusieurs autres causes encore, empêchent que l'intervalle de deux divisions quelconques soit rigoureusement constant. Chaque trait du limbe a donc une erreur, mais si l'instrument est divisé avec soin, les erreurs de division sont périodiques. Celles qui résultent de l'excentricité du cercle pendant l'opération et de l'inclinaison de son axe de rotation sur son axe de figure sont périodiques par essence. Celles que peuvent occasionner les variations de température pendant le travail le sont dans une certaine mesure, et il paraît rationnel de mettre la correction de chaque lecture L sous la forme

$$a_0 + a_1 \cos \mathrm{L} + a_2 \cos 2\mathrm{L} + a_3 \cos 3\mathrm{L} + \ldots$$
$$+ b_1 \sin \mathrm{L} + b_2 \sin 2\mathrm{L} + b_3 \sin 3\mathrm{L} + \ldots$$

On peut se proposer d'étudier la graduation d'un cercle et de déterminer l'erreur de chaque trait ; mais cette opération, qui se fait dans les observatoires pour les instruments très précis, est d'une longueur rebutante, et ne s'applique autant dire jamais aux appareils portatifs. Pour ceux-ci il est encore plus simple de chercher à éliminer cette cause d'erreur en multipliant et variant les observations, ce qui offre en outre l'avantage de réduire du même coup les erreurs accidentelles. Nous nous bornerons donc à l'indication très générale des méthodes d'étude proposées et employées.

Si l'on dispose de deux microscopes qui peuvent se déplacer, on peut employer la méthode suivante. Soit proposé de déterminer les erreurs des traits 5°, 10°, 15°, etc. On disposera les microscopes A et B de façon à pointer avec A la division 0°, avec B la division 5°. Puis, faisant tourner le cercle, on amènera le trait 5° sous A, au micromètre duquel on ne touche jamais. Le trait 10° se trouve alors sous le microscope B, à l'aide duquel on fait un pointé exact et une nouvelle lecture, différant légèrement de la précédente, si les deux intervalles ne sont pas égaux. On continue

ainsi jusqu'à ce qu'on ait fait une rotation complète; on trouvera ainsi la valeur angulaire exacte de la distance des deux microscopes et on lui comparera les valeurs successives qu'on aura obtenues.

On peut encore se servir des observations mêmes pour déterminer les erreurs, en opérant par réitération (*voir* plus loin) un grand nombre de mesures angulaires, admettant que les angles résultant d'un grand nombre de pointés donnent une moyenne exacte, et comparant ces moyennes aux observations partielles. On admettra que l'erreur du trait zéro est nulle.

Un cercle est d'autant mieux divisé que les erreurs absolues de ses traits sont plus petites et surtout que les termes de la série trigonométrique vont en décroissant rapidement à mesure que leur rang s'élève.

A défaut d'une connaissance exacte des erreurs de la graduation, on arrive à en éliminer l'influence par l'emploi de méthodes convenables d'observation.

Voyons d'abord ce qui se passe lorsqu'au lieu d'un vernier on en emploie plusieurs équidistants entre eux. Soit n le nombre des verniers ou microscopes; leur espacement est $\frac{2\pi}{n}$, et, si la lecture de l'un d'eux est L, celles des autres seront

$$L + \frac{2\pi}{n}, \qquad L + 2\,\frac{2\pi}{n}, \qquad \ldots, \qquad L + (n-1)\,\frac{2\pi}{n}.$$

La correction de la lecture du vernier d'ordre i est par hypothèse, et abstraction faite des erreurs accidentelles,

$$a_0 + a_1 \cos\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + a_2 \cos 2\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + \ldots + a_p \cos p\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + .$$

$$+ b_1 \sin\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + b_2 \sin 2\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + \ldots + b_p \sin p\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + .$$

et la correction de la moyenne des lectures est la moyenne des corrections. Considérons par exemple les termes d'ordre p des erreurs : leur moyenne est

$$\frac{a_p}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos p\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right) + \frac{b_p}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} \sin p\left(L + \frac{2\pi}{n} i\right)$$

ou bien

$$\frac{a_p}{n}\sum_{0}^{n-1}\left[\cos pL\cos pi\frac{2\pi}{n}-\sin pL\sin pi\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$+\frac{b_p}{n}\sum_{0}^{n-1}\left[\sin pL\cos pi\frac{2\pi}{n}+\cos pL\sin pi\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$=\left(\frac{a_p}{n}\cos pL+\frac{b_p}{n}\sin pL\right)\sum_{0}^{n-1}\cos pi\frac{2\pi}{n}$$

$$+\left(\frac{b_p}{n}\cos pL-\frac{a_p}{n}\sin pL\right)\sum_{0}^{n-1}\sin pi\frac{2\pi}{n}.$$

D'après le § 6, on voit que $\sum_{0}^{n-1}\sin pi\frac{2\pi}{n}$ est toujours nul, et que $\sum_{0}^{n-1}\cos pi\frac{2\pi}{n}$ l'est généralement, sauf le cas où $\frac{p}{n}$ est un entier : alors sa valeur est n.

Les seuls termes qui subsistent dans la moyenne finale sont donc ceux dans lesquels p est un multiple de n.

Avec deux verniers opposés, il ne reste que les termes pairs : avec quatre verniers, les termes en 4L,8L ; avec six verniers, la correction est de la forme

$$a_6\cos 6L+a_{12}\cos 12L+\ldots$$
$$+b_6\sin 6L+b_{12}\cos 12L+\ldots$$

Si la division est bien faite, ces coefficients vont en décroissant rapidement, et par conséquent l'erreur devient insensible quand n est suffisamment grand.

45. — Réitération et répétition.

Si maintenant, n étant toujours le nombre de verniers et m un entier, on fait tourner le cercle lui-même de manière que l'intervalle $\frac{2\pi}{n}$ soit divisé en m parties, c'est-à-dire qu'ayant fait avec le premier vernier la lecture L, on fasse le pointé de la même direction en faisant tourner le cercle de telle manière que la lecture du même

vernier devienne $L + \frac{2\pi}{mn}$, puis $L + 2 \cdot \frac{2\pi}{mn}$, .. $L + (m-1)\frac{2\pi}{mn}$, on aura fait m pointés et mn lectures, et ces lectures seront disposées sur le cercle exactement comme si, ayant fait un seul pointé, on avait fait la lecture par mn microscopes. C'est là le principe de la méthode de la *réitération* des angles. Si, par exemple, on fait les observations avec quatre microscopes dans cinq positions équidistantes du cercle, prenant pour lecture du premier microscope successivement 0°, 18°, 36°, 54°, 72°, l'erreur finale de la moyenne sera

$$a_{20}\cos 20L + a_{40}\cos 40L + \dots$$
$$+ b_{20}\sin 20L + b_{40}\sin 40L + \dots .$$

Il suffit, pour appliquer cette méthode, que le cercle divisé soit mobile autour de son axe et puisse être solidement fixé à l'aide de vis de pression dans chacune des positions qu'il doit prendre successivement.

Une autre méthode employée pour éliminer l'influence des erreurs de division est celle de la *répétition*. Concevons la lunette et le cercle divisé disposés de telle manière qu'on puisse à volonté fixer le cercle dans l'espace et mouvoir la lunette, ou fixer le cercle à la lunette et le faire entraîner par celle-ci, et proposons-nous de mesurer l'angle entre deux objets.

Mettons pour fixer les idées, qu'on pointera d'abord l'objet de gauche ; on fera la lecture des verniers. Puis, laissant le cercle fixe, on pointera l'objet de droite par le mouvement de la lunette. Fixant celle-ci au cercle, on ramène l'ensemble du cercle et de la lunette vers la gauche, on pointe l'objet de gauche ; puis on fixe le cercle, et on amène la lunette seule sur l'objet de droite. La lunette aura décrit ainsi par rapport à la graduation un angle double de celui qu'on cherche, et en continuant de même on peut tripler, quadrupler, en un mot, multiplier les angles autant qu'on le veut. Soit n le nombre de ces répétitions ; soient L_0 la lecture initiale, L_n la lecture finale, cette dernière augmentée du nombre de circonférences nécessaire, $\frac{L_n - L_0}{n}$ sera l'angle cherché, en supposant la graduation exacte.

Si E_0 et E_n sont les erreurs de lecture, $\frac{(L_n - E_n) - (L_0 - E_0)}{n}$ sera l'angle, et l'erreur $\frac{E_n - E_0}{n}$ pourra être rendue aussi petite qu'on voudra en augmentant n. Cette méthode moins pénible, et qui semble au premier abord plus précise que celle de la réitération, est pourtant abandonnée de nos jours pour les travaux très exacts. Théoriquement sa précision est pour ainsi dire illimitée, le nombre des pointés et des lectures nécessaires pour obtenir une approximation donnée est de beaucoup inférieur à celui que nécessite la méthode de la réitération (*vide infrà*) : mais ces avantages sont très réduits en pratique. La méthode suppose que les deux cercles, le limbe et l'alidade, ont des mouvements parfaitement concentriques, ce qui est rarement le cas : elle repose sur l'hypothèse qu'on peut les fixer invariablement l'un à l'autre, ce qui n'arrive jamais, à cause du jeu des vis de rappel et du jeu des axes ; ces causes réunies introduisent dans les mesures des erreurs constantes. De plus, si l'on a obtenu par la réitération plusieurs valeurs d'un même angle, on peut toujours éliminer une de ces valeurs qui serait manifestement erronée par un défaut de pointé : avec la répétition, pour éviter ce danger, il faut lire les angles successifs, ce qui enlève à la méthode une partie de ses avantages de célérité et de simplicité, et l'élimination d'un résultat partiel réduit alors beaucoup la précision.

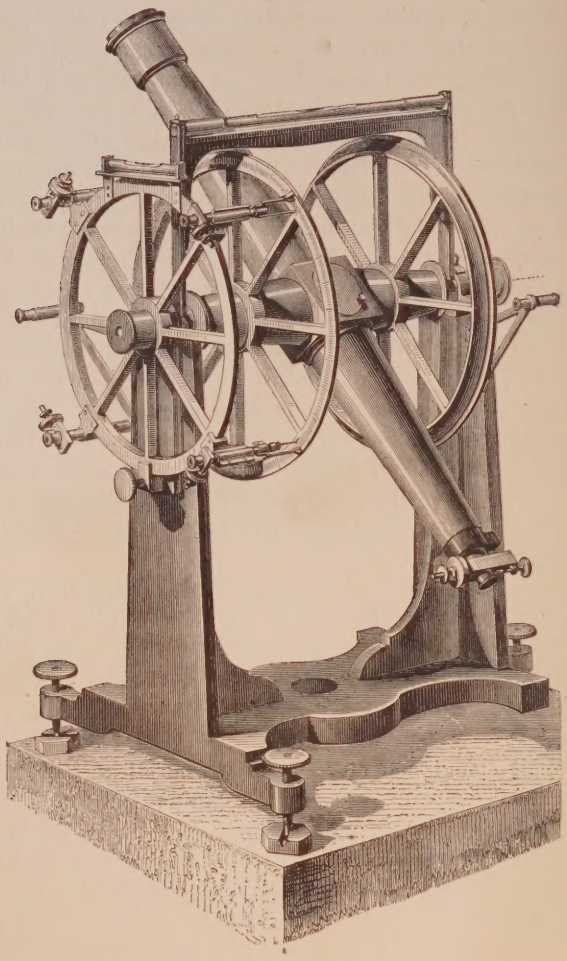
Enfin la méthode de la réitération donne en même temps l'angle et son complément à 360°, tandis que la répétition exige deux séries distinctes de mesures pour cela, et ne se prête pas à l'usage si commode des *tours d'horizon*. Pour les angles verticaux, la répétition présente aussi des inconvénients spéciaux, liés au jeu des axes.

Un angle étant la différence de deux lectures, le sens de la graduation du cercle est indifférent : la plupart des cercles portent une graduation qui croît dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre : le sens inverse est souvent adopté pour les instruments à microscopes, le microscope renversant le sens de la graduation apparente.

46. — Cercle méridien. Nivellement.

Une lunette dont l'axe optique coïncide avec son axe de figure,

Fig. 23.



et qui, pouvant tourner autour d'un axe horizontal perpendiculaire

au plan du méridien, décrit le méridien : un cercle divisé, solidement fixé à cette lunette et mobile avec elle, dont le plan est parallèle à l'axe optique, dont les déplacements angulaires sont rapportés à des repères fixes, verniers ou microscopes : tel est en principe le cercle méridien.

Le pied de l'instrument (*fig.* 23) se compose de deux montants massifs, généralement en fonte (en maçonnerie dans les observatoires), portant à leur partie supérieure deux coussinets sur lesquels reposent deux tourillons qui forment les extrémités de l'axe autour duquel tourne la lunette.

Ces montants sont réunis à leur partie inférieure par une traverse, et le système tout entier est porté par un pied muni de trois vis calantes. On dispose généralement le triangle formé par ces vis de manière qu'un de ses côtés soit parallèle au méridien. Ce pied doit être très lourd et reposer sur une base solide, qui sera de préférence un pilier en maçonnerie; on peut encore installer l'instrument sur le roc nu, ou sur des pieux fortement battus en pilotis, sur des massifs de gueuses réunies par du ciment, etc. La condition essentielle est une grande stabilité; les mouvements de l'observateur ne doivent pas se communiquer à l'instrument, ce qui exige souvent l'établissement d'un plancher indépendant du pilier. Le système des montants peut recevoir un mouvement azimutal, le pied à vis calantes restant fixe, afin de placer la ligne des coussinets dans la direction perpendiculaire au méridien.

L'axe de rotation de la lunette est déterminé par les deux tourillons qui doivent être parfaitement cylindriques, égaux en diamètre, et avoir leurs axes en prolongement exact. Ordinairement les tourillons sont creux pour permettre de projeter dans la lunette la lumière d'une lampe qui, reçue par un miroir incliné à 45° sur les axes, est réfléchie sur la croisée des fils.

L'horizontalité de l'axe de rotation est mesurée à l'aide d'un grand niveau à bulle, reposant sur les tourillons par ses montants et susceptible de retournement.

Un autre niveau, généralement moins sensible, est placé parallèlement au cercle, et fixé solidement aux pièces qui portent les microscopes ou les verniers.

Le *réticule* se compose d'un seul fil horizontal et de plusieurs fils qui lui sont perpendiculaires et qui, décrivant ainsi des plans

verticaux, sont appelés *fils verticaux* : on ajoute fréquemment un fil vertical mobile actionné par une vis micrométrique.

D'après la définition de l'instrument :

L'axe de rotation doit être horizontal;

Les fils verticaux, perpendiculaires par construction au fil horizontal, doivent décrire des plans verticaux ;

L'axe optique doit décrire le méridien.

Nivellement de l'axe horizontal. — Supposons d'abord les deux tourillons parfaitement égaux et cylindriques. On place le niveau à cheval dessus, et, quand l'équilibre s'établit, on regarde si la bulle est visible. Si elle ne l'est pas, il faut effectuer un nivellement aussi approché que possible, au moyen des vis calantes du pied en même temps qu'on rectifie le niveau. (§ 42).

L'inclinaison de l'axe se compte positivement si le tourillon de l'Ouest est le plus élevé, négativement si c'est celui de l'Est. Cette convention et celles relatives à la collimation et à l'azimut sont motivées par la considération des corrections qu'il faut apporter aux heures observées du passage au méridien. Si le tourillon ouest est plus élevé, l'axe optique pointe dans l'Est du méridien et les passages sont observés trop tôt : la correction doit donc être positive, et inversement si le tourillon Est est le plus haut.

On donne aux lectures du niveau le signe + quand elles vont en croissant de l'Est à l'Ouest de l'instrument, et le signe — quand elles croissent en sens contraire.

Supposons, pour fixer les idées, que la vis de rectification du niveau soit placée au bout du niveau opposé au zéro. On placera le niveau tête de vis à l'Ouest et on notera les lectures des extrémités de la bulle; on retournera le niveau, et on fera les lectures dans cette position. On inscrira alors par exemple :

	Lecture		Somme
Tête ouest	+ $23^p,2$	+ $47^p,5$	+ $70^p,7$
Tête est	— $20^p,4$	— $44^p,8$	— $65^p,2$
			+ $5^p,5$

On fera les sommes écrites dans la dernière colonne et leur somme algébrique.

L'inclinaison, étant égale à la demi-somme algébrique de ce que nous avons appelé les *lectures* du niveau, sera égale au quart

de la somme ainsi obtenue. Si n est la valeur d'une partie du niveau exprimée en secondes d'arc, il faut multiplier cette inclinaison exprimée en parties de niveau par n. Pour avoir l'inclinaison en secondes de *temps*, seule utile, on doit encore diviser par 15. Il est donc plus simple de faire d'un seul coup la division par 60, ou mieux de la faire une fois pour toutes en remplaçant n par $\frac{n}{60}$.

Si la valeur d'une partie est $1'',95 = n$, on aura donc dans le cas cité l'inclinaison

$$i = \frac{1.95}{60} \times 5,5 = 0^s,0325 \times 5,5 = +0^s,179.$$

Si la vis du niveau était du côté du zéro, les signes seraient changés.

Dans la pratique, et eu égard à l'approximation que comportent les instruments méridiens portatifs, on peut généralement admettre que les tourillons sont cylindriques et égaux. L'inégalité des tourillons, si elle existait, se reconnaîtrait en faisant un premier nivellement de l'axe dans une position donnée de la lunette, soit cercle divisé à l'Ouest, puis retournant la lunette sur ses coussinets de manière que le tourillon de l'Ouest vienne à l'Est, et inversement, et nivelant dans cette nouvelle position. Il est aisé de voir que les courbes de contact des tourillons avec les coussinets sont des sections parallèles d'une cône à base circulaire; l'axe de ce cône est le véritable axe de rotation de la lunette, et fait avec la ligne des coussinets un angle égal à l'angle qu'il fait avec une génératrice quelconque; le nivellement donne l'inclinaison, non de cet axe mais de la génératrice supérieure du cône. Dans le retournement, cette génératrice fait avec sa position première un angle égal à deux fois l'angle double au sommet du cône ou à quatre fois l'inclinaison de l'axe : celle-ci est donc égale au quart de la différence des deux inclinaisons observées ; et, suivant la position du cercle, on ajoutera ou l'on retranchera cette correction au nivellement pour avoir la vraie inclinaison de l'axe de rotation. Mais, nous le répétons, cette inégalité n'a jamais une valeur appréciable dans les instruments méridiens portatifs. On peut aussi admettre que les instruments sont assez bien construits pour que les tourillons soient bien des cylindres de révolution.

47. — Collimation.

L'axe géométrique de la lunette est la perpendiculaire abaissée du centre optique de l'objectif sur l'axe de rotation. La collimation d'un fil vertical est l'angle que fait avec l'axe géométrique la droite qui joint le centre optique de l'objectif au point où ce fil rencontre le fil horizontal. L'axe géométrique décrit par définition un plan : il y a autant d'axes optiques que de fils verticaux, et chacun de ces axes décrit un cône dont l'axe est précisément l'axe de rotation. Quand le nombre des fils verticaux est impair, on s'arrange pour mettre autant que possible le fil du milieu dans l'axe géométrique, sans y parvenir d'une manière absolue. Mais, quel que soit le nombre de fils, on peut toujours concevoir un fil idéal dont la collimation serait nulle, dont la position peut être déterminée par l'observation et le calcul, et auquel on rapporte les observations faites aux autres fils.

La tangente de l'angle de collimation d'un fil est égale au quotient de la distance rectiligne de ce fil au fil sans collimation, par la distance du fil sans collimation au centre optique. La petitesse du champ des instruments méridiens permet de prendre l'angle pour sa tangente. Cet angle s'évalue par le temps que met une étoile équatoriale à passer du fil considéré au fil sans collimation. Si l'on observe les heures du passage d'une étoile à tous les fils et qu'on en prenne la moyenne, cette moyenne représentera l'heure du passage à un fil idéal, appelé fil moyen : ce fil est tel que sa distance à un point donné du fil horizontal est la moyenne des distances des divers fils à ce même point.

La constante de la collimation est la distance angulaire du fil moyen au fil sans collimation.

Cette constante devrait être nulle pour un instrument bien construit et bien rectifié : il faut toujours s'efforcer de la réduire le plus possible. On se base pour cela sur la propriété suivante, qui est évidente : si, dans une position donnée de l'instrument, le fil sans collimation bissecte un point lumineux, il le bissectera encore après retournement de la lunette sur ses coussinets. Si la lunette est pourvue d'un micromètre à fil mobile, on commencera par déterminer la position de ce fil correspondante à chaque fil fixe :

la moyenne de ces lectures est la lecture du fil moyen. Si les fils sont sensiblement équidistants et en nombre pair, on peut mettre alors le fil mobile dans la position correspondante au fil moyen. Si le nombre de fils est impair, le fil fixe du milieu satisfera à très peu près à cette condition : dans l'un et l'autre cas, le fil moyen se trouvera à fort peu près représenté par un fil matériel. Cela posé, la rectification est aisée. On pointe, dans une première position de l'instrument, un objet très net qu'on amène sous ce fil : on retourne l'instrument sur ses coussinets; si le pointé n'est plus exact, on corrige la moitié de la différence en faisant mouvoir l'ensemble du réticule; après retournement, l'instrument se trouvera rectifié.

Si l'on ne dispose pas d'un fil mobile, cette opération exigera quelques tâtonnements; avec le fil mobile, elle se fera à coup sûr; ayant mis ce fil dans la position du fil moyen, et ayant visé un point bien net sous ce fil, on retourne la lunette et l'on déplace le fil pour arriver à la bissection; le déplacement est lu sur le tambour, et on en prend la moitié; on met le fil dans la position correspondante à ce milieu, et on achève le pointé par un mouvement du réticule tout entier. Selon les circonstances on fera choix, pour cette rectification, d'un point terrestre ou d'une lunette formant collimateur; ce dernier procédé est le meilleur, parce qu'il permet de mettre au point pour l'infini.

Si l'axe horizontal est bien nivelé, on peut faire la rectification de la collimation au moyen du pointé sur le bain de mercure avant et après retournement. Quel que soit le procédé employé, on arrivera donc à rendre la collimation assez petite. Reste à la mesurer.

Quand on n'a pas de fil mobile, la mesure ne peut se déduire convenablement que d'observations astronomiques : nous verrons bientôt comment. Quand on a un fil mobile et qu'on dispose d'un collimateur ou d'une mire méridienne, après avoir déterminé la position du fil moyen v_m, on pointe le fil mobile sur la mire, soit v_1 la lecture; on retourne l'instrument sur ses coussinets, on amène le fil mobile sur la mire, soit v_2 la lecture : $\frac{v_1 + v_2}{2} = v_0$ représente la lecture du fil sans collimation, et $v_m - v_0$ sera, au signe près, la constante de la collimation; le signe se déterminera par la considération des deux positions successives de l'instrument et du sens dans lequel croissent les lectures du micromètre, comparé au sens du

mouvement des astres dans la lunette. Il est clair que cette constante reste la même, mais en changeant de signe, lorsqu'on effectue le retournement.

On peut déterminer à la fois la collimation et l'inclinaison en pointant, avant et après retournement, le fil mobile sur son image réfléchie par un bain de mercure, après avoir pris soin de faire d'abord coïncider le fil horizontal avec son image réfléchie. Supposons, ce qui arrive généralement, que les tourillons soient égaux. Si l'inclinaison était nulle, la position v pour laquelle le fil mobile coïncide avec son image serait celle du fil sans collimation v_0. Maintenant, supposons qu'on élève l'extrémité ouest de l'axe d'un angle i : le rayon partant de ce fil et allant au centre optique tourne d'un angle i qui se double par la réflexion; pour rétablir le pointé, il faut faire marcher le fil mobile de la moitié de cet angle, son image décrivant l'autre moitié; la position v pour laquelle le fil recouvre son image sera donc telle que $v_1 - v_0 = i$.

Dans la position inverse on aura

$$v_0 - v_2 = i.$$

Par suite

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = v_0 \qquad \text{et} \qquad i = \frac{v_1 - v_2}{2};$$

v_1 et v_2 seront exprimés en tours et fractions de tour et convertis soit en angle, soit en temps.

Pour la détermination des signes, il est encore nécessaire d'avoir dans chacune des positions v_1 et v_2 le sens de la graduation du fil mobile. Nous ne donnons pas cette discussion que l'on fera facilement dans chaque cas particulier, en s'aidant au besoin d'une figure.

Cette méthode de la détermination simultanée de l'inclinaison et de la collimation nous paraît devoir être recommandée pour sa simplicité et son exactitude. La sensibilité thermométrique du niveau expose en effet à prendre pour un mouvement de l'axe ce qui n'est qu'un mouvement du niveau lui-même; l'instrument, en d'autres termes, se dérange beaucoup moins que son niveau ne paraît l'indiquer, ce qui tient en partie à ce que sa masse est très considérable, relativement à celle du niveau. Pour avoir de la précision, il est bon de se rappeler les considérations générales que nous

avons exposées en parlant du pointé au nadir (§ 40). Si le nombre de fils de la lunette est impair, il est nécessaire de donner une petite inclinaison à l'axe pour rendre ces opérations possibles en raison de la coïncidence du fil milieu et du fil moyen.

L'inclinaison et la collimation sont ce qu'on peut appeler les constantes *physiques* de l'instrument : elles se détermineraient par la même méthode pour tout autre instrument que la lunette méridienne, par exemple pour le théodolite ou pour l'instrument des passages dans le premier vertical. Il n'en est plus de même de la constante de l'azimut, qui ne peut se trouver que par des observations astronomiques.

Mais, avant de faire cette rectification, il faut avoir :

1° Mis la lunette au point ;

2° Rendu les fils verticaux exactement verticaux.

La première opération a été expliquée, la deuxième se fait très simplement en pointant une mire ou un collimateur sous un des fils, et s'assurant que le pointé persiste quand on fait légèrement tourner la lunette en élevant ou en abaissant l'oculaire. On vérifie, une fois l'instrument dans le méridien, que les étoiles équatoriales suivent exactement le fil horizontal.

48. — Installation de la lunette dans le méridien.

Les rectifications qui précèdent étant faites, la collimation et l'inclinaison réduites à être aussi petites que possible, on s'occupe d'installer la lunette dans le méridien. Si on a un théodolite, on peut le mettre d'abord sur le piédestal de la lunette, déterminer l'azimut d'un objet terrestre et en conclure la direction du méridien (*voir* aux méthodes d'azimut). On place dans cette direction une mire, ou un collimateur, ou bien on remarque un point ; on substitue alors la lunette méridienne au théodolite et on fait tourner la platine du milieu jusqu'à ce que le point donné soit recouvert par le fil horizontal. On obtient ainsi une première orientation approximative. On peut aussi calculer l'état du chronomètre par des observations de hauteur et en conclure l'heure qu'il marquera à midi vrai ; à l'aide de la durée du passage du demi-diamètre donnée par la *Connaissance des*

Temps, on en déduit l'heure du passage méridien du premier bord du Soleil (bord occidental). On cale le cercle vertical pour la hauteur méridienne du Soleil, et, aux environs de midi, on suit l'astre par le mouvement azimutal en maintenant son bord ouest tangent au fil du milieu, ou au fil mobile mis à la place du fil moyen; à l'heure calculée du passage du premier bord on arrête le mouvement; l'instrument est à peu près dans le méridien; on vérifie par le passage du second bord; le reste de l'opération s'achève par de petits mouvements de rappel. Le passage méridien d'une étoile brillante et aisément reconnaissable ou d'une grosse planète peut être substitué à celui du Soleil. La rectification finale se fait en calculant l'heure du passage méridien d'une étoile très voisine du pôle et dont le mouvement est très lent. Dans ce cas, une petite erreur sur l'état du chronomètre a peu d'influence; on suit l'étoile qui se trouve dans le champ à l'aide du mouvement lent du pied, produit par la vis de rappel, elle doit rester bissectée; à l'instant précis de la culmination, d'après le chronomètre, on arrête le mouvement. Si l'opération a été faite avec soin, l'erreur d'azimut sera minime, et il n'y aura plus à toucher au pied.

Observation des passages. — Pour préparer l'observation, il faut d'abord caler la lunette en hauteur, pour que l'astre qu'on veut observer passe dans son champ. Pour fixer les idées, appelons *position directe* de la lunette celle des deux positions : cercle à l'Ouest ou cercle à l'Est, pour laquelle les lectures vont en croissant quand la lunette se meut en partant de l'horizon sud par le zénith vers le pôle nord. Si l'on dispose d'un bain de mercure, on pointera au nadir dans cette position : soit N la lecture du cercle. $N + 90^\circ$ sera la lecture de l'horizon sud. Dans les instruments ordinaires cette dernière lecture est généralement voisine de 0°. On peut arriver à faire le pointé au nadir exactement à 270° en agissant sur la vis butante du diamètre vertical. On fait la même opération dans la position inverse, mais alors les angles sont supplémentaires aux précédents. Si donc on pointe un astre, la lecture, dans la position directe, sera la hauteur h au-dessus de l'horizon sud, et dans la position inverse, le supplément à 180° de cette hauteur. On a d'ailleurs

$$h + \delta = 90^\circ + \lambda \qquad \text{ou} \qquad h = 90^\circ - \delta + \lambda.$$

Connaissant approximativement δ et λ, on peut calculer h et se préparer ainsi à l'observation.

La direction du zénith peut aussi se trouver en se servant du niveau parallèle au cercle vertical. On choisit à l'horizon un point déterminé que l'on pointe sous le fil horizontal, après avoir eu soin d'amener la bulle du niveau au milieu du tube par un mouvement convenable de la vis butante du diamètre vertical. On fait la lecture du cercle, et on retourne l'instrument sur son pied. Dans la position inverse on amène la bulle entre les mêmes repères, on pointe le même objet en hauteur : la moyenne des deux lectures donne la lecture du zénith, d'où l'on déduit celle de l'horizon pour les deux positions de l'instrument.

On n'a pas besoin de s'astreindre à mettre le zéro à l'horizon sud, il suffit de connaître la lecture qui correspond à cet horizon. Soit H cette lecture, la hauteur *lue* sera $H + h$, ou $H + 90^\circ - \delta + \lambda$, et on peut calculer $H + \lambda$ une fois pour toutes, et l'employer à la place de λ pour les calculs.

Quand on cale l'instrument pour observer la Lune, il faut avoir soin de corriger h de la parallaxe de hauteur p, et de caler pour la hauteur $h - p$. Faute de prendre cette précaution, l'astre passerait généralement en dehors du champ.

Pour se préparer à l'observation du passage, il faut aussi connaître approximativement l'heure du chronomètre à laquelle l'astre culminera. A défaut d'un chronomètre sidéral dont on connaît la correction, le procédé le plus simple consiste à faire usage d'une montre ordinaire que l'on règle sur le temps sidéral au début de la série d'observations, et sur laquelle on lit approximativement les ascensions droites. Quand l'heure du passage approche, on se met en observation : on voit l'astre entrer dans le champ en suivant de près le fil horizontal. On l'en rapproche si la distance est trop grande, et on commence à compter les battements du chronomètre. On note le numéro du battement auquel le passage par le premier fil a lieu, puis successivement les passages aux autres fils : ce n'est que pour le dernier qu'il sera utile de prendre la minute et l'heure. Avec de l'habitude on arrive à fractionner les battements et à noter le passage au demi-battement et même au quart de battement près. On convertit ensuite les battements en secondes et fractions de secondes : la moyenne des heures ainsi obtenues est le passage

au fil moyen. Si l'instrument était complètement rectifié, cette heure serait celle du passage au méridien : connaissant l'ascension droite de l'astre, on aurait donc la correction du chronomètre sur le temps sidéral.

La lunette méridienne permet d'observer les passages d'étoiles en plein jour. Quand le Soleil est suffisamment loin du méridien et le ciel très pur, une lunette qui grossit 60 fois permet de voir facilement les grosses planètes et les étoiles de première et deuxième grandeur, notamment la Polaire : on peut aller jusqu'à la troisième grandeur dans les cas favorables. On facilite cette observation en adaptant en avant de l'objectif un tube en métal très léger ou en carton, noirci intérieurement, qui empêche l'illumination du reste du ciel d'agir sur l'objectif.

49. — Calcul des corrections.

Admettons que les erreurs instrumentales soient petites et ne dépassent pas 2^s à 3^s chacune : il est très facile de les amener à être inférieures à ces limites. Leurs carrés et leurs doubles produits peuvent alors être négligés. La correction totale de l'heure du passage est une fonction des trois erreurs, que l'on peut développer par la formule de Maclaurin

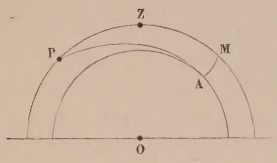
$$\varphi(c,a,i) = \varphi(0,0,0) + \left(\frac{d\varphi}{dc}\right)_0 c + \left(\frac{d\varphi}{di}\right)_0 i + \left(\frac{d\varphi}{da}\right)_0 a + \ldots,$$

les termes d'ordre supérieur étant négligeables : et comme $\varphi(c,a,i) - \varphi(0,0,0)$ est précisément la correction cherchée, on voit qu'elle est linéaire en c, a, i. Les coefficients dépendent de la position de l'étoile à l'instant de son passage par le méridien : et si l'on considère par exemple $\left(\frac{d\varphi}{dc}\right)_0$ il peut bien contenir i et a, mais en y faisant $i = 0$ et $a = 0$, on l'altèrera d'une quantité de l'ordre de c, i, a dont le produit par c est négligeable, et ainsi des autres. Nous sommes donc autorisés à calculer les coefficients de chaque correction isolément, en supposant les deux autres erreurs nulles.

Par suite de l'existence d'une erreur de collimation, l'axe optique décrit un cône dont les génératrices font un angle de $90^\circ - c$ avec l'axe de rotation et qui intercepte sur la sphère céleste un petit

cercle parallèle au méridien. L'astre se trouve en A (*fig.* 24) sur ce

Fig. 24.



petit cercle, et si de ce point on mène l'arc de grand cercle AM normal au méridien, le côté MA sera égal à c, et l'on aura

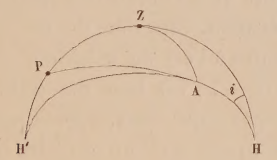
$$\frac{\sin P_c}{\sin c} = \frac{1}{\sin \delta},$$

ou en remplaçant les sinus des petits angles par les arcs,

$$P_c = \frac{c}{\sin \delta}. \tag{3}$$

Par l'effet de l'inclinaison i considérée seule la lunette décrit un plan qui coupe l'horizon aux mêmes points HH′ (*fig.* 25) que le

Fig. 25.



méridien, et fait avec celui-ci un angle i. Le triangle HAP donne

$$\frac{\sin P_i}{\sin HA} = \frac{\sin i}{\sin \delta}.$$

En raison de la petitesse de i on peut prendre $HA + AZ = HZ = 90^\circ$, donc $HA = 90^\circ - \zeta$; remplaçons donc les sinus des petits arcs par les arcs et ζ par $\delta - \lambda$,

$$P_i = i \frac{\cos(\delta - \lambda)}{\sin \delta}. \tag{4}$$

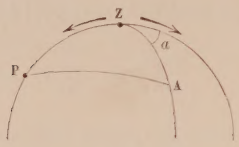
Enfin, à cause de la déviation azimutale prise seule, l'axe de la lunette décrit un plan vertical qui fait un angle a avec le méridien (*fig.* 26); et le triangle PZA nous donne

$$\frac{\sin P_a}{\sin a} = \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin \delta}$$

ou

$$P_a = a \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin \delta}. \tag{5}$$

Fig. 26.



La correction totale sera, d'après cela,

$$P_c + P_i + P_a = \frac{c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin(\delta - \lambda)}{\sin \delta}. \tag{6}$$

Il faut s'arranger de telle sorte qu'en affectant c, i, a des signes convenables, la somme ci-dessus, ajoutée à l'heure observée du passage, donne l'heure qu'on aurait trouvée si l'on avait observé le passage dans le méridien. Chacune de ces quantités est positive quand l'étoile se trouve à l'est du méridien pour le passage supérieur. Le signe de $(\delta - \lambda)$ est bien déterminé, sin δ est toujours positif pour les passages supérieurs, négatif pour les passages inférieurs. Cette notation permet de ne pas faire intervenir le signe de la distance zénithale. Le pôle P est le pôle nord, c, i, a doivent être exprimés en secondes de temps; il faut donc préalablement les diviser par 15 s'ils sont exprimés en secondes d'arc.

Si le chronomètre est réglé sur le temps sidéral et qu'on observe une étoile, on emploie la formule sans modification. Soient alors : t la moyenne des heures des passages aux différents fils, α l'ascension droite; à l'instant du passage méridien le chronomètre devait marquer

$$t + \frac{c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin(\delta - \lambda)}{\sin \delta},$$

l'heure sidérale était α, par suite la correction du chronomètre ou son retard sur le temps sidéral

$$(7) \qquad c_p = \alpha - \left[t + \frac{c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin\delta - \lambda)}{\sin\delta} \right].$$

Ces formules supposent que la hauteur apparente de l'astre peut être prise égale à sa hauteur vraie. Comme la réfraction et la parallaxe déplacent l'astre, cette hypothèse n'est pas tout à fait exacte. Il n'en résulte aucun changement pour la déviation azimutale, puisque le vertical de l'astre peut être considéré comme restant le même. Pour la Lune même, la parallaxe en azimut est négligeable aux environs du méridien : pour qu'elle devînt appréciable il faudrait que la déviation azimutale atteignît des valeurs inadmissibles, pour lesquelles le principe de l'indépendance des corrections cesserait d'être vrai. Il n'en est pas de même en ce qui regarde la collimation et l'inclinaison. On démontre que, pour opérer rigoureusement, il faudrait multiplier ces corrections par $\frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\zeta'}$, ζ' étant la distance zénithale apparente. Mais ce rapport est toujours assez voisin de l'unité pour qu'il n'y ait pas à tenir compte de la différence si l'inclinaison et la collimation sont petites.

Si l'astre a un mouvement en ascension droite, sa vitesse n'est pas la même que celle d'une étoile d'égale déclinaison : par suite, pour décrire l'angle horaire $P_c + P_i + P_a$, il mettra un temps différent. Soit $\Delta\alpha$ la variation horaire de son ascension droite, prise dans les Tables, avec le signe + si l'ascension droite croît, ce qui est le cas le plus fréquent : l'astre retardera sur une étoile qui aurait coïncidé avec lui à l'instant de l'observation, et sa vitesse, au lieu d'être 3600^s par heure sera $3600 - \Delta\alpha$: il faudra donc multiplier la correction par $\frac{3600}{3600 - \Delta\alpha}$. Pour le Soleil, ce rapport est celui du temps sidéral au temps vrai, ou sensiblement au temps moyen.

La durée du passage du demi-diamètre d'un astre ne dépend pas de la parallaxe : elle est la même au centre de la Terre et en tout point de la surface; en effet, pour tous les points d'un même méridien, et par conséquent pour le centre qui y est contenu, l'heure du passage d'un bord est l'instant où ce méridien entraîné par le

mouvement de la Terre vient toucher l'astre, et l'heure du passage du centre, l'instant où le méridien passe par le centre de l'astre : chacun de ces deux phénomènes est donc simultané pour tous les points situés dans le même méridien.

50. — Détermination de la déviation azimutale.

La déviation azimutale s'obtient en observant deux étoiles de distances polaires très différentes. On calcule d'abord pour chaque passage les erreurs de collimation et d'inclinaison, et on en corrige la moyenne des heures observées. Soient t et t' les heures obtenues, α et α' les ascensions droites, quand on opère avec un chronomètre réglé sur le temps sidéral : si l'on observe avec un chronomètre temps moyen, on substituera à α et α' les heures du passage au méridien en temps moyen : soient c_p et c'_p les corrections correspondantes du chronomètre; si m est le retard diurne du chronomètre, on a sensiblement

$$c'_p = c_p + \frac{t' - t}{86400} m,$$

$t' - t$ étant exprimé en secondes : on aura alors

$$t + a \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} + c_p = \alpha,$$

$$t' + a \frac{\sin(\delta' - \lambda)}{\sin\delta'} + c'_p = \alpha',$$

et par suite

$$(8)\quad t' - t + a\left(\frac{\sin(\delta' - \lambda)}{\sin\delta'} - \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta}\right) + \frac{t' - t}{86400} m = \alpha' - \alpha,$$

relation dans laquelle il n'y a plus d'autre inconnue que a.

Le dénominateur de la valeur de cette inconnue

$$\frac{\sin(\delta' - \lambda)}{\sin\delta'} - \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} = \frac{\sin\lambda \sin(\delta' - \delta)}{\sin\delta \sin\delta'}$$

est d'autant plus grand que $\delta' - \delta$ est plus voisin d'un droit, et que δ et δ' sont plus voisins de 0° ou de 180°. Les étoiles circompo-

laires sont donc très bonnes : on se rappellera que pour les passages inférieurs δ est négatif.

Une étoile équatoriale et une circompolaire combinées donnent un très bon résultat. Il ne faut pourtant pas oublier que les circompolaires, en raison de la lenteur de leur mouvement, donnent lieu à une appréciation moins exacte de l'heure de passage et que, si alors le coefficient de a est grand, en revanche l'erreur sur $t' - t$ l'est également. Nous reviendrons sur cette question à propos de la théorie des erreurs.

Une fois a connu, on le substitue dans les équations et on en tire c_p et c'_p. Remarquons seulement que les nombres tabulaires $\varkappa$ et α' ne représentent pas exactement les ascensions droites apparentes : il faut au préalable y ajouter l'aberration diurne, si l'on recherche une très grande précision. Cette aberration est

$$\frac{0'',311 \sin\lambda}{\sin\delta} \quad \text{ou} \quad \frac{\varkappa}{\sin\delta},$$

$\varkappa = 0'',311 \sin\lambda$ étant calculé une fois pour toutes pour un lieu donné.

La relation complète est donc, en appelant t l'heure du passage au fil moyen,

$$(9) \qquad t + \frac{c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} + c_p = \alpha + \frac{\varkappa}{\sin\delta};$$

c'est la formule de correction de Mayer.

On peut faire passer $\frac{\varkappa}{\sin\delta}$ dans le premier membre et le combiner avec c : on prendra donc pour la collimation $c - \varkappa$ au lieu de c. On fera attention que si c change de signe par le retournement, $\varkappa$ reste toujours soustractif. Si c est la collimation cercle ouest, on emploiera $c - \varkappa$ pour cette position, et $-c - \varkappa$ pour le cercle à l'est : les deux valeurs numériques sont inégales.

51. — Réduction au fil moyen, distance équatoriale des fils.

Il arrive souvent, pour différentes raisons, qu'on ne puisse pas observer un passage complet, et qu'on manque un ou plusieurs fils. Il faut savoir utiliser ces observations incomplètes.

Soit d l'arc d'équateur soustendu entre un fil donné et le fil moyen. On trouvera l'angle horaire d'un astre à son passage à ce fil comme on a trouvé la correction de collimation; mais ici on ne peut pas toujours remplacer les sinus par les arcs, ceux-ci n'étant pas très petits. On aura donc

$$\sin \mathrm{P} = \frac{\sin d}{\sin \delta};$$

d et P sont exprimés en secondes de temps. On développe les sinus, et on peut toujours s'arrêter au deuxième terme.

On a alors, en évaluant d et P en secondes d'arc,

$$d - \frac{15^2 \sin^2 1''}{6} d^3 + \ldots = \sin \delta \left[\mathrm{P} - \frac{15^2 \sin^2 1''}{6} \mathrm{P}^3 + \ldots \right];$$

négligeant les termes d'ordre supérieur et appelant q le facteur

$$\frac{15^2 \sin^2 1''}{6},$$

$$d - q d^3 = \sin \delta \, (\mathrm{P} - q \mathrm{P}^3), \tag{10}$$

Pour déterminer d on peut d'abord choisir une observation complète d'une étoile de distance polaire δ quelconque.

Soient

$$t_1 \; t_2 \; \ldots, \; t_n$$

les instants des passages; on calcule l'heure du passage au fil moyen

$$\frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n} = t,$$

et pour un fil de rang i on a, par définition,

$$t = t_i + \mathrm{P}_i.$$

Le signe de P_i, le même que celui de d_i se détermine en considérant cette quantité comme la correction à ajouter au passage observé pour avoir le passage au fil moyen : il est + pour les fils à l'Est (passage supérieur), — pour les fils à l'Ouest du fil moyen.

Connaissant ainsi $\mathrm{P}_i = t - t_i$, on peut calculer d par l'équation (10) en négligeant d'abord le terme $q d^3$, et en y remplaçant d par la

valeur ainsi trouvée, pour avoir une deuxième approximation. Si d est inférieur à 50^s de temps, ce qui est le cas ordinaire, l'erreur provenant de l'omission des termes en P^3 ou d^3 est inférieure à un demi-centième de seconde pour toute distance polaire supérieure à $8°32'$.

On calculera ainsi $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Si on a un grand nombre d'observations complètes, la moyenne des valeurs trouvées sera suffisamment exacte.

On peut aussi déterminer d au moyen du micromètre à fil mobile ; mais alors il faut connaître la valeur angulaire du tour de vis. Celle-ci se déterminera au moyen de l'observation des circompolaires faite au fil mobile en notant l'heure à chaque pointé, et en se servant de la formule (10). Pour les astres ayant un mouvement en ascension droite on aura égard à ce mouvement, comme on l'a vu plus haut. Réciproquement, connaissant d, la même formule permet de calculer P.

Nous nous bornons à indiquer ici le principe dont on déduira aisément la marche à suivre pour les calculs.

On remarquera l'intervention du facteur $\frac{1}{\sin\delta}$: la vitesse apparente d'un astre étant proportionnelle à $\sin\delta$, les astres voisins du pôle ont un mouvement très lent, et l'appréciation de l'instant exact de leur passage devient plus difficile. On estime que le degré de précision obtenu est justement proportionnel à $\frac{1}{\sin\delta}$; avec une lunette grossissant 60 fois, l'erreur sur le passage d'une étoile équatoriale est estimée à $0^s,1$ et pour l'étoile polaire à 4^s (1). On obtient une précision plus grande en observant les circompolaires au fil mobile ; on combine alors une opération de *pointé* avec l'évaluation du temps.

Il existe d'autres formules de réduction d'observations méridiennes que celle de Mayer ; ce sont celles de Bessel et de Hansen : mais leur usage n'est réellement avantageux que dans les observatoires fixes, et celle de Mayer, dans laquelle les constantes instru-

(1) D'après Laugier. M. Faye donne des résultats un peu différents : selon lui, les passages de la polaire s'observent avec plus de précision que la formule n'indiquerait.

mentales sont séparées est seule d'usage pratique en voyage : nous nous bornerons donc à les indiquer ici sans démonstration.

En posant

$$n = i\cos\lambda - a\sin\lambda,$$

$$m = i\sin\lambda + a\cos\lambda,$$

on a :

Formule de Bessel,

$$\text{Correction} = m + n\,\text{cotang}\,\delta + c\,\text{cosec}\,\delta;$$

Formule de Hansen,

$$\text{Correction} = i\,\text{cosec}\,\lambda + n\,(\text{cotang}\,\delta - \text{cotang}\,\lambda) + c\,\text{cosec}\,\delta.$$

52. — Théodolite et altazimut.

Ces noms s'appliquent au même instrument, destiné à la mesure des hauteurs et des azimuts, et possédant par conséquent deux cercles divisés : l'un vertical, l'autre horizontal. Le nom d'altazimut est plus ordinairement appliqué à de grands instruments d'observatoire, et celui de théodolite aux instruments portatifs : on applique aussi ce dernier à des instruments sans limbe vertical, destinés uniquement à la mesure des angles azimutaux : mais, dans ce cas, le nom de cercle azimutal est plus convenable. Les théodolites de petit modèle employés pour la topographie sont désignés parfois sous le nom de *tachymètres*.

La lunette astronomique du théodolite porte généralement un réticule de deux fils à angle droit. On pointe sous la croisée des fils, et la droite qui joint ce point au centre optique de l'objectif est l'axe optique. Au point de vue des rectifications, on doit distinguer entre le théodolite à lunette centrée et le théodolite à lunette excentrique.

On construit des théodolites répétiteurs et des théodolites réitérateurs : certains instruments de petit modèle ne sont ni l'un ni l'autre. La lunette peut recevoir un double mouvement :

1° Autour de l'axe du cercle horizontal, ou *axe vertical.*

2° Autour de l'axe du cercle vertical, ou *axe horizontal.*

La rectification de l'instrument comporte donc :

Rectification de l'axe optique, de l'axe vertical, de l'axe horizontal. La lunette des théodolites centrés est habituellement construite pour être retournée, comme la lunette méridienne : on peut toujours admettre que les deux tourillons sont cylindriques et égaux, eu égard à la précision que comportent les instruments transportables.

Les rectifications instrumentales doivent toujours être exécutées avec beaucoup de soin; mais malgré toute l'attention qu'on y apportera, il restera nécessairement de petites erreurs qu'il faut apprendre à déterminer.

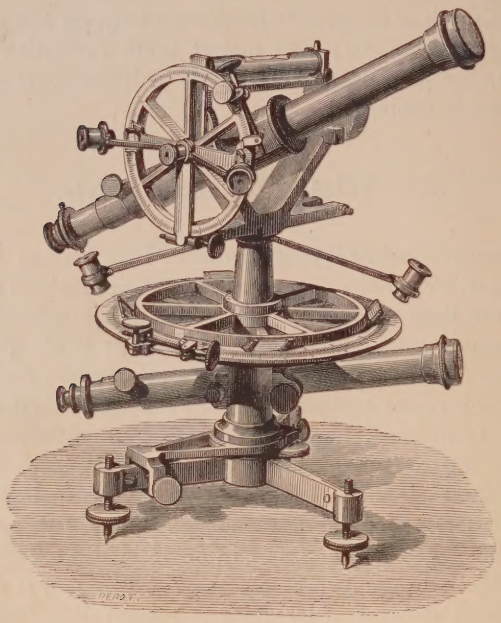
53. — Théodolite à lunette centrée.

On a besoin d'établir la coïncidence de l'axe optique avec l'axe géométrique, c'est-à-dire avec la perpendiculaire abaissée du centre optique sur l'axe horizontal de rotation. Cette coïncidence est approximativement réalisée par construction; il n'y a pas à se préoccuper de mettre *la croisée* des fils *exactement* dans le plan passant par le centre optique et l'axe de rotation, mais il est nécessaire que le fil vertical soit bien sur l'axe géométrique. Il faut avant tout mettre la lunette au point. Puis on s'occupe de niveler l'axe horizontal. D'habitude le niveau qui se pose sur les tourillons est retournable : on opère alors comme il a été dit à propos du nivellement d'un triangle. Cela fait, on vérifie la verticalité du fil du réticule, en dirigeant ce fil sur un objet bien net, et s'assurant que le pointé reste exact lorsqu'on fait mouvoir la lunette dans un plan vertical, en élevant ou abaissant l'oculaire.

Il reste à établir la coïncidence de l'axe optique et de l'axe géométrique. Pour cela on pointe un objet suffisamment net et on fait la lecture du cercle horizontal. Puis on retourne la lunette sur ses coussinets et on pointe le même objet. Si le pointé ne subsiste plus, on le rétablit et on fait une deuxième lecture du cercle horizontal. La moyenne de ces deux lectures est celle qui correspond à une collimation nulle; on amène le vernier à donner cette moyenne; alors le pointé est dérangé : on ramène le fil vertical sur l'objet par un déplacement latéral du réticule, en agissant sur

les vis qui le commandent. Si l'opération a été bien faite, un nouveau retournement doit ramener la coïncidence sans toucher à aucune vis. Si l'objet visé est à l'horizon, la collimation est précisément égale à la demi-différence des lectures faites dans les deux positions de la lunette. Il est bon de choisir ce point suffisamment

Fig. 27.



éloigné pour que la mise au point soit bien celle qui correspond à l'infini : autrement les irrégularités de forme du tube qui porte le réticule pourraient à la rigueur causer un changement de la collimation quand on le tire pour la mise au point : il ne faut pourtant pas s'exagérer l'importance de cette cause d'erreur; dans un instrument bien construit elle est insensible.

Lorsque le théodolite à lunette centrée est muni d'un cercle de hauteurs, ce cercle fait souvent corps avec la lunette, comme dans la lunette méridienne : il doit porter un deuxième niveau qui

lui est parallèle, et les observations et rectifications se font comme il a été dit pour la lunette méridienne.

Beaucoup de théodolites portent deux lunettes : l'une qui sert à faire les pointés en hauteur et en azimut : l'autre, dite *lunette d'épreuve*, est destinée à vérifier la stabilité de l'instrument en azimut. Cette dernière semble être un souvenir du cercle répétiteur, dans lequel elle jouait un rôle essentiel : appliquée au théodolite, surtout au théodolite réitérateur, son utilité est très contestable. Généralement elle ne porte aucun micromètre pour mesurer la grandeur du déplacement, s'il s'en est produit un : elle ne sert qu'à le constater et à indiquer par là que l'observation est fautive. Or, on s'assure beaucoup plus simplement de cela en pointant, à la fin d'une série ou d'un tour d'horizon, l'objet par lequel on a débuté, et s'assurant si la lecture est ou non restée la même : et le déplacement se trouvant ainsi mesuré, on peut répartir l'erreur du tour d'horizon sur les directions observées. La lunette d'épreuve est donc de peu d'utilité; elle est encore encombrante et souvent gênante, surtout au moment où l'on remet l'instrument dans sa boîte. Sa seule utilité, à notre avis, c'est que lorsqu'elle est du même module que la lunette principale, elle offre un objectif, un réticule et un oculaire de rechange; mais on peut atteindre le même but d'une façon moins compliquée.

54. — Théodolite à lunette excentrique.

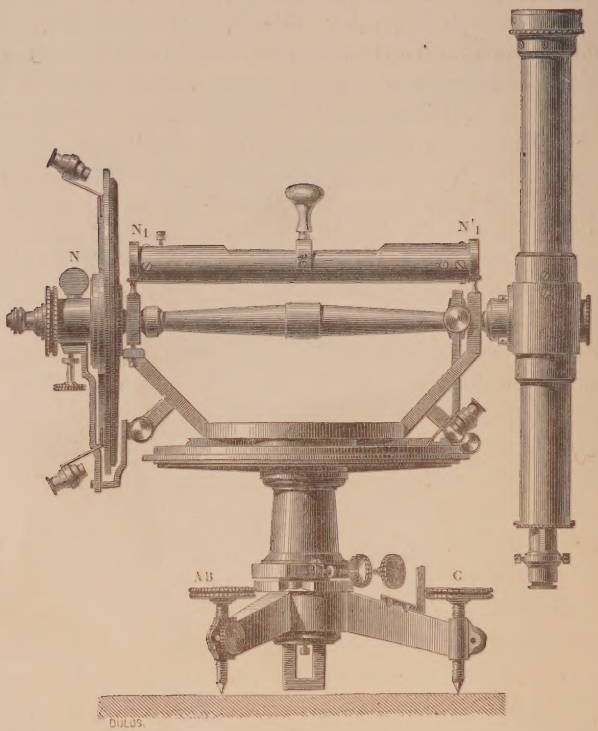
Ce théodolite porte souvent deux niveaux, l'un N parallèle au limbe vertical, non susceptible d'un retournement indépendant : l'autre $N_1 N'_1$ analogue, comme forme, au grand niveau du cercle méridien, qui se pose à cheval sur l'axe de rotation de la lunette et qui peut se retourner. Ce dernier est inutile pour le nivellement de l'axe vertical.

Pour effectuer ce nivellement, voici comment on procède.

On commence par amener la lunette à être parallèle à deux des vis A et B (*fig.* 28) du pied. Si, dans cette position, la bulle n'est pas dégagée de la monture, on l'amène vers le milieu du tube en agissant sur une des vis A ou B. On fait la lecture du cercle horizontal. Puis on desserre les vis qui fixent la lunette sur ce cercle et on la

fait tourner de 180° autour de l'axe vertical. Le niveau se trouve ainsi retourné en même temps que la lunette. Si, dans cette position, les deux extrémités de la bulle sont visibles, il suffit d'un petit mouvement des vis A et B pour amener la lecture de la bulle à être

Fig. 28.



la moyenne entre celle qu'on vient de faire et celle qui correspondait à la position inverse. Si l'une des extrémités est invisible, il faut régler le niveau, en agissant sur sa vis de rectification, de manière à abaisser le côté où la bulle est cachée, mais d'une quantité moindre que celle qui est nécessaire pour l'amener à être visible : on l'amène à cette position par un mouvement des vis calantes. Une série de tâtonnements de cette sorte rectifie le niveau et permet

d'arriver à ce que la lecture reste la même après retournement : la droite AB est alors horizontale. On amène la lunette dans la position perpendiculaire et l'on agit sur la vis C pour obtenir la lecture du niveau correspondant à la position dont il vient d'être parlé. On vérifie encore en retournant de 180°, puis enfin en revenant à la position du départ. Si l'axe vertical est bien rectifié, il faut que la lecture de la bulle reste la même pour toutes les positions qu'on donnera à la lunette en la faisant tourner autour de cet axe.

L'axe horizontal doit être perpendiculaire par construction à l'axe vertical. Il est impossible de le niveler au moyen du niveau. En effet, le niveau retournable qui accompagne souvent ce théodolite ne donne que la direction des deux tourillons, mais comme rien n'indique que l'axe optique se meut bien perpendiculairement à l'axe commun de ce tourillon, la rectification n'est qu'approchée. C'est l'observation seule qui donnera l'inclinaison absolue de cet axe, et le niveau transversal ne servira qu'à faire connaître les variations de cette inclinaison.

On complète la rectification en rendant le fil vertical, comme il a été dit; on rectifie l'axe optique en pointant un point éloigné avec la lunette à droite, puis avec la lunette à gauche, les lectures du cercle azimutal doivent différer exactement de 180°. Si cela n'est pas, on y remédie en faisant comme toujours la moitié de la correction avec la vis de rectification du réticule et l'autre moitié avec celle du mouvement horizontal de la lunette, et vérifiant par un nouveau retournement. Ici l'objet visé doit être très éloigné pour éliminer l'effet de l'excentricité de la lunette.

Il est nécessaire de distinguer les deux positions de la lunette qui permettent de viser un même objet. Avant d'établir une convention à cet égard, nous montrerons comment on opère pour mesurer une distance zénithale avec un théodolite excentrique. Supposant l'instrument bien nivelé et rectifié, on pointe un objet sous le fil horizontal, avec la lunette à droite. On fait la lecture du cercle vertical. Puis, donnant à la lunette le mouvement azimutal, on la fait tourner de 180° autour de l'axe *vertical*. Son axe optique occupera alors, par rapport à la verticale, une position symétrique de celle qu'il occupait tout à l'heure; par conséquent, si on la ramène sur l'objet par un mouvement autour de l'axe *hori-*

zontal, cet axe optique décrira un angle double de la distance zénithale de l'objet, angle qui sera la différence des lectures du cercle vertical correspondant aux deux pointés successifs.

Cela posé, dans certains instruments c'est le cercle divisé qui est entraîné par la lunette; dans d'autres c'est le cercle alidade, portant les verniers, qui est mobile, le cercle divisé restant fixe. Le sens même de la graduation n'est pas le même dans tous les instruments. Afin de pouvoir établir des formules générales, nous conviendrons d'appeler *position directe* de la lunette pour la mesure d'une distance zénithale la position pour laquelle la lecture sera la plus grande, de telle façon qu'en désignant par D la lecture de la graduation dans la position directe, par I la lecture dans la position inverse et par ζ la distance zénithale, on ait

$$D - I = 2\zeta.$$

Il est bien entendu que si, pour arriver du premier pointé au second, on a dû passer par le zéro du limbe, D devra être augmenté de 360°, mais il n'y a pas d'ambiguïté possible.

La position directe ainsi définie est donc celle pour laquelle les lectures vont croissant en même temps que la distance zénithale. Si les lectures vont croissant dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, la position directe est cercle à gauche et *vice versa*.

Il ne s'agit pas ici du sens de la graduation telle qu'on la voit tracée sur le limbe : le résultat sera inverse selon que c'est le cercle divisé ou le vernier qui suit le mouvement de la lunette : le sens de l'accroissement se rapporte aux lectures successives que l'on fait quand la lunette se meut.

Quand on fait usage de la méthode de la répétition, si l'on veut que les lectures aillent en croissant, c'est dans la position inverse qu'il faut commencer à observer.

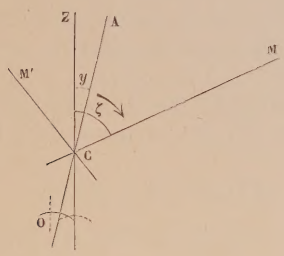
55. — Nivellement de l'axe vertical.

Nous avons montré comment il faut s'y prendre pour rendre l'axe vertical. Mais à supposer le résultat obtenu en toute rigueur au début d'une série de mesures, il ne persistera pas. L'action de la température, les chocs difficiles à éviter, les mouvements de l'obser-

vateur dérangent l'instrument : l'inertie de la bulle ne permet pas de s'en rapporter à un seul et unique résultat : le jeu de l'axe est cause que lors même qu'on a nivelé pour deux positions à angle droit, le résultat n'est pas atteint rigoureusement pour les azimuts intermédiaires. Enfin, quand on recherche la précision maximum qu'un instrument déterminé peut donner, il est de règle de rectifier aussi bien que possible, pour pouvoir traiter les erreurs restantes comme des différentielles, mais de chercher en plus par l'observation les erreurs résiduelles.

On devra donc déterminer, par la lecture du niveau, l'inclinaison

Fig. 29.



d'axe qui correspond à chacun des pointés en distance zénithale.

Si l'instrument était vertical, on aurait la même lecture n du niveau dans la position directe et dans la position inverse. Supposons maintenant l'axe CA (*fig.* 29) incliné dans la direction de l'objet visé M, et soit y l'angle qu'il fait avec la verticale. L'axe optique fait alors avec l'axe vertical un angle $\zeta - y$.

Après retournement, l'angle ACM restant constant, l'axe optique aura pris la direction CM′, et pour le ramener sur M il faudra faire tourner la lunette d'un angle $M'CM = 2(\zeta - y)$ autour de son axe horizontal.

Voyons comment on déterminera l'angle y au moyen du niveau. Supposons le premier pointé fait dans la position directe, et le niveau gradué dans le même sens que les lectures croissantes du cercle. Si l'axe était vertical, la lecture du niveau serait n; mais l'axe s'inclinant vers M, la bulle ira vers la gauche, la lecture dimi-

nuera et sera

$$d = n - y.$$

Dans la position inverse elle sera

$$i = n + y,$$

d'où

$$y = \frac{i - d}{2}.$$

Si l'on a lu un arc

$$2\zeta' = 2(\zeta - y) = \mathrm{D} - \mathrm{I},$$

on aura

$$2\zeta = 2\zeta' + 2y = 2\zeta' + i - d = 2\zeta' - (d - i)$$

ou

$$2\zeta = (\mathrm{D} - \mathrm{I}) - (d - i).$$

En faisant la discussion des divers cas qui peuvent se présenter, on verra que la correction est comprise dans les deux formules suivantes :

$$2\zeta = (\mathrm{D} - d) - (\mathrm{I} - i)$$

si la graduation du niveau est dans le même sens que la lecture;

$$2\zeta = (\mathrm{D} + d) - (\mathrm{I} + i)$$

si les deux graduations vont en sens contraire l'une de l'autre.

Si l'on veut convenir de donner à d et à i le signe + quand les deux graduations sont dans le même sens, et le signe — quand elles sont contraires, la formule générale sera

$$2\zeta = (\mathrm{D} - \mathrm{I}) - (d - i).$$

Supposons, en effet, l'instrument bien rectifié, position directe, niveau gradué dans le même sens que le cercle. Par définition, si z est la lecture du zénith, $z + \zeta$ sera celle de l'objet visé, et la lecture du niveau sera N ou la position d'équilibre. Inclinons l'axe vertical vers l'objet d'un angle y; les lectures de l'objet et du zénith diminuent de y et la lecture z correspond à la lunette placée parallèlement à l'axe dénivelé, tandis que $z - y$ est celle du zénith, et $z + \zeta - y$ celle de l'objet.

Après retournement, l'angle de la lunette avec l'axe est encore $\zeta - \gamma$; l'angle total lu sur le limbe sera donc $2(\zeta - \gamma)$; il sera représenté par D — I. En même temps la bulle reste à la position absolue correspondant au zénith vrai; la fiole ayant suivi le mouvement de l'axe, le déplacement apparent ou relatif de la bulle est égal à γ, en allant de l'axe apparent vers la verticale, c'est-à-dire en sens inverse du sens commun de la graduation : la lecture est $N - \gamma$. On voit de la même manière que dans la position inverse la lecture est $N + \eta$, et $\eta = \gamma$. Par conséquent

$$d = N - \gamma, \qquad i = N + \gamma, \qquad 2\gamma = -(d - i) > 0$$

et

$$2\zeta = 2(\zeta - \gamma) + 2\gamma = (D - I) - (d - i).$$

Il est visible que si la graduation du niveau croît en sens inverse des lectures du limbe, le raisonnement reste le même, sauf les signes de d et de i. Si l'inclinaison de l'axe se produit en sens inverse, c'est-à-dire du côté opposé à l'objet, c'est γ qui change de signe et alors $d > i$; mais la formule conserve sa généralité moyennant les conventions établies.

Principe général : l'inclinaison de l'axe est égale à la demi-différence des deux lectures du niveau, abstraction faite de tout signe : si l'axe penche vers l'observateur, la distance zénithale observée est trop forte, et par conséquent la correction est soustractive; et *vice versa*.

Si le niveau n'est pas gradué d'une façon continue, mais porte vers son milieu un espace vide, nous recommandons de coller latéralement une bande de papier divisée d'une façon continue et d'opérer comme ci-dessus. Cette recommandation s'applique *a fortiori* au cas où le niveau n'est pas gradué du tout.

Si pourtant on avait négligé cette précaution, voici comment il faudrait opérer.

Soit R (*fig.* 30) la longueur de la partie non divisée. Prenons en O un zéro arbitraire, et de telle sorte que la graduation fictive soit censée croître dans le même sens que la graduation réelle. Ce sera par exemple le côté de la vis de rectification.

La figure montre qu'on aura

$$2d = m - l + m + l_1 + R,$$
$$2i = m - l' + m + l'_1 + R;$$

d'où

$$2(d-i) = l - l' + l_1 - l'_1$$

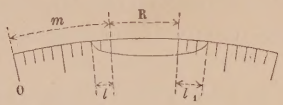
ou encore

$$2(d-i) = l + l' + l_1 + l'_1,$$

en convenant de compter les l négativement lorsqu'ils sont lus en sens inverse de la graduation, c'est-à-dire en allant de la partie non divisée vers le zéro fictif.

Dans ce qui précède, il faut supposer d et i exprimés en secondes d'arc ainsi que l, l', l_1, l'_1 : mais ces quantités n'intervenant en dernière analyse que par une différence, on les exprime d'abord

Fig. 30.



en parties de niveau, et l'on n'a besoin de faire la conversion que sur le dernier nombre, c'est-à-dire sur la différence qui représente la correction, et que l'on multiplie par la valeur angulaire d'une partie du niveau.

Pour bien se rappeler le sens de la graduation du niveau, on peut s'habituer à noter les nivellements en inscrivant toujours en premier lieu la lecture de l'extrémité voisine de l'oculaire, c'est-à-dire de l'observateur. Mais il vaut encore mieux inscrire une fois pour toutes les renseignements relatifs à la graduation, déterminer la position directe et marquer si les deux graduations, niveau et lecture du cercle, croissent dans le même sens ou dans le sens inverse.

On remarquera que cette observation nous donne uniquement l'inclinaison de l'axe vertical projetée sur le vertical de l'astre : c'est la seule donnée nécessaire pour la réduction des distances zénithales. La position absolue de cet axe dans l'espace se détermine par deux nivellements complets, exécutés dans deux positions à angle droit : elle s'exprime alors par l'azimut de la ligne des nœuds sur le cercle horizontal et par l'inclinaison de l'axe sur un plan vertical passant par cette ligne des nœuds.

Si l'on mesure sans retournement des *différences* de distances zénithales et si le niveau ne garde pas la même position dans les deux pointés, il faut corriger la différence des deux lectures. Supposons qu'on observe dans la position directe.

Pour le premier objet, en conservant les conventions et notations établies, la lecture L sera

$$L = z + \zeta + d - N,$$

et pour le deuxième objet,

$$L' = z + \zeta' + d' - N;$$

d'où l'on tire

$$\zeta' - \zeta = L' - L - (d' - d).$$

On trouverait de même pour la position inverse

$$\zeta' - \zeta = L' - L + (i' - i).$$

Pour ne pas faire erreur sur le sens des corrections, il y a avantage à mettre la formule générale sous la forme

$$2\zeta = (D - d) - (I - i)$$

qui montre que l'on peut corriger chaque lecture prise à part de la lecture correspondante du niveau. Sous cette forme, il n'y a plus d'ambiguïté pour la correction des différences, puisque chaque terme de la différence est corrigé d'avance. Cela revient à rapporter les deux observations à une position du niveau correspondant à la lecture zéro.

Nous allons réunir dans un exemple les observations et calculs d'une distance zénithale double observée au théodolite. Voici comment on dispose le carnet d'observations.

Théodolite réitérateur n° 1 de Brunner (à microscopes).
Observations de distances zénithales du Soleil :

Lunette.	Bord.	Heure.	Lecture	Microscope de droite.	Microscope de gauche.	NIVEAU Lectures observées.	NIVEAU Lecture calculée.
G	Sup.	$7^h\,16^m\,56^s,4$	330° 48′	7′ 8″	7′ 18″	11,2 21,6	16,4
				7 15	7 21		
D	Inf.	23 39, 2	82° 16′	4 14	5 3	8,8 19,8	14,3
				4 6	5 4		

Le cercle est divisé en 2160 parties de 10′ chacune. Les lectures croissent de gauche à droite. La position directe est donc lunette à droite. Dans cette position, le zéro est du côté de l'objectif. Les deux divisions sont donc en sens inverse l'une de l'autre; et la formule à appliquer sera

$$2\zeta = (D - G) + (d - g).$$

La lecture supérieure de chaque microscope est celle qui correspond à la division qui précède, dans l'ordre de la graduation, la position du micromètre, la lecture inférieure à la division qui suit. Si nous prenons le premier groupe, nous voyons que la distance des divisions, qui est 10′, est évaluée à $10' 7''$: le repère du microscope se trouve à $10' - 7' 8'' = 2' 52''$ du trait précédent et à $7' 15''$ du trait suivant : on partage les $7''$ proportionnellement.

$$\frac{7''}{10'} = \frac{x}{2' 52''}, \qquad x = 2'', \qquad \frac{7''}{10'} = \frac{y}{7' 8''}, \qquad y = 5''.$$

La lecture réduite du microscope est donc

$$7' 8'' + 2'' = 7' 15'' - 5'' = 7' 10'',$$

et de même pour les autres. Les lectures réduites seront

$$G = 330^\circ 47' 14'',5,$$
$$D = 82^\circ 15' 2''.$$

La position directe donnant une lecture plus faible, on y ajoute 360° et on trouve

$$D - G = 111^\circ 27' 47'',5.$$

Reste à corriger de l'erreur du niveau. Pour cela on a fait les opérations qui suivent :

Pointé une arête de toit sous le fil horizontal dans deux positions successives du niveau.

	Cercle : lecture réduite.	Niveau.	Lecture conclue du niveau.
	$106^\circ 45' 49'',5$	$0^p,0 \quad 11^p,4$	$5^p,7$
	$106\ 42\ 42\ ,0$	$18^p,0 \quad 29^p,3$	$23^p,65$
Différence....	$3\ 7\ ,5 = 187,5$		$17^p,95$

Le quotient $\frac{187,5}{17,95} = 10'',42$ est la valeur angulaire d'une partie du niveau et la formule complète de correction s'écrira

$$2\zeta = (D - G) + 10'',42\,(d - g).$$

On a ici

$$d = 14,3, \qquad g = 16,4, \qquad d - g = -2,1,$$

$$10'',42 \times -2,1 = -21'',9,$$

et, comme on a trouvé

$$D - G = 111°27'47'',5,$$

on aura

$$2\zeta = 111°27'25'',6.$$

Les bords du Soleil ayant été observés alternativement, ce nombre est la double distance zénithale du centre.

Nous avons écrit les heures de l'observation afin de donner un spécimen général de la disposition à adopter.

56. — Autres corrections instrumentales.

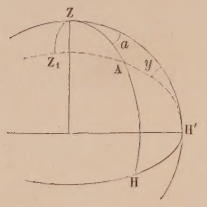
Le théodolite est destiné à mesurer des azimuts et des distances zénithales. Les erreurs que comporte son installation sont : l'erreur de collimation, l'inclinaison de l'axe vertical, l'inclinaison de l'axe horizontal. Chacune de ces erreurs en produit une sur l'azimut et une sur la distance zénithale; cela fait un total de six corrections à déterminer. On devra commencer par rectifier l'instrument aussi bien que possible et par rendre les erreurs très petites; alors, par analogie avec le cercle méridien, nous pourrons les calculer séparément et indépendamment les unes des autres, à condition de ne pas appliquer les résultats trouvés aux observations très voisines du zénith, car alors les formules seraient en défaut.

Inclinaison de l'axe vertical. — Nous venons d'étudier la correction qui en résulte pour la distance zénithale, nous l'avons détachée à dessein de l'ensemble des corrections, parce que c'est de beaucoup la plus importante et celle qu'on ne peut éliminer par

aucune combinaison des observations. Voyons l'erreur occasionnée *sur l'azimut* par cette inclinaison. Par hypothèse, l'axe optique coïncide avec l'axe géométrique de la lunette, puisque nous calculons chaque correction en supposant les autres nulles. Il décrit donc un plan perpendiculaire à l'axe horizontal de la lunette. Nous considérons l'inclinaison totale de ce plan sur un vertical passant par la lunette horizontale.

Soit A le point visé (*fig.* 31). Si la lunette décrivait un cercle vertical ZAH, la lecture azimutale se ferait en H. Mais comme elle

Fig. 31.



décrit un plan AH′, tel que l'angle $AH'Z = \gamma$, la lecture se fera en H′ : la correction est donc l'angle $HZH' = a$.

Le triangle ZAH′ nous donne

$$\frac{\sin a}{\sin AH'} = \frac{\sin \gamma}{\sin \zeta};$$

remplaçant $\sin a$ et $\sin \gamma$ par les arcs

$$a = \gamma \frac{\sin AH}{\sin \zeta},$$

AH′ diffère peu de AH, c'est-à-dire de $90^\circ - \zeta$, au moins tant que ζ n'est pas du même ordre de grandeur que γ et a. Soit donc

$$AH' = 90^\circ - \zeta - \varepsilon,$$

on aura

$$\sin AH' = \cos\zeta \cos\varepsilon - \sin\zeta \sin\varepsilon,$$

ε étant de même ordre de grandeur que γ et a, on négligera son carré, on aura ainsi

$$a = \gamma \frac{\cos\zeta - \varepsilon \sin\zeta}{\sin\zeta} = \gamma (\cot.\zeta - \varepsilon),$$

et puisque $\varepsilon\gamma$ est aussi du deuxième ordre,

$$a = \gamma \cot. \zeta.$$

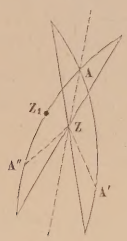
L'erreur sur la distance zénithale se compose des deux erreurs dues :

1° A la non verticalité de l'axe principal ;

2° A ce que les deux axes de rotation ne sont pas perpendiculaires entre eux.

La première cause d'erreur est éliminée par la correction déjà étudiée en tant qu'il s'agit de la composante de cette inclinaison parallèle au plan du cercle vertical. La composante perpendiculaire, combinée avec l'inclinaison de l'axe horizontal de rotation sur le

Fig. 32.



plan du cercle horizontal produit une petite correction généralement négligeable. Considérons d'abord cette dernière : dans la figure précédente Z ne représentera plus le zénith, mais le pôle de l'axe vertical. Sur la figure 32, nous avons représenté, avant et après retournement la projection horizontale du grand cercle intercepté par la lunette sur la sphère dans son mouvement autour de l'axe horizontal. On voit que l'arc réellement décrit entre les deux pointés et lu sur le limbe est projeté en AA'' ; son milieu Z_1 est la projection orthogonale du point Z sur cet arc AZ_1A'' ; et, en se reportant à la figure, on a, dans le triangle rectangle ZZ_1A,

$$\cos \widehat{ZA} = \cos \widehat{Z_1A} \cos a.$$

Puisque $\cos a$ ne diffère de l'unité que d'une quantité du

deuxième ordre, on peut écrire

$$\cos \widehat{ZA} = \cos \widehat{Z_1 A}.$$

L'arc projeté est donc sensiblement égal à la distance vraie mesurée à partir du zénith instrumental.

Maintenant si l'on projette cette distance sur le vrai vertical, Z devient le zénith et le même raisonnement prouve que l'axe n'est pas altéré, sauf le cas où a est grand, c'est-à-dire ζ très petit.

L'inclinaison γ qui figure dans l'erreur d'azimut est fonction de l'inclinaison i de l'axe vertical sur la verticale, et de l'angle $90 - i'$ qui fait l'axe horizontal avec l'axe vertical. Pour la déterminer, convenons de prendre pour origine des azimuts la position de l'instrument dans laquelle l'axe de rotation, supposé d'abord défini par l'axe commun des deux tourillons est dans le plan déterminé par le zénith et l'axe vertical. Soit H_0 le point où cet axe horizontal prolongé du côté du cercle vient couper la sphère céleste. Faisons tourner la lunette d'un angle α autour de l'axe vertical, et soit H la nouvelle position du point H_0. Soit P le point où l'axe vertical vient chercher la sphère.

Le côté ZH sera égal à $90^\circ - \gamma$ et l'on aura dans le triangle PZH

$$\sin \gamma = \sin i' \cos i - \cos i' \sin i \cos \alpha,$$

ou, avec le degré d'approximation convenu,

$$\gamma = i' - i \cos \alpha.$$

Nous avons le moyen de déterminer i par le niveau parallèle au cercle vertical, i' par le niveau à cheval sur l'axe horizontal; si l'on connaît α, γ sera connu.

Remarquons tout de suite que $\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\cos i''}{\cos \gamma} = 1$ au deuxième ordre près; on a donc approximativement

$$A = \alpha.$$

Le procédé le plus simple et le plus élégant pour déterminer les trois quantités i, i' et α consiste à faire trois nivellements de l'axe horizontal, dans trois positions de la lunette équidistantes de 120°

en azimut; α aura les valeurs successives

$$\alpha_1, \qquad \alpha_1 + 120^\circ, \qquad \alpha_1 - 120^\circ.$$

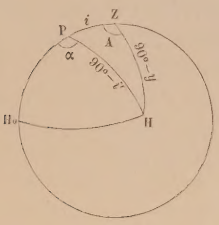
On aura alors les trois équations

$$y_1 = i' - i\cos\alpha_1,$$

$$y_2 = i' - \frac{i}{2}\cos\alpha_1 + \frac{i\sqrt{3}}{2}\sin\alpha_1,$$

$$y_3 = i' - \frac{i}{2}\cos\alpha_1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}\sin\alpha_1,$$

Fig. 33.



d'où l'on conclut facilement

$$i' = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$i\sin\alpha_1 = \frac{y_0 - y_3}{\sqrt{3}},$$

$$i\cos\alpha_1 = y_2 + y_3 - 2y_1.$$

On tirera de là α_1, c'est-à-dire la distance azimutale de la première observation au point H_0 : si L est la lecture correspondante, $L + \alpha$ sera celle du point H_0.

Le point H_0 une fois connu, on connaîtra la variable α pour une position quelconque de la lunette, par la lecture de l'angle azimutal correspondant, comparée à $L + \alpha_1$.

Pour la discussion et l'application, on fera attention au sens dans lequel croît la graduation et aux signes des quantités i, i' et y.

i est compté positivement du zénith vers le point H_0 : γ et i' seront positifs si les arcs ZH et PH sont moindres qu'un angle droit.

Il convient de se rappeler que si la perpendiculaire à l'axe horizontal incline vers la droite de l'observateur et si l'on compte les azimuts comme nous sommes convenus de le faire, dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, l'azimut observé sera trop grand; la correction sera donc *soustractive de l'azimut* : elle sera soustractive de la lecture si les lectures croissent dans le même sens, et additive à la lecture si les lectures croissent en sens inverse des azimuts.

Par construction, l'inclinaison de l'axe horizontal de rotation doit être égale à i', mais, dans les théodolites excentriques, il peut arriver qu'en réalité la lunette tourne autour d'un axe légèrement incliné sur l'axe commun des tourillons sur lesquels on pose le niveau. On reconnaîtra cette erreur et l'on déterminera sa valeur en observant un même point directement et par réflexion dans un bain de mercure. Dans ce cas, γ reste le même : la distance zénithale de l'image réfléchie sera de $180° - \zeta$ et l'on aura les deux corrections d'azimut

$$\gamma \cot \zeta \qquad \text{et} \qquad \gamma \cot (180° - \zeta) = -\gamma \cot \zeta.$$

La différence entre les deux lectures sera donc $2\gamma \cot\zeta$. Si elle diffère de la différence que l'on calculerait avec les valeurs admises de ζ et γ, cela tient à l'existence du défaut que nous considérons. Soit δA la différence des deux lectures, $\delta A - 2\gamma \cot\zeta$ sera donc l'erreur due à ce que le i' mesuré n'est pas le i' réel. Soit alors η_1 la correction à appliquer à i', de sorte qu'au lieu de i' mesuré il faille prendre $i' + \eta_1$, on aura

$$\delta A - 2 (i' + \eta_1 - i \cos z) \cot \zeta = 2 (\gamma + \eta_1) \cot \zeta$$

et, par suite,

$$\eta_1 = \frac{\delta A}{2} \operatorname{tang} \zeta - \gamma$$

d'où l'on tirera la valeur de η qui peut être regardée comme constante pendant un temps assez long. Il va de soi que pour le calcul de δA il est nécessaire d'avoir égard au mouvement de l'astre en

azimut dans l'intervalle des deux observations, pour réduire la deuxième lecture à ce qu'elle eût été si l'astre ne s'était pas déplacé.

Dans les théodolites bien construits, on peut arriver à réduire i' en agissant sur les vis de rectification de l'axe horizontal : mais cette rectification est généralement moins parfaite que celle de l'axe vertical. Il arrive, chose en apparence paradoxale, que cette dernière est plus nécessaire pour les mesures d'azimut que pour celles de distance zénithale; pour celles-ci la correction est en effet facile à déterminer et à appliquer, tandis que pour celles-là elle exige des observations et des calculs supplémentaires.

Elle ne s'élimine pas en croisant les observations, puisqu'elle reste la même après le retournement; si l'axe vertical penche vers la droite, dans la position directe, il penchera encore vers la droite dans la position inverse, a garde le même signe et ne s'élimine pas de la moyenne des lectures. Il en est autrement de l'angle que fait l'axe horizontal avec l'axe vertical : si l'axe vertical est bien rectifié, l'axe horizontal faisant avec lui un angle constant, les positions de la lunette seront symétriques par rapport au vertical de l'astre supposé fixe, et le plan bissecteur de l'angle des plans décrits par la lunette dans les deux positions sera exactement vertical : par suite, l'erreur s'élimine dans la moyenne des deux observations (Voir *fig.* 32).

L'inclinaison i peut être très atténuée; en tout cas elle est facile à mesurer; le retournement dispense de connaître i et η : il y a donc tout avantage à faire des observations alternatives dans les deux positions ou *observations croisées :* on élimine de plus par là l'erreur de collimation comme on va voir.

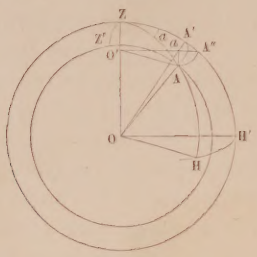
Si la perpendicularité de l'axe horizontal et de l'axe vertical était établie par construction, et vérifiée une fois pour toutes, l'inclinaison absolue de l'axe vertical et l'azimut d'inclinaison maximum se détermineraient sans difficulté par deux nivellements à angle droit exécutés avec le niveau parallèle au cercle vertical. Soient γ, γ' les inclinaisons respectives observées aux azimuts A et $A+90°$, il est facile de voir que l'inclinaison maximum Y correspond à l'azimut $A+x$ en faisant

$$\operatorname{tang} x = \frac{\gamma'}{\gamma}, \qquad Y = \frac{\gamma}{\cos x} = \frac{\gamma'}{\sin x}$$

et ayant égard aux signes de y' et y pour déterminer l'angle correspondant à tang x.

L'axe géométrique de la lunette est *par définition* perpendiculaire à l'axe horizontal. La *collimation* est l'angle c que fait l'axe géométrique avec l'axe optique. L'axe optique décrit un cône de révolution autour de l'axe horizontal, ayant pour trace sur la sphère céleste un petit cercle : ce petit cercle est vertical si les rectifications d'inclinaison sont faites. Si la collimation était nulle, la lecture azimutale correspondrait au plan passant par le point A″ visé (*fig.* 34) et le zénith, soit le point H′. Mais par l'effet de la colli-

Fig. 34.



mation le point visé auquel on rapporte la lecture H′ est en réalité en A, et son vertical est ZAH. L'erreur d'azimut est égale à l'angle $A'ZA = H'OH = a$.

Si par AO on mène un plan perpendiculaire au plan vertical, qui sera un plan méridien du cône, l'angle AOA′ ou l'arc AA′ représenteront la collimation c, et le triangle AA′Z rectangle en A donnera

$$\sin a = \frac{\sin c}{\sin \zeta} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{c}{\sin \zeta}.$$

En supposant la graduation dans le sens des azimuts croissants, cette correction sera soustractive de la lecture azimutale, faite lunette à droite, si la partie de l'axe optique dirigée de l'axe de rotation vers l'objectif fait avec l'axe de rotation un angle obtus : lunette à gauche, la correction est additive dans les mêmes conditions. On l'élimine donc en prenant la moyenne des lectures de deux observations faites cercle à droite et cercle à gauche.

On voit que cette erreur est toujours plus grande en valeur absolue que la collimation ; elle devient très grande près du zénith : et, en effet, pour un point dont la distance zénithale est supérieure à la collimation, il est aisé de voir géométriquement que pour pouvoir faire l'observation il faudrait mettre la lunette à 90° du plan azimutal de l'objet, et que par conséquent la correction serait de 90°.

L'erreur introduite par la collimation dans la mesure des distances zénithales est beaucoup moins importante. Pour l'évaluer, remarquons que le fil horizontal étant supposé bien rectifié, la lecture de la distance zénithale sera la même pour tout point bissecté par ce fil. En réalité, la lecture ne sera celle correspondant à la vraie distance zénithale que pour le point du fil horizontal où celui-ci serait rencontré par le fil vertical idéal sans collimation, lequel au lieu de décrire un cône, décrirait un plan. Pour les autres points il y a une erreur, car le fil horizontal a pour trace sur la sphère céleste un grand cercle perpendiculaire au cercle vertical, tandis que le lieu des points de même distance zénithale est un petit cercle parallèle à l'horizon. Le fil sans collimation décrit le cercle ZA′H′, et l'arc ZA′ est la distance zénithale mesurée Z_1. La distance zénithale vraie est $\zeta = ZA$, et le triangle rectangle ZAA′ nous donne

$$\cos\zeta = \cos\zeta_1 \cos c = \cos\zeta_1 \left(1 - 2\sin^2\frac{c}{2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\cos\zeta_1 - \cos\zeta = 2\cos\zeta_1 \sin^2\frac{c}{2}$$

ou bien

$$\sin\frac{\zeta+\zeta_1}{2}\sin\frac{\zeta-\zeta_1}{2} = \cos\zeta_1 \sin^2\frac{c}{2}.$$

On peut remplacer $\frac{\zeta+\zeta_1}{2}$ par ζ_1, $\sin\frac{\zeta-\zeta_1}{2}$ par $\frac{\zeta-\zeta_1}{2}$ et $\sin^2\frac{c}{2}$ par $\frac{c^2}{4}$; il viendra finalement

$$\zeta = \zeta_1 + \frac{c^2}{2}\cot\zeta_1.$$

Pour le calcul numérique, c est exprimé en secondes et il faudra multiplier le deuxième terme par $\sin 1''$.

Si ζ_1 est très petit, ce terme peut acquérir une valeur très appréciable. Il en résulte que, pour observer les distances zénithales petites, il faut réduire l'erreur de collimation autant que possible *et observer sous la croisée même des fils*. Cette erreur ne s'élimine pas par le retournement de la lunette.

Détermination de la collimation. — Nous avons vu comment on réduit la collimation à être très petite, en pointant un objet éloigné et amenant le fil vertical à bissecter cet objet dans les deux positions, directe et inverse, de la lunette. Si l'on opère avec un théodolite centré, l'éloignement de l'objet n'est pas de rigueur, pourvu que le tirage nécessaire à la mise au point ne diffère pas trop du tirage pour l'infini. Une lunette collimatrice peut être employée dans ce cas, et la graduation du cercle horizontal n'intervient pas. Elle intervient au contraire s'il s'agit de *mesurer* la collimation, qui est alors égale à la demi-différence des lectures obtenues en pointant un objet à l'horizon dans les deux positions de la lunette.

Pour le théodolite à lunette excentrique, le collimateur ne peut plus servir. Il faut alors que l'objet pointé soit assez éloigné pour que la *parallaxe* des deux positions de la lunette soit négligeable. Enfin le retournement à 180° se constate par l'identité des lectures dans les deux positions, la graduation du cercle intervient, et l'erreur commise sur l'évaluation de la collimation dépend des erreurs de lecture et de division.

Quand il s'agit de la rectification, on peut remplacer le point à l'infini par une mire portant deux traits dont la distance est précisément égale au double de l'excentricité de la lunette, et que l'on dispose assez loin, bien horizontalement et perpendiculairement à la ligne de visée. On peut encore pointer un signal pour lequel la parallaxe n'est pas négligeable, à condition que la deuxième lecture soit corrigée de l'excentricité, comme on verra plus loin ; mais alors il faut connaître la distance de l'objet.

On voit donc que si la rectification approchée de la collimation est facile, sa détermination numérique exacte présente des difficultés, provenant surtout des erreurs de lecture. En se reportant à la formule

$$a = \frac{c}{\sin \zeta},$$

on voit que pour une valeur donnée de c, a est d'autant plus grand que ζ est plus petit. De là résulte une méthode très précise pour trouver c. On choisit un astre dont la distance zénithale soit petite, on le pointe en azimut dans les deux positions de l'instrument en tenant compte par le calcul de sa variation d'azimut dans l'intervalle des deux pointés. La différence des deux lectures, soigneusement corrigées de l'erreur due à l'inclinaison et de la variation d'azimut dans l'intervalle, sera égale à $2a$, et l'on aura

$$c = a \sin \zeta.$$

Il faut tenir compte de la variation de distance zénithale entre les deux pointés et employer la distance zénithale moyenne.

L'observation de la polaire convient sous les hautes latitudes. On aura une précision très grande en observant une circompolaire à sa digression. On pourrait craindre d'observer *trop près* du zénith, puisque les erreurs résultant de l'inclinaison croissent rapidement.

Mais remarquons que la correction totale à apporter à chaque lecture est :

Pour la position directe,

$$\frac{c}{\sin \zeta} + y \cot \zeta,$$

pour la position inverse,

$$-\frac{c}{\sin \zeta} - y' \cot \zeta;$$

de sorte que la différence des lectures, après réduction au même instant, sera

$$\alpha = \frac{2c}{\sin \zeta} + (y - y') \cot \zeta.$$

On en tire

$$c = \tfrac{1}{2} [\alpha \sin \zeta - (y - y') \cos \zeta].$$

$y - y'$ est nul si l'axe vertical est bien rectifié ; c'est toujours une faible quantité qui peut être connue avec une exactitude suffisante. Dans la majorité des instruments le niveau est plus précis que la graduation, surtout quand on emploie des verniers. L'erreur sur c provenant d'une erreur sur α sera donc d'autant plus petite que ζ est plus petit.

Erreur d'excentricité. — Si l'on vise avec une lunette excentrique, l'axe optique de celle-ci fait un certain angle avec la droite qui joint le centre O du limbe horizontal au signal B. Soit ε cet angle ; soit $OA = e$ la distance de l'axe optique à l'axe vertical; enfin, soit $OB = D$ la distance de l'objet : on voit qu'à l'horizon

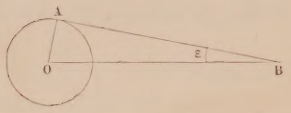
$$\sin\varepsilon = \frac{e}{D} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = \frac{e}{D \sin 1''}.$$

Pour une distance zénithale ζ, on aurait

$$\sin\varepsilon = \frac{e \sin\zeta}{D}.$$

C'est la correction qu'il faut apporter à la lecture, pour avoir la

Fig. 35.



lecture qu'on aurait faite si la lunette avait été centrée. Nulle pour les astres puisque D est infini, elle change de signe quand on passe de la position directe à la position inverse. Cette erreur s'élimine donc en même temps que celles de collimation et d'inclinaison, par l'emploi des observations croisées. Si la collimation et l'inclinaison étaient nulles, 2ε représenterait la différence des lectures dans les positions directe et inverse. Connaissant D, on peut calculer 2ε, et en tenir compte pour la rectification de la collimation.

Il est inutile de décrire les modèles variés d'instruments de hauteur et d'azimut. Nous croyons pourtant devoir faire une mention spéciale du théodolite préconisé par M. d'Abbadie et employé par lui pour la Géodésie expéditive.

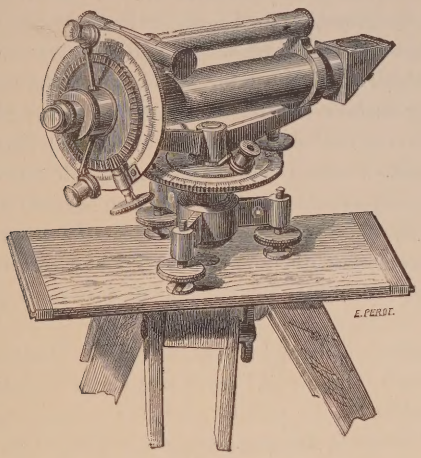
Dans cet instrument, auquel son auteur propose de donner le nom d'*Aba*, la lunette constamment horizontale et centrée peut tourner autour d'un axe vertical.

Devant l'objectif on place un prisme à réflexion totale qui peut

tourner autour de l'axe de la lunette, et dont la rotation est mesurée sur un cercle vertical dont l'oculaire occupe le centre. La rotation du prisme autour de l'axe de la lunette amène donc successivement dans le champ tous les points d'un même vertical; leurs distances zénithales sont mesurées par l'angle dont il a fallu faire tourner le prisme à partir du moment où il pointait le zénith.

La ligne de visée est toujours dans un plan perpendiculaire à

Fig. 36.



l'axe optique de la lunette et, pour voir un point, il faut diriger la lunette à 90° de ce point en azimut. Les vis de pression et de rappel sont supprimées et remplacées par des crémaillères. L'instrument, dans lequel on s'est efforcé de supprimer tous les organes inutiles, est simple, rustique et facile à rectifier. Ces qualités doivent le faire recommander aux voyageurs.

La théorie du théodolite ou altazimut s'applique sans modification aux boussoles de déclinaison et aux tachymètres, éclimètres, etc. Les instruments à lunette centrée sont les plus faciles à rectifier, mais le principe des rectifications reste toujours le même.

57. — Instrument des passages dans le premier vertical.

C'est à proprement parler un instrument d'observatoire : il est surtout utile pour la détermination très exacte des distances polaires. En voyage il n'est pas d'usage courant : pourtant si l'on dispose d'un cercle méridien muni d'une forte lunette et d'un niveau très sensible, mais dont le cercle vertical est gradué avec peu de précision, on peut l'installer dans le premier vertical et le faire servir à la détermination exacte de la colatitude. L'installation s'opère d'après les mêmes principes que celle du cercle méridien. Si l'on a préalablement déterminé le méridien à l'aide de ce dernier appareil, on y installe une mire, puis on substitue au cercle méridien un altazimut centré, en ayant soin que le triangle formé par les vis du pied ait même centre que le triangle correspondant de la lunette méridienne. On établit alors une mire ou un collimateur à 90° du méridien, en se servant de la graduation pour faire tourner la lunette exactement de 90°; puis on remet en place la lunette méridienne, et après nivellement on l'oriente dans cette nouvelle direction.

On peut aussi observer avec le théodolite l'azimut d'un astre et en conclure la lecture qui correspond à la direction perpendiculaire au méridien. La polaire sera très avantageuse, en se servant des Tables de la *Connaissance des Temps* qui suppriment tout calcul.

Enfin, dans les basses latitudes, où le mouvement azimutal des astres dans le premier vertical est très lent, on peut déterminer par un moyen quelconque l'état du chronomètre et calculer l'heure du chronomètre à laquelle une étoile donnée passe au premier vertical, et sa distance zénithale à ce moment. On cale l'instrument pour cette hauteur, et on l'oriente sur cette étoile comme on orienterait la lunette méridienne sur une circompolaire. Il faut connaître approximativement la colatitude.

L'angle horaire et la distance zénithale sont donnés par les relations faciles à apercevoir

$$\cos P = \cot\delta \operatorname{tang}\lambda, \qquad \cos\zeta = \frac{\sin\delta}{\sin\lambda}\cos P = \frac{\cos\delta}{\cos\lambda};$$

on fera choix d'une étoile ayant une distance zénithale assez grande, afin d'éviter l'intervention de grandes erreurs d'inclinaison.

Nous ne donnerons pas ici les formules de correction des observations dans leur généralité : elles s'établiraient sans difficulté ; mais comme l'usage de cet appareil est restreint à la mesure de la différence $\delta - \lambda$, on trouvera à l'article des colatitudes les formules nécessaires et la manière de conduire les observations.

L'inclinaison se mesure comme celle de la lunette méridienne : l'erreur d'azimut se déduit des observations. L'erreur de collimation sera déterminée par une des méthodes physiques déjà indiquées : astronomiquement, elle peut aussi être conclue des observations en comparant entre eux les résultats d'observations faites dans les deux positions de la lunette.

Mais généralement cette donnée et la distance angulaire des fils seront déjà connues par les observations méridiennes.

Un théodolite centré et même un altazimut excentrique peuvent être installés dans le premier vertical : mais dans le dernier cas il est nécessaire que le limbe horizontal soit gradué avec une grande perfection, et les corrections d'inclinaison exigent des observations très minutieuses et très soignées : dans ces conditions, il n'y a pas grande utilité à s'astreindre à l'observation dans le premier vertical.

D'ailleurs, l'instrument des passages au premier vertical, très utile sous les hautes latitudes, perd beaucoup de son intérêt quand on se rapproche de l'équateur. Le nombre des étoiles observables diminue en effet avec la latitude : à l'équateur il n'y en a en toute rigueur aucune. Le passage s'effectue avec une lenteur croissante, ce qui est une condition de précision, mais les occasions d'observer deviennent trop rares, et les intervalles trop longs permettent aux anomalies du chronomètre de devenir sensibles.

58. — Flexion des lunettes.

Les lunettes sont généralement fixées aux cercles divisés ou aux alidades par leur milieu. Le corps de la lunette est fait en métal et possède une certaine élasticité : les extrémités libres fléchissent

sous l'influence de leurs propres poids, et l'axe géométrique, qui devrait être une droite, prend une forme courbe. En considérant le centre de gravité de chacune des extrémités libres, on voit sans peine que le moment fléchisseur des poids constants est proportionnel au sinus de la distance zénithale à laquelle correspond la direction de la lunette.

Si les deux flexions sont égales, le réticule et le centre optique de l'objectif sont déplacés de quantités égales, l'axe optique reste parallèle à sa direction primitive et l'effet de la flexion sur les mesures de distances zénithales est nul. Si cette égalité n'existe pas, l'erreur qui en résulte sur la distance zénithale est proportionnelle à la différence des deux flexions, qui ont $\sin\zeta$ en facteur commun, et par suite à $\sin\zeta$. De là une correction qu'il faut appliquer aux distances zénithales observées. Cette correction est toujours très faible, sauf le cas où l'on emploie des lunettes coudées.

Pour déterminer la constante de la flexion, on dispose deux collimateurs horizontaux opposés, des deux côtés de la lunette, de manière à pouvoir pointer successivement les réticules des deux collimateurs avec la lunette à essayer.

Les deux collimateurs sont pointés d'abord l'un sur l'autre, et leurs axes optiques sont rendus sensiblement horizontaux et exactement parallèles. Si la lunette qu'on expérimente ne porte pas au milieu de son tube une ouverture spéciale, il faut l'écarter pendant qu'on règle les collimateurs, puis la remettre entre les deux. On pointe alors successivement les deux collimateurs, en observant le niveau : la double distance zénithale conclue, corrigée, s'il y a lieu, de la variation de niveau entre les deux pointés, doit être égale à 180°. Si elle est plus grande et égale à $180° + 2\varepsilon$, la correction de flexion sera, pour une distance zénithale de 90°, égale à $-\varepsilon$; et pour une distance ζ, elle sera $-\varepsilon\sin\zeta$; si l'on a observé une double distance zénithale inférieure à 180° de $2\varepsilon'$, la correction des observations sera $+\varepsilon'\sin\zeta$.

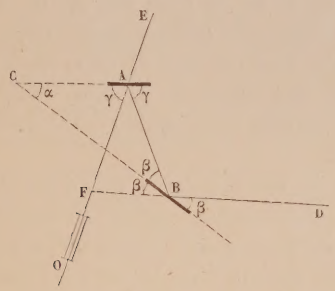
Il y a intérêt à étudier cette erreur systématique : on est souvent tenté de lui attribuer plus d'importance qu'elle n'en a réellement, et de mettre sur le compte d'une erreur de flexion des erreurs constantes, telles que celles qui proviennent du jeu des pièces, ou d'autres erreurs systématiques, telles que celles qui peuvent être

attribuées à une connaissance imparfaite de la réfraction. Les artistes s'attachent à équilibrer les lunettes d'une manière assez parfaite pour qu'il n'y ait pas de flexion sensible, surtout avec les instruments portatifs ; mais une différence de mise au point, l'addition d'un oculaire à prisme peuvent déranger l'équilibre primitivement obtenu.

59. — Instruments à réflexion.

Nous prendrons pour type des instruments à réflexion le cercle hydrographique. Deux miroirs plans sont disposés perpendiculairement au plan d'un cercle divisé. Le *petit miroir* fixé à demeure

Fig. 37.



près de la circonférence du cercle se compose d'une glace qui n'est étamée que sur sa moitié inférieure. Le grand miroir, formé par une glace entièrement étamée, est fixé sur une alidade mobile autour du centre du cercle. En le déplaçant ainsi on l'amène successivement à renvoyer sur le petit miroir les images des objets situés dans le plan du cercle. La partie du cercle opposée au petit miroir porte une pinnule ou une lunette braquée sur le petit miroir, et qui permet de recevoir à la fois dans l'œil, 1° par la partie non étamée, les rayons émanés des objets situés au delà du petit miroir dans la direction même de la ligne de visée, 2° par la partie étamée, les rayons partis du grand miroir et réfléchis une deuxième fois.

Soient A et B (*fig.* 37) les traces des deux miroirs, dont les plans font un angle α. Soit DB le rayon qui tombe sur le grand

miroir, et qui est réfléchi suivant BA, puis suivant AF dans la direction de la ligne de visée AO.

Soient δ les angles d'incidence et de réflexion, sur le grand miroir, γ les mêmes angles relatifs au petit miroir.

Le triangle ABC nous donne, par la considération de l'angle extérieur γ,

$$\gamma - \delta = \alpha.$$

Dans le triangle AFB,

$$F + 2\delta + (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ;$$

donc

$$F = 2\gamma - 2\delta = 2\alpha.$$

Donc la déviation du rayon lumineux est égale au double de l'angle des miroirs.

Si $\alpha = 0$ $F = 0$, le rayon n'est pas dévié. Admettons que les rayons émanent d'un objet suffisamment éloigné pour être sensiblement parallèles; l'œil placé en O verra alors cet objet directement par la partie non étamée de A, et par double réflexion suivant AF, et les deux images coïncideront : l'instrument mesurera un angle égal à zéro.

Si maintenant on fait tourner le grand miroir d'un angle α, on apercevra encore directement le point E : mais les rayons réfléchis par la partie étamée formeront l'image d'un point situé dans la direction BD, c'est-à-dire faisant avec les rayons issus de E un angle 2α. D'après cela il suffit de diviser la circonférence en 2×360 parties et d'appeler ces parties des degrés pour qu'on lise directement sur la circonférence la distance angulaire des points dont les images ont été amenées au contact. On arriverait au même résultat si, partant du point de parallélisme, on faisait tourner A vers la gauche : seulement les angles se rapporteraient aux objets situés à gauche du point de départ. La théorie ne considère d'ailleurs que les mouvements relatifs des deux miroirs, et pourvu que le petit miroir ne se déplace pas relativement à la lunette, il est indifférent de supposer l'un ou l'autre miroir mobile par rapport au cercle divisé : ils peuvent même l'être tous deux successivement.

L'axe de rotation se trouve généralement très voisin du grand miroir, mais cela n'est pas nécessaire, et le miroir peut occuper sans inconvénient une position plus ou moins excentrique, pourvu

que la condition relative au parallélisme des rayons soit satisfaite.

Voici les conditions qui doivent être remplies :

1° Les miroirs doivent être plans.

2° Les deux miroirs doivent être perpendiculaires au plan du limbe.

3° Les faces des glaces doivent être parallèles.

4° La ligne de visée doit être invariable et parallèle au plan du limbe.

5° L'axe de rotation de l'alidade doit passer par le centre de la graduation.

60. — Les miroirs doivent être plans.

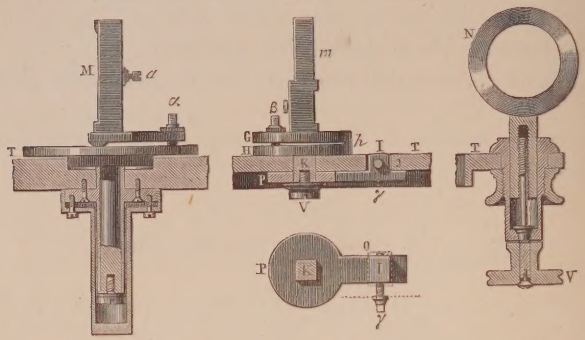
On est assuré que la surface réfléchissante est bien plane si l'image d'un objet réfléchie par cette glace ne subit aucune déformation. Si l'on soupçonnait un défaut de ce genre dans un miroir, on choisirait deux objets éloignés bien nets et suffisamment voisins l'un de l'autre pour pouvoir être vus ensemble par réflexion dans le miroir. On mesurerait au théodolite la distance angulaire de deux des points. Puis on ferait la même mesure sur l'image réfléchie dans le miroir placé horizontalement; on doit trouver le même angle, quelle que soit l'orientation de la glace. Une glace non plane doit être rejetée : il n'y a aucun parti à en tirer. Mais ce défaut est très rare : il est facile aux artistes de produire une surface suffisamment plane.

61. — Vérifier la perpendicularité des miroirs et du limbe.

Pour rectifier la perpendicularité des miroirs, on commence par le grand miroir. En mettant l'œil à peu près dans le plan du limbe et de manière à apercevoir dans le grand miroir une portion du limbe réfléchie, cette portion doit être en prolongement de celle qu'on aperçoit directement, et ne former qu'une même courbe. Une discontinuité de cette courbe s'apprécie assez facilement et indique une inclinaison du miroir, soit qu'il se produise un point anguleux à l'intersection des deux images, soit que l'une ou l'autre soit plus élevée. On juge d'ailleurs par

l'aspect des images si le miroir penche en avant ou en arrière, et l'on rectifie à l'aide de la vis placée derrière le grand miroir, qui

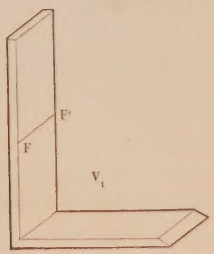
Fig. 38.



donne à celui-ci un mouvement de bascule autour de l'arête parallèle au plan du limbe.

Ce procédé de rectification n'est qu'approché. On arrive à une

Fig. 39.



plus grande rigueur en faisant usage de petits viseurs en forme d'équerre qui accompagnent tous les instruments.

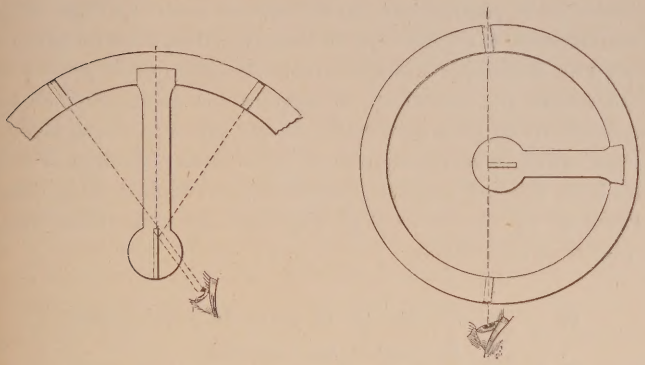
On s'assure de l'égalité parfaite des montants des deux viseurs; on les dispose sur le limbe placé horizontalement, l'un devant l'œil, l'autre derrière le grand miroir : en mettant l'œil dans le plan de leurs arêtes supérieures, il doit apercevoir l'image réfléchie du viseur oculaire en prolongement exact du viseur placé derrière le miroir, si celui-ci est perpendiculaire au plan du limbe. Si l'image

directe est plus haute que l'image réfléchie, le miroir penche en arrière; et *vice versa*. On peut aussi disposer les deux viseurs symétriquement par rapport au miroir et placer l'œil près du miroir; le viseur de gauche est alors vu directement, celui de droite par réflexion. Ce deuxième procédé est applicable au sextant; le premier s'applique au cercle (*fig.* 40).

La rectification se fait à l'aide de la vis du grand miroir.

On peut refaire l'observation en permutant les viseurs, pour

Fig. 40.



obvier aux effets résultant d'une petite inégalité possible de leurs dimensions.

Il faut vérifier si cette perpendicularité, obtenue pour une position de l'alidade, persiste pour toutes les autres; on répétera donc l'opération pour diverses positions du grand miroir et de l'alidade. C'est le moyen de s'assurer si le limbe est bien plan.

Le grand miroir étant rendu perpendiculaire au plan du limbe, le petit miroir le sera, pourvu qu'il soit parallèle au grand.

La condition nécessaire et suffisante est que l'on puisse amener en coïncidence exacte les deux images directe et doublement réfléchie d'un même point.

A la mer, on tient l'instrument horizontal, on installe la pinnule, de préférence à une lunette, et l'on vise à l'horizon; si l'image directe de l'horizon est en prolongement de celle qu'on voit sur la partie étamée du petit miroir, le parallélisme existe. Si l'image réfléchie

est plus élevée, le petit miroir penche vers l'observateur, et *vice versa*. On le rectifie à l'aide d'une vis qui permet de lui donner un léger mouvement de bascule autour d'un axe horizontal.

On peut aussi tenir l'instrument vertical et amener la coïncidence des deux images directe et réfléchie de l'horizon. Il faut que cette coïncidence persiste en faisant basculer l'instrument à droite ou à gauche autour de l'axe de la lunette, de manière à donner diverses inclinaisons au plan du limbe.

On peut encore rectifier sur un astre. On amène les images directe et réfléchie d'une étoile à être sur une même droite perpendiculaire au limbe. Si le parallélisme des miroirs est exact, les deux images se confondront à ce moment. Si l'image réfléchie paraît plus près du plan du limbe que l'image directe, le petit miroir penche vers l'observateur, et *vice versa* : on arrivera à la coïncidence en agissant sur la vis du petit miroir et au besoin sur celle de l'alidade.

Pour opérer la rectification avec le Soleil on procèdera de même après avoir mis une bonnette colorée devant l'oculaire de la lunette.

Enfin on peut se servir d'un objet terrestre bien net et éloigné de plus d'un kilomètre.

62. — Détermination du point de parallélisme. Correction instrumentale.

Les miroirs étant perpendiculaires au plan du limbe, si l'on vise deux points situés dans ce plan, le premier directement, le second par réflexion, on sera assuré que pour un angle convenable des deux miroirs l'image de l'objet réfléchi viendra se superposer à l'image de l'objet vu directement.

Pour mesurer l'angle entre deux objets, on commence par chercher le point de parallélisme ou point de départ des angles.

A cet effet, choisissant un point bien net, suffisamment éloigné pour que sa parallaxe instrumentale soit insensible, on le vise directement à travers la partie non étamée du petit miroir; puis on fait mouvoir l'alidade jusqu'à ce que l'image réfléchie du même point vienne se superposer à l'image directe. La lecture du vernier à ce moment est la quantité qu'il faudra retrancher des lectures ultérieures pour avoir les angles vrais. On l'appelle aussi la *collimation* du sextant; ici ce mot a un sens foncièrement différent de

celui qu'il a dans la théorie des lunettes : nous préférons l'expression d'erreur instrumentale ou mieux encore de *correction instrumentale :* ce dernier nom permet de trouver immédiatement le signe de la correction.

Soit maintenant à mesurer l'angle entre deux objets : visant à celui de gauche directement et mettant le limbe dans le plan des deux, un mouvement convenable de l'alidade du grand miroir amènera l'image réfléchie de l'objet de droite à coïncider avec l'image directe de l'objet de gauche. La lecture correspondante de l'alidade, dont on retranchera la correction instrumentale, sera l'angle cherché.

Le petit miroir porte des vis de rectification qui permettent de régler le point de parallélisme de manière à le faire concorder avec le zéro de la graduation. A cet effet on met le zéro du vernier de l'alidade en coïncidence exacte avec le zéro du limbe. En faisant mouvoir convenablement les vis qui commandent le mouvement du petit miroir autour d'une perpendiculaire au limbe, on établit la coïncidence des deux images du même objet, l'erreur instrumentale est alors zéro. Il n'y a pas grand intérêt à remplir cette condition très exactement. M. Hilleret a même fait voir qu'il est avantageux au point de vue de la précision de prendre le point de départ des angles à égale distance entre deux traits de la graduation. Si, par exemple, le limbe est divisé en arcs de 10′, on s'arrangera pour avoir une correction instrumentale d'environ 5′ ; on réduit par là une partie des erreurs qui proviennent de l'excentricité de l'alidade.

La meilleure détermination de l'erreur instrumentale est celle qui se fait en observant le Soleil. On amène l'image réfléchie du Soleil successivement au contact des deux côtés de l'image directe : la demi-différence des lectures donne le diamètre du Soleil, que l'on vérifie d'après les Tables. Leur demi-somme algébrique est la correction instrumentale changée de signe, ou mieux la lecture du point de parallélisme. On doit opérer sur le diamètre horizontal à cause de la réfraction qui raccourcit le diamètre vertical.

Ceci suppose que les rayons issus des deux objets ainsi que les rayons réfléchis se trouvent bien dans un même plan parallèle au limbe, et de plus que dans les deux observations, celle du parallélisme et celle de l'angle, les rayons réfléchis arrivent à l'œil dans la

même direction, c'est-à-dire se réfléchissent dans un même plan passant par l'œil et le milieu du petit miroir et perpendiculaire au limbe. L'observation du contact des images doit donc se faire dans le milieu du champ de la lunette. Pour faciliter la réalisation de cette condition, il est bon que l'axe de la lunette soit parallèle au plan du limbe. Une petite inclinaison du plan du limbe sur le plan des objets est sans importance, l'erreur qui en résulte sur les angles étant de l'ordre des différences entre un angle et sa projection, c'est-à-dire du carré de l'inclinaison des deux plans; elle est donc du deuxième ordre par rapport à l'inclinaison.

Pour arriver à mettre l'axe de la lunette parallèle au limbe, on pose l'instrument à plat sur un support fixe, une table par exemple. On remarque dans le plan du limbe un point éloigné et net, et l'on dirige la lunette astronomique vers ce point, après avoir rendu à vue deux des fils du réticule parallèles au limbe. L'image de l'objet doit se trouver au milieu de l'intervalle de ces deux fils : si elle ne s'y trouve pas, on l'y amène par un mouvement convenable des vis de rectification de l'anneau qui porte la lunette. On peut aussi tracer un trait noir, exactement à la hauteur de l'œilleton de la lunette, sur un mur à 7 ou 8 mètres de distance et opérer sur ce trait comme sur le point éloigné que nous avons supposé. Voici maintenant comment on vérifie ce parallélisme. Choisissant deux points bien nets, dont la distance angulaire est d'environ 110° à 120°, on amène leurs images au contact sur un des fils, celui par exemple qui est le plus rapproché du plan du limbe. Ayant fixé l'alidade dans cette position, on abaisse l'objectif par un mouvement de bascule de l'instrument, de façon à amener les objets sous le fil parallèle plus éloigné du limbe : si le contact persiste, la lunette est bien réglée. Si les images s'écartent l'une de l'autre, cela indique que l'objectif est trop près du limbe et qu'il faut le relever; inversement, si elles empiètent l'une sur l'autre, il faut abaisser l'objectif.

La hauteur de la lunette au-dessus du plan du limbe peut varier : il y a avantage, dans la plupart des cas, à la régler de telle sorte que le centre de l'objectif soit à la même distance du limbe que la ligne de séparation entre les parties étamée et transparente du petit miroir.

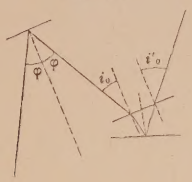
63. — Parallélisme des faces des glaces. Vérification et correction.

Cela posé, nous pouvons indiquer la méthode à l'aide de laquelle on vérifie le parallélisme des faces du grand miroir. Ayant fait les rectifications qui précèdent, on mesure l'angle entre deux points. Puis on enlève le grand miroir et on le renverse dans sa monture, ce qui équivaut à lui faire faire une rotation de 180° autour d'une normale à son plan, et à amener près du limbe l'arête qui en était le plus éloignée.

On rectifie l'instrument et l'on mesure le même angle : si la valeur trouvée est la même, les deux faces du miroir sont parallèles, sinon le miroir a une forme prismatique, et les observations ont besoin d'une correction que nous allons calculer.

Soit (*fig.* 41) φ l'angle que la normale au petit miroir fait avec

Fig. 41.



l'axe optique. Soit i''_0 l'angle d'incidence du rayon sur la face d'entrée du grand miroir, i_0 l'angle que fait le rayon réfléchi avec la normale après sa sortie dans la position de parallélisme, c'est-à-dire de coïncidence des deux images d'un même objet. On aura $i_0 + i''_0 = 2\varphi$.

Supposons maintenant que le miroir tourne d'un angle γ : l'angle des rayons des deux objets est $i' + i - 2\varphi$.

Cet angle devrait être 2γ : c'est l'angle lu. Mais l'angle vrai est $A = 2\gamma + \varepsilon$, ε étant la correction qu'il faut chercher.

On a d'ailleurs

$$i = i_0 + \gamma.$$

Soit maintenant

$$i' = i''_0 + \gamma';$$

l'angle des rayons est

$$i_0 + \gamma + i'_0 + \gamma' - 2\varphi = A.$$

On tire de là

$$\varepsilon = \gamma' - \gamma = (i' - i) - (i'_0 - i_0).$$

Soient encore n l'indice de réfraction du verre par rapport à l'air, r, r' les angles de réfraction; on a

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i'}{\sin r'} = n.$$

Mais si K est l'angle que fait la normale à la face réfléchissante du grand miroir avec le rayon réfléchi sur cette face, et α l'angle des deux faces du grand miroir, on a

$$r = K + \alpha, \qquad r' = K - \alpha$$

et

$$\sin i = n \sin(K + \alpha), \qquad \sin i' = n \sin(K - \alpha),$$

d'où l'on tire

$$\sin i - \sin i'$$

et ensuite

$$\sin \tfrac{1}{2}(i - i') \cos \tfrac{1}{2}(i + i') = n \cos K \sin \alpha.$$

Posons

$$\frac{\cos K}{\cos \frac{1}{2}(i + i')} = x \qquad \text{d'où} \qquad \sin \tfrac{1}{2}(i - i') = n x \sin \alpha.$$

Pour calculer x on tire de la première relation

$$(a) \qquad 1 - \sin^2 K = x^2 [1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}(i + i')].$$

Posons

$$\frac{i + i'}{2} = h \qquad \text{et} \qquad h - i' = i - h = \beta = \frac{i - i'}{2},$$

on a

$$\frac{\sin(h + \beta)}{\sin(K + \alpha)} = \frac{\sin(h - \beta)}{\sin(K - \alpha)} = n = \frac{\sin(h + \beta) + \sin(h - \beta)}{\sin(K + \alpha) + \sin(K - \alpha)} = \frac{\sin h \cos \beta}{\sin K \cos \alpha},$$

α et β étant du premier ordre de petitesse, on a, au deuxième ordre près,

$$n = \frac{\sin h}{\sin K},$$

remplaçant dans (a) $\sin K$ par $\frac{\sin h}{n}$ ou $\frac{\sin\frac{1}{2}(i+i')}{n}$, il vient

$$x\cos\frac{i+i'}{2}=\sqrt{1-\frac{\sin^2\frac{1}{2}(i+i')}{n^2}},$$

donc

$$\sin\tfrac{1}{2}(i-i')=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(i+i')}\sqrt{n^2-\sin^2\tfrac{1}{2}(i+i')}.$$

Pour la position du parallélisme,

$$\sin\tfrac{1}{2}(i_0-i_0')=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(i_0+i_0')}\sqrt{n^2-\sin^2\tfrac{1}{2}(i_0+i_0')}$$

d'où remplaçant les sinus par les arcs

$$\begin{aligned}\varepsilon&=(i'-i)-(i_0-i_0')\\&=2\alpha\left[\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\frac{1}{2}(i_0+i_0')}}{\cos\frac{1}{2}(i_0+i_0')}-\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\frac{1}{2}(i+i')}}{\cos\frac{1}{2}(i+i')}\right];\end{aligned}$$

d'ailleurs

$$\tfrac{1}{2}(i_0+i_0')=\varphi,\qquad \tfrac{1}{2}(i+i')=\varphi+\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma').$$

En prenant $\frac{1}{2}(i+i')=\varphi+\gamma$ l'erreur est de l'ordre de ε sur les lignes trigonométriques, par conséquent elle n'altère la valeur du radical que d'un infiniment petit dont le produit par α est négligeable; donc enfin

$$\varepsilon=2\alpha\left[\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}-\frac{\sqrt{n^2-\sin^2(\varphi+\gamma)}}{\cos(\varphi+\gamma)}\right];$$

α est positif si l'angle réfringent est du côté opposé à la lunette, comme dans la figure : il change de signe par le retournement.

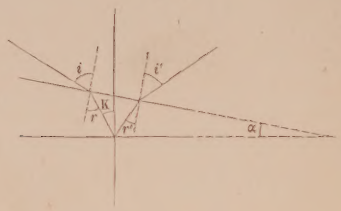
L'indice n est compris entre 1,5 et 1,8. On peut prendre $n^2=3$ pour le calcul. Si donc on mesure un même angle 2γ (*fig.* 42) d'abord dans la première position du miroir, puis après retournement du miroir dans sa monture, la différence des deux angles obtenus est égale à 2ε, et l'on en tire la valeur de α.

Un défaut de parallélisme des faces du petit miroir serait sans influence, la déviation du rayon ne dépend en effet que de l'angle

d'incidence et celui-ci est constant sur le petit miroir : l'effet en question est donc le même pour tous les angles et par suite pour l'angle zéro, ou position de parallélisme, et il disparaît dans les différences.

L'angle φ qui entre dans la formule précédente n'a pas besoin d'être connu avec une grande exactitude. On l'obtiendra avec une précision bien suffisante pour le calcul des termes de correction en tendant un fil qui passe par le milieu du petit miroir et par l'axe de la lunette, et mesurant la distance d de ce fil au centre du

Fig. 42.



cercle : on mesure aussi la distance r du milieu du petit miroir au même centre, et l'on a évidemment

$$\sin 2\varphi = \frac{d}{r}.$$

On peut mesurer directement cet angle en enlevant le grand miroir. On vise alors à l'horizon un objet bien éloigné A à travers la partie transparente du petit miroir ; et l'on remarque le point B de l'horizon dont l'image se réfléchit à ce moment sur la partie étamée. L'angle de A et de B est le supplément de 2φ. Si cet angle est trop grand pour être mesuré avec le cercle, on le partage en deux parties qu'on détermine séparément, en remarquant vers la direction de sa bissectrice un objet C.

64. — Méthodes de rectification de M. Gruey.

M. Gruey a indiqué une méthode simple et facile pour déterminer cette constante, et faire en même temps d'autres rectifi-

cations des instruments à réflexion. Cette méthode repose sur l'emploi d'un oculaire nadiral.

On place entre l'œil et l'oculaire de la lunette un petit verre à faces parallèles, dont le plan fait un angle de 45° environ avec l'axe optique : puis on dispose une bougie de telle manière que sa lumière réfléchie par la face du verre qui est tournée vers la lunette pénètre dans celle-ci et y éclaire les fils. En faisant tourner le grand miroir jusqu'à ce que son plan soit perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux miroirs, les rayons partis de l'oculaire se réfléchiront sur le petit miroir, viendront frapper normalement le grand miroir, qui les réfléchira dans la même direction, et par conséquent ils reviendront par le même chemin après une triple réflexion.

Il est bien évident d'ailleurs que l'angle dont il a fallu faire tourner le grand miroir à partir du point de parallélisme jusqu'à la position pour laquelle l'image directe des fils coïncide avec son image triplement réfléchie, est précisément égal à φ, et que par suite la différence des *lectures du limbe* qui correspondent respectivement à cette position et au point du parallélisme est égale à 2φ.

Ce procédé ne peut malheureusement pas s'appliquer au sextant; il exige que la graduation se prolonge à gauche du zéro d'une quantité suffisante pour permettre la mesure.

Le même oculaire nadiral permet de mettre l'axe optique de la lunette parallèle au plan du limbe. Une fois les miroirs rectifiés et perpendiculaires à ce plan, on met deux des fils du réticule parallèles au limbe : il faut alors que l'image triplement réfléchie de ces fils soit recouverte exactement par leur image directe.

On peut aussi trouver par ce procédé l'intervalle angulaire des deux fils verticaux. Cet intervalle est mesuré par l'arc que parcourt l'alidade quand on superpose un même fil vertical successivement aux deux images réfléchies des fils verticaux.

Enfin on déduit de là une manière de mettre deux des fils parallèles au limbe; il suffit que l'image réfléchie reste parallèle à l'image directe, en la faisant se déplacer relativement à cette dernière par le mouvement de la vis de l'alidade.

On peut établir soi-même un oculaire de ce genre sans grande difficulté. L'angle exact de 45° n'est pas de rigueur.

65. — Résumé des erreurs instrumentales.

Si l'on voulait faire servir les instruments à réflexion à des mesures de grande précision, il y aurait à examiner le moyen d'évaluer toutes les erreurs instrumentales et d'en déduire les corrections des angles.

Parmi ces erreurs nous considérerons d'abord celles qui proviennent :

1° De ce que les miroirs ne sont pas perpendiculaires au limbe.

2° De ce que l'axe optique n'est pas parallèle au limbe.

On se rend aisément compte sans développements particuliers que ces erreurs résultent de ce que le plan des objets à viser a une légère inclinaison sur le plan du limbe sur lequel se projettent les angles vrais; et que, par conséquent, l'erreur est du même ordre que la différence entre un angle et sa projection, c'est-à-dire du deuxième ordre par rapport à l'inclinaison des deux plans [*voir* Chapitre I, formule (31)]. Comme il est aisé de faire les rectifications assez parfaites pour que ces inclinaisons soient très petites, leur effet sera donc généralement négligeable. Il faut remarquer que dans les instruments à réflexion la position de l'axe optique ne s'apprécie qu'à vue; on s'efforce de produire les contacts vers le milieu du carré qui forme le réticule, ou vers le milieu du champ, quand on emploie la pinnule ou la lunette de Galilée; de là de légères erreurs qu'on ne peut guère éviter, mais dont l'importance est secondaire, et contre lesquelles le meilleur et unique remède est l'habitude de l'observation. Nous admettrons donc que l'on ait opéré avec un instrument suffisamment rectifié et nous ne présenterons pas le calcul de ces erreurs, non plus que de celle qui provient de ce qu'on a observé à une certaine distance de l'axe optique.

L'erreur de *collimation* n'est pas à proprement parler une erreur, mais une constante instrumentale qu'il faut déterminer chaque fois qu'on se met en observation, et qui n'a même pas de sens quand on emploie la méthode de la répétition.

Il faut seulement noter que si l'on observe des objets rapprochés, l'erreur de parallaxe intervient : mais si l'on prend la

précaution de déterminer la collimation sur l'objet le plus rapproché et de viser directement cet objet pour la mesure d'angle, sa parallaxe n'a pas d'influence sur les angles observés.

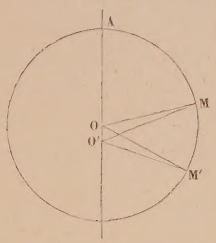
Nous avons vu la manière d'étudier le *prismatisme* du grand miroir et de corriger les angles de l'effet qui en résulte : cette erreur est généralement de peu d'importance, mais comme elle peut se présenter et que l'on ne peut l'éliminer que par une méthode d'observation pénible, le retournement du grand miroir, il est nécessaire de savoir s'en affranchir par le calcul.

66. — Calcul de l'erreur d'excentricité.

La seule erreur importante à considérer encore est celle qui résulte de l'*excentricité,* c'est-à-dire de ce que l'axe de rotation de l'alidade ne passe pas exactement par le centre de la graduation.

Les instruments à réflexion usités en France n'ont qu'un seul

Fig. 43.



vernier : l'effet de l'excentricité ne s'élimine donc pas par la méthode connue.

Soient O le centre de la graduation (*fig.* 43), O′ l'axe de rotation ; si l'alidade est en O′A, l'erreur d'excentricité est nulle. Si elle prend la position O′M, l'angle qu'elle a décrit, et qui est la moitié de l'angle des objets visés, est l'angle AO′M ; l'angle lu est AOM, et la correction est, dans le cas de la figure, — OMO′.

Si $OO' = e$ et $AOM = O$,

$$-\frac{\sin\varepsilon}{e} = \frac{\sin\frac{1}{2}O}{r} \quad \text{ou} \quad -\varepsilon = \frac{e}{r\sin 1''}\sin\tfrac{1}{2}O.$$

Pour un autre angle AO′M′,

$$-\varepsilon' = \frac{e}{r \sin 1''} \sin \tfrac{1}{2} O'.$$

Et la correction totale

$$-\varepsilon + \varepsilon' = \frac{e}{r \sin 1''} (\sin \tfrac{1}{2} O - \sin \tfrac{1}{2} O').$$

On ne peut pas trouver directement e, mais on peut mesurer $-\varepsilon + \varepsilon'$. Cela se fait d'abord en observant avec le cercle un angle connu, soit qu'on ait déterminé au théodolite l'angle de deux points terrestres, soit qu'on prenne la distance de deux étoiles connues, qui peut se calculer aisément.

Pour une position donnée du point de parallélisme, O est une constante inconnue.

On observera un certain nombre de distances, dont chacune fournira une équation de la forme

$$\mu = K \sin \tfrac{1}{2} O - K \sin \tfrac{1}{2} O'$$

dans laquelle μ est connu, et dont la combinaison permet d'éliminer O.

On remarque pour cela qu'on peut prendre, pour O′, O + L, L étant l'angle lu.

La formule est alors

$$\mu = K \sin \tfrac{1}{2} O - K \sin \tfrac{1}{2} O \cos \tfrac{1}{2} L - K \cos \tfrac{1}{2} O \sin \tfrac{1}{2} L.$$

Ayant plusieurs équations de cette forme, on en tire

$$K \sin \tfrac{1}{2} O \qquad \text{et} \qquad K \cos \tfrac{1}{2} O,$$

d'où l'on déduit K et O.

M. Hilleret recommande de prendre des angles de 0°, 65° et 120° pour le sextant.

Si l'excentricité était une constante, ce procédé suffirait. Mais il est nécessaire de donner un peu de jeu aux axes pour permettre le mouvement de l'alidade; il en résulte, selon l'expression de M. Faye, une excentricité *fluctuante*. On élimine les effets de ce jeu en multipliant les observations : on obtient ainsi un grand nombre d'équations de condition que l'on traite par la méthode des moindres carrés ou plus simplement par celle de Mayer.

Pour être complètement rigoureuse, cette théorie devrait encore tenir compte d'une autre erreur introduite par l'excentricité de l'alidade. La définition et l'usage du vernier reposent sur ce postulat, qu'à un même angle du vernier correspond, dans toutes les positions de l'alidade, un même angle du limbe. Cela n'est vrai que si les centres des deux coïncident. S'il n'en est pas ainsi, l'arc constant du vernier correspondra à des angles au centre du limbe variables, puisque la longueur de l'arc intercepté étant constante, le rayon varie. Or, avec des rayons différents, à la même longueur d'arc du vernier et du cercle limbe, correspondent au centre de ce dernier, des angles différents.

Si donc, par construction et pour une certaine position de l'alidade, $n - 1$ parties du limbe correspondent à n parties du vernier, dans d'autres positions on aura $n - 1 + x$ parties du limbe pour $n + x$ parties du vernier : x peut être positif ou négatif, entier ou fractionnaire, et sera fonction de l'angle O défini plus haut. Il est aisé de découvrir et de mesurer cette erreur. Il suffit de faire parcourir au vernier toute la circonférence, en mettant chaque fois son zéro en coïncidence avec un trait de la graduation, et notant le rang de la division pour laquelle la coïncidence se reproduit. Ce sera la division $n + x + 1$. Pour cette position on aura la correction que doit subir l'arc complémentaire lu sur le vernier par les considérations suivantes. Soit y la valeur angulaire de l'intervalle de deux divisions du limbe. La différence entre un intervalle du limbe et un intervalle du vernier devrait être donnée par la relation

$$(n-1)\,y = nz, \qquad y - z = \frac{y}{n},$$

dans laquelle z est la distance angulaire de deux divisions du vernier.

Si la coïncidence a lieu à la division du rang p du vernier, l'arc complémentaire est $\frac{py}{n}$.

Mais si l'on a

$$(n-1+x)\,y = (n+x)\,z,$$

$$y - z = \frac{y}{n+x}, \qquad p\,(y-z) = \frac{py}{n+x} = \frac{py}{n}\,\frac{n}{n+x},$$

on doit multiplier l'arc complémentaire par $\frac{n}{n+x}$.

Il faudra donc, si l'on recherche la précision, commencer par cette étude, et corriger les angles d'après une Table dressée au moyen de ces observations, et qui donnera x pour toute valeur de l'angle lu L.

Nous renverrons le lecteur désireux d'étudier plus à fond cette question au Mémoire de M. Hilleret (*Revue maritime et coloniale,* 1885). Mais, au point de vue pratique, les méthodes que nous venons d'exposer seront très généralement suffisantes.

Quand on répète les angles, on peut éliminer presque entièrement les erreurs d'excentricité et de graduation (*voir* plus loin).

L'erreur d'excentricité est loin d'être une quantité négligeable : elle peut atteindre 1′ dans de bons instruments. On peut l'éliminer par l'emploi de deux verniers équidistants, mais ce dispositif ne s'applique pas au sextant.

Ce qu'il y a de mieux à faire, c'est d'étudier le sextant dont on se sert, en mesurant des angles connus d'avance et déterminant empiriquement une Table de corrections. On peut, à cet effet, mesurer avec un bon théodolite des angles terrestres de grandeur variable, depuis 0° jusqu'à 120°. On peut aussi prendre les distances angulaires de paires d'étoiles, et calculer la vraie valeur de ces distances au moyen des coordonnées de ces étoiles. Il est nécessaire de connaître à peu près les distances zénithales à l'instant de l'observation, pour calculer les réfractions r et r'.

La distance angulaire d entre deux étoiles dont on connaît les ascensions droites α et α' (exprimées en arc) et les distances polaires δ, δ', est donnée par la formule

$$\cos d = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos(\alpha - \alpha')$$

que l'on transforme au besoin pour la rendre calculable par logarithmes.

Pour tenir compte de la réfraction, on calculera l'angle ϖ à l'astre, et l'on appliquera aux données tabulaires les corrections suivantes :

1° Pour la distance polaire..... $-r\cos\varpi$;

2° Pour l'ascension droite..... $\pm\dfrac{r\sin\varpi}{\sin\delta}$,

le signe supérieur pour les astres à l'ouest, le signe inférieur pour

les astres à l'est du méridien ; on calculera ces corrections pour les deux étoiles, et la distance d se trouvera au moyen des données corrigées.

Enfin on peut faire plusieurs tours d'horizon. Soit, par exemple, à déterminer l'erreur pour l'arc de 60°.

On met le vernier à 60° : on choisit un point à l'horizon, que l'on vise directement, et l'on note celui qui est vu par réflexion. On prend ensuite ce second comme point de départ, on en détermine de même un troisième. Quand on a pris six fois l'angle de 60°, on doit retomber sur le point de départ. La correction étant sensiblement constante pour des angles peu différents, on peut choisir les points les plus reconnaissables, et mesurer les distances en faisant chaque fois la lecture.

Supposons qu'on ait mesuré les angles suivants :

de A à B.....	59°35′10″
B à C.....	60 30 0
C à D.....	60 5 5
D à E.....	59 58 15
E à F.....	59 27 10
F à A.....	60 20 50
	359°56′30″

On fait la somme ; il s'en faut de 3′30″ que le tour d'horizon soit fermé : donc pour l'angle de 60° la correction est $+\frac{3'30''}{6} = +35''$. On opérera de même pour des angles de 15°, 30°, ...

67. — Verres colorés. Observations de nuit.

Quand on observe le Soleil, il est nécessaire de garantir l'œil par l'interposition de verres colorés. Si l'on mesure des doubles hauteurs à l'horizon artificiel, les deux images directe et réfléchie ont même éclat, et l'on peut interposer le verre coloré entre l'œil et l'oculaire. Il n'y a dès lors aucune erreur à craindre. Mais si l'on mesure la distance angulaire du Soleil à un autre point, l'horizon de la mer par exemple, ou la Lune, ou un point à terre, il faut interposer les verres colorés sur le trajet des rayons venant du Soleil. Le défaut de parallélisme de leurs faces introduit alors une erreur qu'on élimine comme on fait pour le défaut de parallélisme des

glaces de l'horizon artificiel ; on fait deux séries d'observations et, dans l'intervalle entre les deux, on retourne les verres colorés. On pourrait encore étudier les verres dont on se sert, mais cette opération serait fastidieuse, eu égard au grand nombre de verres que l'on est amené à combiner pour obtenir dans chaque cas particulier l'atténuation nécessaire.

Les observations du Soleil et des points terrestres sont faciles. Celles des étoiles sont plus difficiles. On a proposé différents dispositifs pour cela. On peut interposer entre l'œil et l'étoile un verre cylindrique qui étale l'image de l'étoile en ligne droite (sextants Laurent et Hue). Pour obvier à la difficulté de reconnaître l'horizon de nuit, on emploie des lunettes spéciales et des objectifs à large ouverture. M. le commandant Fleuriais dédouble l'image de l'étoile au moyen d'un prisme biréfringent; on amène alors l'horizon entre les deux images de l'étoile : sa visibilité est assurée au moyen d'une lunette astronomique à large objectif. M. le commandant de Magnac, frappé de la visibilité de l'horizon dans une jumelle, a essayé d'adapter une jumelle au sextant; il en a obtenu de très bons résultats. Enfin tout récemment, M. le commandant Fleuriais, reprenant la question, en est arrivé à ne plus viser à l'horizon, mais à se servir d'une toupie gyroscopique, qui, installée dans le sextant et munie d'un collimateur spécial, remplace la verticale et l'horizon, dans les cas où celui-ci n'est pas bien net.

68. — Des différents types d'instruments à réflexion.

On emploie plusieurs types d'instruments à réflexion : octant, sextant, cercle hydrographique, cercle à réflexion répétiteur, cercle à prisme, où un prisme à réflexion totale placé près de la lunette remplace le miroir. On dit que ce dernier instrument, muni de deux verniers opposés et qui permet la mesure d'angles aussi grands que l'on veut, donne d'excellents résultats. Nous n'avons jamais eu l'occasion d'en voir un modèle, et nous croyons qu'il n'en a pas été construit en France. Peut-être faut-il le regretter : quoiqu'il en soit, nous nous abstiendrons d'en donner la description (qu'on trouverait dans Chauvenet).

Le *sextant* est le type d'instrument le plus usité dans notre marine. Son limbe divisé, comme le nom l'indique, est le sixième

de la circonférence, et puisqu'un degré au centre du limbe représente un angle de 2°, l'instrument ne permet de prendre que des angles de 120° et au-dessous. Pour mesurer l'angle entre deux objets, on vise directement celui qui est le moins apparent, et l'on amène par réflexion l'image du deuxième objet à coïncider avec celle du premier. Si l'objet visé directement est celui de gauche, on place le sextant, lunette et miroirs vers le haut; si l'on vise directement l'objet de droite, il faut retourner l'instrument, les miroirs étant tournés vers le bas. Pour l'observation ordinaire de la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon de la mer, on tient le sextant de la main droite, le limbe divisé en bas; on vise directement à l'horizon, et l'on amène par réflexion l'image du Soleil à lui être tangente. Il faut que le plan du sextant soit bien vertical : on satisfait à cette condition, si, en balançant légèrement l'instrument autour de l'axe de la lunette, sans perdre l'horizon de vue, l'image du bord du Soleil décrit une courbe tangente à l'horizon. C'est généralement le bord inférieur qu'on observe. A l'horizon artificiel, on peut noter alternativement les contacts des deux bords, de ceux qui *mordent* et de ceux qui *démordent* : on s'affranchit ainsi de la correction du demi-diamètre. Pourtant les deux genres d'observation n'ont pas la même précision. La meilleure est celle des bords qui démordent (bord inférieur le matin, bord supérieur le soir) : on fait empiéter une des images sur l'autre et l'on attend de noter l'instant où le segment commun aux deux images disparaît; cet instant s'observe avec beaucoup de précision, puisque le mouvement relatif est double du mouvement absolu en hauteur.

Quand on observe la distance du Soleil à la Lune, on vise directement la Lune et l'on dispose l'instrument de telle sorte que les fils du réticule perpendiculaires au limbe soient parallèles à la ligne des cornes. L'instrument est alors dans le plan des deux astres.

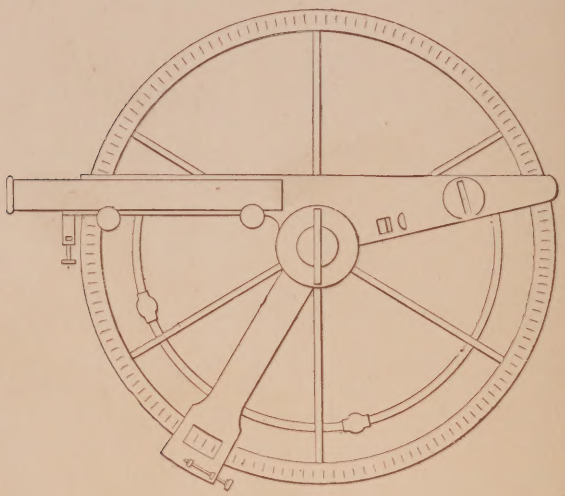
Pour les distances des étoiles à la Lune, il est préférable, pour éviter toute confusion, de viser directement à l'étoile.

Le sextant est muni de lunettes de divers pouvoirs amplifiants : les plus forts grossissements s'obtiennent avec la lunette astronomique, qui doit être préférée pour les observations précises. La lunette de Galilée sera choisie de préférence pour viser les points terrestres. La pinnule sert dans les cas où l'on a besoin d'un grand champ sans grossissement.

Le *cercle hydrographique* a le zéro fixe comme le sextant. Il est destiné à la mesure des angles terrestres et gradué à 1′ seulement. Il est mieux équilibré que le sextant, et le limbe porte deux graduations avec un zéro commun, de sorte que, visant directement un objet donné, on peut à volonté, et sans retourner l'instrument, viser à gauche ou à droite par réflexion. La disposition adoptée permet aussi de mesurer des angles très grands, jusqu'à 160° en cas de besoin. Mais l'observation devient alors difficile, l'image réfléchie étant très affaiblie, à peu près dans le rapport de cos 80° à l'unité (projection du grand miroir sur une direction parallèle au petit, *voir* la *fig.* 37).

Le *cercle à réflexion de Borda* (*fig.* 44) jouit de la propriété

Fig. 44.



de répéter les angles. Les erreurs sont les mêmes que celles du sextant : mais la répétition atténue l'erreur de division ; on peut annuler facilement l'erreur d'index, et en s'arrangeant de manière que l'arc total soit un nombre entier de circonférences, ou à peu près, on s'affranchit dans une large mesure de l'erreur d'excentricité.

On peut d'abord s'en servir comme d'un sextant. Pour cela, mettant le vernier au zéro, on rend libre l'alidade qui porte la lunette, et l'on amène au contact par ce mouvement les deux images d'un même point : à ce moment, on arrête le mouvement de la lunette que l'on fixe au limbe avec la vis de pression. Cela fait, on opère comme avec le sextant. C'est ainsi que l'on procède pour les mesures qui exigent plus de rapidité que de précision. Mais le principal avantage du cercle disparaît alors. Pour appliquer la méthode de la répétition et obtenir la précision que comporte l'instrument, on peut opérer directement ou par observations croisées. Soit à prendre l'angle entre deux points A et B. Supposons, pour fixer les idées, que les deux points soient à l'horizon, B étant vu à droite de A. On commence par mettre l'alidade du grand miroir au zéro. Puis, desserrant la vis qui arrête l'alidade commune au petit miroir et à la lunette, on vise l'objet A et l'on fait mouvoir la lunette jusqu'à ce que les deux images directe et réfléchie de A soient en coïncidence; les miroirs sont parallèles. On fixe l'alidade de la lunette et l'on rend mobile l'alidade du grand miroir, qu'on fait mouvoir de manière à amener l'image doublement réfléchie de B en coïncidence avec l'image directe de A. On a ainsi mesuré l'angle simple. Pour observer l'angle double, on remet en mouvement la lunette, et l'on ramène au parallélisme : puis, fixant la lunette et continuant à viser A, on amène l'image réfléchie de B au contact, par le mouvement de l'alidade du grand miroir. L'angle lu est alors le double de l'angle cherché.

Ce procédé exige deux pointés pour un seul angle : les chances d'erreur de pointé sont donc doublées.

L'usage des observations croisées de Borda permet d'aller plus vite et d'obtenir plus de précision ; voici comment on opère.

Après avoir mis l'alidade du grand miroir au zéro, on vise le point B et l'on fait mouvoir l'alidade de la lunette vers la droite, le sens dans lequel les divisions du limbe vont en croissant, jusqu'à ce que l'image de A vienne coïncider avec celle de B. On fixe l'alidade de la lunette, puis on vise directement A. A ce moment, l'image doublement réfléchie qui vient coïncider avec A est celle d'un point éloigné de A de l'angle AOB, mais situé *à sa gauche*. On desserre l'alidade du grand miroir, on la meut vers la droite : dans ce mouvement, on repasse par le parallélisme sans s'y arrêter,

et l'on arrive à amener l'image réfléchie de B sur A. On a ainsi parcouru sur le ciel un angle double de l'angle cherché.

Pour avoir l'angle quadruple, on recommence en laissant fixe l'alidade du grand miroir, desserrant celle de la lunette, visant directement au point B, et amenant le point A réfléchi au contact par un mouvement de l'alidade de la lunette vers la droite : puis on fixe la lunette, on vise au point A et l'on amène B réfléchi au contact par le mouvement de l'alidade du grand miroir.

Il peut arriver souvent qu'un des points soit moins facile à pointer que l'autre. C'est alors le point le moins apparent qu'il y a intérêt à viser directement. Dans ce cas on ne peut appliquer cette méthode, mais on opérera comme suit. Supposons que A soit le point qu'on veuille viser directement. Après la mise au zéro de l'alidade du grand miroir, on retourne l'instrument autour de l'axe de la lunette, lunette et miroirs en bas. On vise directement à A et l'on amène B au contact par le mouvement de l'alidade de la lunette. Puis on retourne le cercle autour du même axe, on vise A et l'on amène B au contact par le mouvement de l'alidade du grand miroir ; et ainsi de suite. Si c'est B que l'on veut viser directement, on fait la première opération, lunette et miroirs en haut. Il est facile de voir que les opérations reviennent au même que les précédentes.

On remarquera que deux pointés donnent ici l'angle double, tandis qu'avec la répétition simple, il faut deux pointés pour chaque angle simple.

Là n'est pas le seul avantage de cette méthode. Elle élimine les erreurs dues au prismatisme des miroirs ; car si ce défaut a pour effet de diminuer l'angle dans l'observation de droite, il l'augmente dans l'observation de gauche, et la demi-somme en est sensiblement exempte. C'est ce qui ressort de la symétrie des deux genres d'observations.

Si c'est de hauteurs d'astres qu'il s'agit, il suffit de permuter les mots *en haut* et *gauche,* et par suite les mots *en bas* et *droite.*

Ce mode d'observation dispense de la recherche du point de parallélisme ; il n'y a plus de correction instrumentale à chercher.

On voit qu'il faut donner alternativement à chacune des alidades un même mouvement angulaire par rapport à l'autre. Pour faciliter cette opération, on adapte à la grande alidade un demi-cercle non gradué, portant deux curseurs mobiles à frottement ; on dis-

pose ces curseurs de telle manière qu'ils comprennent un angle égal au mouvement angulaire relatif, de sorte que lorsqu'on met une des alidades en mouvement on est arrêté par le curseur au moment où l'on se trouve avoir décrit l'arc voulu.

Le cercle à réflexion n'a qu'un seul vernier, comme le sextant, et le rayon du cercle gradué étant moindre, l'erreur d'excentricité est plus forte dans le cercle que dans le sextant. Mais la répétition atténue naturellement cette erreur, et l'on peut même arriver à l'annuler, si la somme des arcs successifs est de 720°, c'est-à-dire si l'on est revenu au point de départ, après avoir fait un tour entier du cercle. Si l'on n'y revient pas exactement, on aura encore un bon résultat en recommençant les répétitions avec un nouveau départ. Il est clair, en effet, qu'au lieu du zéro du cercle on peut prendre une division quelconque, de même qu'on peut répéter les angles en suivant le sens inverse de la graduation.

Prenons pour nouveau point de départ la division 360°, diamétralement opposée à 0°. Après le même nombre de répétitions, nous arriverons à une lecture voisine de 360°, et ce sera comme si l'on avait fait la lecture avec deux verniers opposés.

Quand on observe la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon de la mer, ou sa distance à un point terrestre, on vise directement ce dernier point et le Soleil par réflexion. Il faut alors mettre des verres colorés. Si la distance angulaire est moindre que 35°, on met un grand verre coloré devant le grand miroir, à toucher celui-ci. Si elle est plus grande que 35°, c'est entre le grand et le petit miroir qu'on place un verre coloré de moindre dimension.

69. — Pratique des observations. Méthodes générales.

La valeur des observations dépend certainement des instruments : elle dépend encore plus de la manière de s'en servir. Quels que soient d'ailleurs ces instruments, leur maniement repose sur quelques principes très généraux et très simples.

Nous n'avons pas à dresser ici le catalogue de tout ce qu'un voyageur doit emporter avec lui pour faire de bonnes observations. Quand on dispose de ressources suffisantes pour l'acquisition d'un matériel considérable et qu'on n'est pas embarrassé pour le transporter, on se compose une collection variée d'instruments

aussi exacts que possible. Si l'on est obligé de se restreindre pour une raison ou pour une autre, on se contente des instruments les plus nécessaires : un altazimut, un bon cercle à réflexion, un chronomètre ou compteur, une bonne longue-vue et un horizon artificiel composent un bagage peu coûteux, peu encombrant et parfaitement suffisant. Certaines boussoles de déclinaison peuvent remplacer le théodolite.

Un instrument bien conçu doit donner la même précision par ses divers organes : le grossissement de la lunette, la sensibilité du niveau, la lecture de la graduation doivent conduire à peu près à la même approximation. On oublie souvent ce principe quand on munit les instruments de lunettes puissantes permettant de pointer à 1″ ou 2″ près, tandis que sur le cercle divisé on lit les angles à 10″ près, et que parfois le niveau n'est sensible qu'à 15″ ou 20″ près : un tel instrument est mal équilibré.

Dans une observation d'astre, c'est le pointé qui se fait généralement avec le plus d'exactitude. La précision des lectures est sensiblement augmentée par l'emploi des microscopes micrométriques, dont on ne saurait assez recommander l'usage. La lecture du niveau, au contraire, est difficile et sujette à des incertitudes. Il y a donc intérêt à augmenter le nombre et la précision des nivellements autant que celui des pointés. Ceci s'applique encore, bien que dans une moindre mesure, aux pointés au nadir. L'opération qui consiste à recouvrir l'image, faible et souvent tremblotante, du fil réfléchi, par l'image si noire du fil direct est moins précise que le pointé d'une étoile. La pratique qui consiste à observer un grand nombre d'étoiles et à faire peu de pointés au nadir peut se justifier dans les observatoires : ailleurs elle est contraire aux vrais principes. L'erreur sur la hauteur dépend autant de l'erreur sur la verticale que de celle sur le pointé de l'astre; ces erreurs, auxquelles il faut joindre les incertitudes sur la réfraction, sont incomparablement supérieures à celles que comportent les Catalogues et les éphémérides : il y a donc, nous le répétons, plus d'intérêt à multiplier les déterminations de la verticale, et à bien combiner le choix des étoiles en vue d'éliminer les erreurs de la réfraction, qu'à augmenter indéfiniment le nombre d'étoiles observées et celui des observations de chaque étoile.

On se rend facilement compte de ce fait, en examinant les diver-

gences des diverses sortes d'observations par comparaison des résultats partiels avec les moyennes.

Est-ce à dire qu'il faille se contenter d'un petit nombre d'observations? Nous sommes loin de le prétendre; au contraire, il sera toujours nécessaire de faire un nombre suffisant d'observations de même espèce pour être assuré de vérifications nombreuses; mais ces mots *nombre suffisant* ne s'appliquent pas à un seul genre d'opérations, ils concernent tout ce qui concourt à constituer l'observation complète, ainsi qu'on l'a fait ressortir.

Une des conditions essentielles à réaliser pour avoir de bonnes observations, c'est la *stabilité* des instruments : cette stabilité dépend de la construction de l'appareil, de son poids, du bon agencement de ses organes. Elle dépend, cela va sans dire, du sol sur lequel on s'établit. On doit étudier avec soin l'installation que l'on choisira; on se résignera à la rigueur à certains inconvénients accessoires pour trouver une base ferme, sur laquelle les mouvements de l'observateur ne dérangeront pas l'instrument. Si l'on est forcé d'observer sur un terrain sablonneux, il faut enfoncer le pied de l'instrument jusqu'à refus. Il est toujours préférable, quand les circonstances s'y prêtent, de prendre pour pied le rocher lui-même ou une construction en pierre ayant de bonnes fondations. On se défiera des sols tourbeux, fermes en apparence, mais très élastiques, qui transmettent à l'instrument toutes les vibrations et tous les mouvements qui se produisent dans le voisinage.

On doit apporter une attention toute particulière au choix des pieds portatifs. Plus ils sont lourds, meilleurs ils sont. Les pieds du théodolite doivent être disposés de telle sorte que chacune des trois branches soit composée de deux pièces de bois solidement reliées entre elles et aussi écartées que possible vers le haut, là où elles s'attachent au plateau, pour éviter les mouvements de rotation et de torsion.

On ne devra pas trop craindre le vent, quand il n'est pas assez fort pour rendre l'observation difficile. Le cercle méridien même donne de meilleurs résultats quand on observe en plein air; les réfractions sont alors plus normales que lorsqu'on opère dans une cabane fermée à travée méridienne. Plus l'horizon est dégagé, meilleures sont les conditions de l'observation.

Tout *pointé* revient à faire coïncider deux points par super-

position. Avec les instruments à réflexion ou les micromètres à double image, on est amené à superposer deux images du même point ou de deux points différents. Avec les lunettes à réticule, le pointé consiste à recouvrir l'image d'un point extérieur par l'image d'un point du réticule.

Les méthodes à suivre varient avec les dimensions de l'objet visé et avec la nature de l'élément qu'il s'agit de déterminer.

La première précaution à prendre consiste à égaliser autant que possible l'éclat des deux images qui doivent être superposées.

Si l'on observe le Soleil, il est nécessaire de munir l'oculaire d'une bonnette convenablement colorée. Il faut parfois recourir aux verres colorés, même pour l'observation de la Lune.

Quand on pointe des objets terrestres de petite dimension apparente et d'un faible éclat, ils disparaissent complètement derrière le fil, et la bissection de l'image par celui-ci est difficile à réaliser exactement. Dans ce cas, il est avantageux d'avoir deux fils parallèles, dont l'espacement est suffisant pour que l'image de l'objet soit visible entre eux, et assez petit pour que l'œil apprécie avec exactitude le moment où l'image est à égale distance des deux. La distance convenable dépend, comme on l'a vu, du grossissement de la lunette. Ce dispositif est encore avantageux pour le pointé au nadir. Il doit être d'autant plus recommandé qu'il n'empêche nullement l'observation à un fil unique qui est meilleure pour les étoiles brillantes : il suffit, dans ce cas, de connaître la distance angulaire des deux fils et d'en tenir compte comme d'une collimation.

70. — Instruments à réflexion.

Pour mesurer l'angle entre deux points, on place le cercle dans le plan qui les contient; visant à l'un d'eux, on amène l'image réfléchie de l'autre dans le champ, par un mouvement approprié de l'alidade du grand miroir. Il y a avantage à viser directement l'objet le moins facilement perceptible. Si la différence d'éclat des deux images est trop considérable, on peut faire varier le rapport de leurs éclairements soit par l'interposition de verres colorés, soit en faisant monter ou descendre la lunette parallèlement à elle-même; on fait ainsi varier le rapport entre les parties des sur-

faces étamée et nue du petit miroir qui servent à la formation des images.

Si l'on veut mesurer la distance angulaire du Soleil à un point moins brillant, on interpose des verres colorés devant le grand miroir : on vise le point terrestre directement et le Soleil par réflexion, et l'on établit le contact de telle manière que le point terrestre se superpose au bord de l'astre. Pour avoir la distance au centre du Soleil, il faut ajouter ou retrancher à l'angle obtenu et corrigé des erreurs instrumentales le demi-diamètre tabulaire. On s'affranchit de cette obligation en amenant les deux bords alternativement en coïncidence et prenant la moyenne des angles obtenus. On se débarrasse par là même de certaines erreurs systématiques de pointé dues à l'inégalité d'éclat des images, ou résultant d'une manière vicieuse d'observer.

Cette observation étant destinée à donner l'azimut, il est nécessaire de noter en même temps au chronomètre l'heure du contact : la moyenne des distances correspond sensiblement à la moyenne des heures.

Quand on opère avec de faibles grossissements et qu'on ne recherche que la précision nécessaire pour le dessin topographique, on peut établir la coïncidence à vue vers le centre même du Soleil. L'expérience nous a montré qu'un observateur bien exercé peut obtenir les azimuts en mer avec une précision suffisante pour la construction graphique en opérant comme suit. On se munit de deux instruments à réflexion : le premier destiné à mesurer la hauteur du Soleil, le deuxième pour la distance ; on les prépare tous deux en mettant l'alidade à la position approchée qu'elle doit occuper. Cela fait, avec le premier cercle on amène le bord inférieur du Soleil en contact avec l'horizon, on fait la lecture rapidement : avec l'autre cercle on prend la distance du centre du Soleil à l'objet, puis, sans lire, on reprend la hauteur avec le premier cercle ; finalement on fait les deux lectures qui restent. Avec un peu d'habitude, on arrive à une assez grande régularité d'allure pour que l'observation de distance corresponde sensiblement à la moyenne des hauteurs et que l'erreur commise de ce chef sur la hauteur ne dépasse pas 1′.

La distance du Soleil à l'horizon de la mer se mesure en visant directement à l'horizon et amenant au contact le bord du Soleil,

que l'on a eu soin d'affaiblir par l'interposition de verres colorés devant le grand miroir. Quand le Soleil est bas, sa trace à l'horizon est brillante et doit être elle-même attenuée par un verre un peu moins coloré que les précédents. Le sextant est tenu vertical : on lui imprime un mouvement de balancement autour de l'axe de la lunette : on voit alors le bord inférieur de l'image décrire un cercle que l'on peut amener à être tangent à l'horizon, soit en agissant sur les vis de rappel, soit en attendant que le mouvement de l'astre produise ce contact. La première méthode est celle qui convient lorsque le mouvement en hauteur est lent, aux environs de la culmination; la deuxième sera employée avec avantage si ce mouvement est rapide : on arrive ainsi à mieux concentrer son attention sur l'appréciation de l'heure du contact.

Il est plus facile d'observer le contact du bord inférieur, parce que, dans le balancement, le Soleil s'écarte de la ligne d'horizon; l'appréciation du contact du bord supérieur est beaucoup plus délicate. Il faut faire les corrections du demi-diamètre, de la réfraction, de la parallaxe et de la dépression de l'horizon.

Exemple. — Avec un sextant dont la correction instrumentale est — 3′20″, on a observé la hauteur du bord inférieur du Soleil 36°53′30″. Élévation de l'œil 6^m20.

	36°53′30″
Correction	— 3′20″
Dépression	— 4′34″
Hauteur apparente ⊙	36°45′36″
Réfraction moyenne	— 1′18″
Demi-diamètre	+ 15′46″
Parallaxe	+ 6″
Hauteur du ⊙	36°50′10″

Il convient d'observer plusieurs hauteurs et de retourner les verres colorés au milieu de la série pour éliminer l'effet de leur prismatisme sur la moyenne.

Quand on observe en mer, il est quelquefois difficile de suivre à l'oreille les battements du compteur : on fait alors compter à haute voix par un aide, soit le battement, soit la seconde entière.

On peut aussi donner un top à l'instant où le contact paraît établi et faire apprécier l'heure par l'aide.

Nous engageons les voyageurs et les marins à s'efforcer d'observer en écoutant et comptant mentalement les battements du compteur : on arrive ainsi à une précision supérieure : la chose n'est pas aussi difficile qu'on le croit généralement. On n'est même bon observateur qu'à cette condition : avec la méthode ordinaire, toute l'habileté de l'un des opérateurs peut être annihilée par les erreurs de son aide.

Pour mesurer les hauteurs à terre avec un instrument à réflexion, on a recours à l'horizon artificiel, soit à glace, soit à fluide. On place l'instrument dans le vertical de l'astre, après avoir mis une bonnette oculaire lorsqu'il s'agit du Soleil. On vise directement à l'image réfléchie et l'on amène l'image directe au contact. Si le mouvement en hauteur est rapide, le meilleur moyen de juger de l'instant du contact est de faire mordre l'un sur l'autre les bords qui tendent à se séparer, le bord inférieur dans la matinée et le bord supérieur dans la soirée, et d'attendre en suivant de l'œil la décroissance du ménisque commun aux deux images; l'instant où ce ménisque disparaît est apprécié avec beaucoup de netteté.

Une observation simple au sextant donne ainsi le double de la hauteur de l'astre : il reste à tenir compte de l'erreur instrumentale, de la réfraction, de la parallaxe et du demi-diamètre.

Si l'on a observé à l'horizon à glace, des nivellements faits avant et après l'observation avec retournement du niveau donneront l'inclinaison de la glace : les deux nivellements dont nous parlons se font en plaçant le niveau parallèlement au vertical de l'astre; il faut avoir bien nivelé d'avance dans le sens perpendiculaire. Si la glace est abaissée du côté de l'observateur, on ajoute à la hauteur simple la valeur de l'inclinaison : on la retranche, si la glace est élevée du côté de l'observateur.

Avec le cercle à réflexion, l'observation se fait de même. Nous avons exposé plus haut les procédés particuliers d'observation que comporte cet instrument, nous n'y reviendrons pas.

La bonnette oculaire dispense de l'emploi des autres verres colorés, et par conséquent des corrections qui s'y rapportent.

71. — Théodolite et altazimut. Observation des distances zénithales.

Dès que la hauteur est un peu grande, il faut employer l'oculaire à prisme, et pour avoir une mise au point constante il est avantageux de s'en servir toujours.

Si l'on ne dispose pas d'un collier (¹) qui assure la constance de cette mise au point, il faut s'habituer à observer en plaçant l'arête réfringente parallèlement au cercle vertical, afin de n'avoir pas à toucher à l'oculaire quand, après avoir observé lunette à droite, on passe à l'observation de gauche.

La mise au point se fera le mieux sur les astres mêmes. Pour le Soleil, on place un verre coloré entre l'œil et l'oculaire.

La grande difficulté est de bien trouver l'étoile que l'on veut viser. Il faut mettre d'abord le plan décrit par l'axe optique, qui est sensiblement le plan du limbe vertical, dans le vertical de l'astre. Pour le Soleil on se guide pour cela sur l'ombre des rayons du cercle, ou sur celle du niveau. La lunette étant placée dans le plan du vertical de l'astre, on serre les vis du cercle horizontal et l'on desserre celles du cercle vertical.

Si l'on a des verres colorés facilement mobiles, et qu'on observe le Soleil, on découvre l'oculaire et on le regarde *de loin* en faisant mouvoir la lunette autour de son axe horizontal. Le moment où le Soleil entre dans le champ se traduit par une vive illumination du verre. On serre les vis, on met le verre coloré en place et, appliquant alors l'œil à l'oculaire, on voit tout ou partie de l'image du Soleil.

Pour les étoiles la recherche est un peu difficile. On la facilite

---

(¹) Il serait à désirer que l'usage de ce collier fût généralisé : on éviterait ainsi de grandes pertes de temps et de nombreuses causes d'erreur. Un observateur adroit peut se fabriquer sans trop de peine un petit dispositif qui remplace cet organe. Pour cela, une fois qu'on a obtenu une bonne mise au point avec l'oculaire armé du prisme, on taille un petit morceau de métal ou de bois dur de telle manière qu'il s'introduise exactement entre le tube de la lunette et l'œilleton de l'oculaire. Quand on veut mettre au point, on tire l'oculaire, on place cette pièce et l'on pousse jusqu'à ce qu'on sente une résistance : la mise au point est alors constante.

en adaptant à la lunette deux viseurs, qui forment chercheurs. Il convient d'aveugler la lampe pendant la recherche et de ne rétablir la lumière que lorsque l'étoile est dans le champ.

Le pointé se fait le plus près possible de la croisée des fils. L'observation d'une distance zénithale se compose du pointé dans la position inverse, puis dans la position directe, chaque pointé est suivi de la lecture du niveau, précédant elle-même celle des verniers ou des microscopes. Pour les astres à diamètre apparent on observe le bord.

Si le mouvement en hauteur est assez rapide et qu'on observe le bord qui se rapproche du fil, on place celui-ci à petite distance en avant, on compte les battements et l'on note l'instant auquel l'image vient tangenter le fil horizontal; pour l'autre bord, on fait mordre l'image, et l'on attend en comptant que le segment intercepté par le fil s'évanouisse.

La différence d'appréciation de ces deux phénomènes qui ne sont pas symétriques peut causer une erreur constante, qui ne s'élimine pas en combinant des observations faites des deux côtés du méridien, mais dont l'effet disparaît si l'on ne compare entre elles que des observations de même nature, à condition que l'erreur personnelle puisse être considérée comme constante.

Si l'on est bien sûr de la constance de la mise au point, on peut se borner à observer toujours le bord qui quitte le fil; il faut alors corriger la distance zénithale du demi-diamètre. Avec la Lune, on n'a pas le choix, puisque généralement un seul bord est net, et par conséquent observable.

M. Liais recommande le pointé direct au centre. Voici comment on procède. Le fil horizontal doit être rectifié avec soin, et bien perpendiculaire au fil vertical. On amène l'astre à mordre un peu sur ce dernier (*fig.* 45) et l'on considère le plus petit des segments qu'il intercepte sur le disque, le pointé au centre en hauteur s'opère en bissectant ce segment par le fil horizontal. Nous avons expérimenté cette méthode. Elle donne de bons résultats, surtout quand le mouvement en hauteur est lent, car alors on a le loisir de bien établir et vérifier la bissection. Mais lors même qu'on doit apprécier l'heure du chronomètre à laquelle la bissection a lieu, le fil restant immobile, elle donne encore des résultats acceptables. L'erreur d'horizontalité du fil est à peu près éliminée dans la

mesure des doubles distances zénithales, à cause du retournement de l'instrument.

M. Liais propose encore une méthode pour substituer toujours un pointé à l'évaluation de l'heure, par un mouvement rythmé qu'on imprime à la lunette. Nous n'avons pu expérimenter cette méthode avec les appareils spéciaux proposés par son auteur. Celui-ci pense qu'avec de l'habitude on arriverait à l'appliquer sans disposition additionnelle : nous l'avons essayé sans succès. Il n'y a d'ailleurs pas un très grand intérêt, comme on l'a déjà fait ressortir, à vouloir substituer l'observation des angles à celle du temps; cette dernière est susceptible d'une grande précision.

Fig. 45.

Nous avons dit, en parlant du théodolite, comment on obtient la double distance zénithale par la combinaison des observations de gauche avec celles de droite, et quelles corrections il y a lieu d'y faire pour les erreurs instrumentales. Quand on observe des circonméridiennes, le mouvement en hauteur est faible : au lieu d'attendre le contact, on le produit par un mouvement de la vis de rappel à un instant donné du chronomètre.

Le pointé des étoiles et des planètes sans phase se fait par bissection. Pour Vénus, on peut observer le bord éclairé et faire la correction du demi-diamètre, comme pour la Lune; on peut aussi employer la méthode Liais.

On peut mesurer une distance zénithale simple au théodolite à condition de connaître la lecture du cercle vertical qui correspond à l'horizon. Cette lecture peut s'obtenir en pointant au nadir, et ajoutant 90° à la lecture du nadir. Elle peut aussi se trouver en pointant un même objet terrestre en hauteur dans les deux positions de la lunette, prenant la moyenne des deux lectures, qui donne le zénith ou le nadir, et y ajoutant 90°. Il est nécessaire de faire les nivellements et d'en tenir compte pour trouver le zénith vrai. Cer-

tains théodolites donnent directement la hauteur, mais dans ce cas il est nécessaire de faire grande attention au signe de la correction : ce genre de graduation, malgré son apparente simplicité, n'est pas à recommander. Une correction d'un nombre quelconque de degrés est aussi facile à appliquer qu'une correction de quelques minutes, et les erreurs s'aperçoivent d'autant plus aisément qu'elles sont plus grosses.

Quand on adopte la disposition du prisme que nous avons recommandée pour l'observation des hauteurs, on peut se trouver au début un peu désorienté et ne pas reconnaître quel est le fil horizontal et le fil vertical. On lève toute ambiguïté en pointant un objet quelconque dans cette position et faisant mouvoir la vis de rappel du cercle vertical, le fil horizontal est alors celui qui a un mouvement relatif sensible. On n'oubliera pas que ce prisme agit comme un miroir, c'est-à-dire donne une image symétrique de celle que l'on a observée, par conséquent il redresse, *dans un sens,* les images renversées par la lunette astronomique, les laissant renversées dans le sens perpendiculaire, c'est-à-dire parallèlement à son arête réfringente.

72. — Observation de l'azimut.

L'azimut d'un point terrestre se détermine en mesurant l'angle entre le vertical de ce point et celui d'un autre point, généralement un astre, dont l'azimut peut être calculé.

Si les distances zénithales des deux points sont connues, on peut mesurer leur distance angulaire au moyen d'un instrument placé dans leur plan et trouver par le calcul cette distance réduite à l'horizon, c'est-à-dire l'angle des deux verticaux. C'est ainsi qu'on opère avec les instruments à réflexion. C'est ainsi qu'on opérait aussi avec le cercle répétiteur, mais sans compter la complication qui en résultait pour les calculs et l'obligation où l'on se trouvait de mesurer les distances zénithales, la nécessité de maintenir le cercle dans le plan des objets était cause qu'à chaque pointé nouveau de l'astre il fallait déplacer le plan de l'instrument.

Aujourd'hui on a complètement renoncé à l'emploi du cercle répétiteur et on lui préfère avec raison le théodolite qui effectue mécaniquement la réduction à l'horizon.

Le pointé de l'objet terrestre n'a pas besoin d'explication.

Le pointé d'un astre en azimut s'effectue en suivant l'astre avec le fil vertical, ou encore en notant l'instant de son passage derrière ce fil. Selon la rapidité du mouvement en azimut, on a recours à l'un ou à l'autre procédé, comme pour la mesure des distances zénithales, pointé quand le mouvement est lent, observation du passage s'il est rapide. Ce dernier cas est celui des observations méridiennes.

Pour ces observations il est encore recommandé de pointer alternativement les deux bords des astres, du Soleil notamment, parce que cela dispense de calculer la valeur azimutale du demi-diamètre, ce qui exige la connaissance de la distance zénithale. Mais alors il est nécessaire de procéder systématiquement et d'une manière très régulière, comme nous l'indiquons plus loin (§ 115). La méthode Liais pour le pointé au centre est aussi applicable.

Toute mesure d'angle revient à la détermination de la différence entre deux directions. La lecture du point zéro n'étant pas plus facile que celle de tout autre point de la graduation, il est complètement inutile de s'assujettir à avoir cette lecture pour une des directions observées, on n'y gagne qu'un supplément de travail. Pour s'assurer que l'instrument n'a pas bougé et mesurer au besoin la valeur du déplacement qu'il a subi, il suffit, avons-nous dit, de vérifier de temps à autre le premier pointé par retour au point de départ, quand il s'agit d'angles horizontaux; le niveau remplit le même office pour les distances zénithales. Nous recommanderions volontiers aux constructeurs de ne pas faire la graduation des cercles verticaux en choisissant pour origine, soit des hauteurs, soit des distances zénithales, la division zéro; la rectification n'étant jamais parfaite, cela peut donner lieu à une ambiguïté relative au sens de la correction, ou induire en erreur l'observateur en lui faisant croire que ses lectures représentent sans correction la hauteur ou la distance zénithale, selon le cas. *Aucun instrument ne peut être supposé rectifié par construction*, il faut toujours vérifier ses corrections. Pour le cercle méridien même, il est aussi simple d'employer une colatitude conventionnelle, relative à la position du zéro par rapport à l'horizon, cela ne complique pas les calculs. Pour le théodolite répétiteur, où la mise au zéro est très facile, on peut la faire, ce qui facilite le calcul en épargnant

une soustraction. Nous rappellerons à ce propos les considérations exposées au paragraphe 53 sur les lunettes d'épreuve.

73. — Résumé.

En insistant comme nous l'avons fait sur le calcul des erreurs instrumentales, notre but était de montrer qu'il est bon de suivre toujours la pratique des observatoires, laquelle consiste à déterminer les corrections dont les observations ont besoin, et de ne jamais supposer un instrument bien rectifié et sans erreur. Mais nous avons surtout voulu bien établir les *causes* d'erreurs, afin que l'observateur soit à même de les éliminer dans la mesure du possible par la combinaison des observations entre elles.

Deux principes dominent toute la question : nous allons les rappeler brièvement.

1° *Erreurs de graduation.* — Dans un instrument bien construit, ces erreurs, sans être négligeables, sont systématiques, c'est-à-dire que l'erreur est une fonction continue de la lecture. D'autre part, la plupart des observations sont destinées à donner non des résultats absolus, mais des différences : différence entre la verticale et une étoile, différence entre deux méridiens, différence d'azimuts. Il suit de là que même avec une graduation imparfaite on peut obtenir de bons résultats en faisant toujours intervenir des angles de même grandeur. Ainsi, pour obtenir la marche d'un chronomètre, on observera à plusieurs jours d'intervalle le même astre à la même distance zénithale. Pour avoir une bonne colatitude, on observera des astres également distants du zénith, l'un au Nord, l'autre au Sud (principe des hauteurs correspondantes, etc.).

2° Ceci nous conduit au second principe : celui du *croisement* et de la *symétrie* des *observations*. La plupart des corrections que nous avons calculées changent de signe quand on donne à l'instrument une disposition inverse. La collimation change de signe par le retournement. Il en est de même de l'inclinaison de l'axe horizontal du théodolite, de l'erreur du grand miroir et des verres dans les instruments à réflexion, etc. On élimine donc ces erreurs en observant dans les deux positions de l'instrument et prenant la moyenne des résultats obtenus.

Ainsi, avec le théodolite, quand on observe des azimuts, on devra

toujours opérer cercle à gauche et cercle à droite, que l'instrument soit centré ou excentrique : avec le cercle à réflexion répétiteur, le croisement est le fond même de la méthode, et il devra être accompagné du retournement des verres colorés et des glaces de l'horizon à fluide. La symétrie des observations par rapport au méridien élimine les erreurs de distance zénithale, en tant qu'elles influent sur l'angle horaire : aux erreurs instrumentales qui disparaissent en observant des deux côtés du méridien il faut ajouter les corrections d'ordre physique de réfraction (dans une certaine mesure) et de parallaxe.

L'observateur bien pénétré de ces principes trouvera de nombreuses occasions de les mettre en pratique. Nous aurons soin, en traitant les problèmes spéciaux, de ramener toujours l'attention sur ces applications. Le bon astronome ne se distingue pas seulement par la perfection des sens, acuité de la vision ou de l'ouïe, habileté manuelle et rapidité d'exécution; ces qualités très précieuses pour réduire les erreurs accidentelles, sont d'une importance secondaire relativement à l'aptitude à bien disposer et coordonner les observations, aux fins d'éliminer les erreurs systématiques.

CHAPITRE V.

DES CHRONOMÈTRES (1).

74. — Description du Chronomètre. Régulateur.

Pour mesurer le temps, on le partage en intervalles égaux. Un chronomètre (2) est donc un instrument destiné à marquer des intervalles égaux en durée et à enregistrer à l'aide d'un mécanisme spécial le nombre des intervalles écoulés. De là, dans la description, une division toute naturelle.

1° Le *régulateur,* mobile animé de mouvements d'égale durée.

2° L'*échappement,* qui transmet les mouvements du régulateur au rouage compteur.

3° Le *rouage.*

4° Enfin, le *moteur* destiné à contrebalancer l'influence des frottements et des résistances que subit toute machine et à entretenir le mouvement du régulateur et du rouage.

On commence quelquefois la description du chronomètre par le moteur, pour finir par le régulateur. Cette manière de procéder a l'inconvénient de ne pas mettre en lumière l'ordre d'importance des divers organes. Dans une pendule, il paraît naturel de commencer la description par le pendule : le moteur peut être un ressort ou un poids : c'est le pendule qui marque les intervalles égaux qui mesurent la durée, tellement que l'on peut à la rigueur se servir d'un pendule seul sans rouage, comme font quelquefois les physiciens à défaut d'une montre à secondes. On ne pensera jamais au contraire à mesurer le temps par la chute d'un corps ou par la détente d'un ressort; c'est le régulateur qui constitue essentiel-

(1) Il ne sera pas question ici de la pendule astronomique qui n'est pas un instrument portatif.

(2) De χρόνος, temps, et μέτρον, mesure.

lement l'horloge : c'est par lui qu'il convient donc d'en commencer la description.

Régulateur. — Le régulateur se compose dans les chronomètres d'un *balancier* oscillant sous l'influence d'un ressort appelé *spiral.* Considérons d'abord ce dernier. C'est un ruban de métal élastique, contourné en hélice; une de ses extrémités s'attache au bâti de la montre : l'autre actionne le balancier. Celui-ci, en tournant dans un certain sens, arme le spiral, qui engendre alors une résistance progressivement croissante, laquelle finit par arrêter le mouvement du balancier jusqu'à l'annuler : l'action continuant, le balancier revient en arrière : le spiral reprend sa forme primitive, la dépasse dans l'autre sens, jusqu'à ce que sa résistance ait de nouveau annulé la vitesse du balancier : il résulte de là une succession de mouvements alternatifs, ou un mouvement oscillatoire.

Par l'effet d'influences diverses, dont les principales sont les variations des résistances et de la force motrice sous l'action de l'épaississement des huiles, et les changements que la température produit dans les dimensions et la force élastique du spiral, les excursions du balancier sont sujettes à varier en grandeur et en vitesse : pour satisfaire à la condition de marquer toujours des intervalles de temps égaux, il faut que le spiral soit tellement constitué que la durée des oscillations ne dépende pas de l'arc plus ou moins grand qu'elles embrassent, et qu'on appelle leur *amplitude;* c'est là la propriété qu'on désigne par le nom d'*isochronisme.* Cette condition indispensable du fonctionnement d'un chronomètre peut s'obtenir en donnant au spiral une longueur convenable (P. Leroy), ou en donnant à ses extrémités, qu'on appelle alors les *courbes terminales*, une forme différente de la forme circulaire (Phillips).

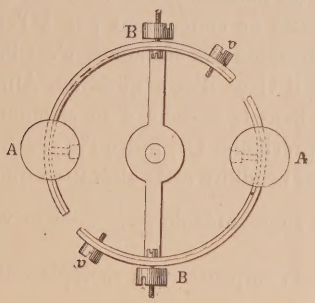
Le balancier a des formes variées. Dans les montres ordinaires, il se compose simplement d'un cercle en laiton rattaché par des rais du même métal à un axe perpendiculaire à son plan, et terminé par deux pivots sur lesquels il peut tourner. Mais dans ce cas la montre avance ou retarde par l'effet des variations de température. Supposons que la température s'élève. La longueur du spiral augmentera, et les oscillations deviendront plus longues : une verge a des vibrations d'autant plus lentes qu'elle est plus longue.

En même temps la force élastique du ressort diminue : la chaleur en effet ramollit les corps, et le froid les durcit : de là une autre cause de ralentissement, par la diminution de l'impulsion du spiral sur le balancier. Enfin le balancier lui-même se dilate, et tend à tourner moins vite, de même qu'un volant d'un poids donné, sous l'action d'un moteur, tourne d'autant plus lentement que ses dimensions sont plus grandes.

Tout conspire donc à faire retarder les montres par la chaleur. Dans les montres ordinaires, on règle le spiral pour faire disparaître cet effet : dans les chronomètres, c'est par le balancier qu'on y arrive. Le balancier compensateur n'a pas le même rôle que le pendule compensateur : dans le pendule, la pesanteur agit comme force constante; il suffit donc d'obtenir l'invariabilité de longueur : dans les chronomètres, la force elle-même varie, et l'action du ressort spiral produirait du retard à la chaleur indépendamment de la dilatation du balancier.

Il faut donc avoir un balancier qui se rétrécisse en quelque

Fig. 46.



sorte par l'action de la chaleur, au lieu de se dilater ou de rester simplement invariable. On y est parvenu en s'appuyant sur la même propriété qui a permis la construction du thermomètre métallique, dit thermomètre Bréguet.

Le cercle extérieur du balancier est formé de deux métaux inégalement dilatables, à l'intérieur de l'acier et à l'extérieur du cuivre jaune. Il est coupé en deux points, de manière que chacun des demi-cercles qui le forment ait une extrémité libre (*fig.* 46). Chacun

de ces demi-cercles porte une masse pesante. Enfin les deux lames demi-circulaires sont fixées par une extrémité à une lame d'acier appelé *barrette*, ajustée perpendiculairement à l'axe de rotation. Supposons qu'on chauffe ce système : l'acier étant moins dilatable que le laiton, ce dernier, s'il était libre, prendrait une longueur plus grande. Mais les deux métaux sont soudés ensemble, et forcés de se dilater de la même quantité, le laiton moins, l'acier plus qu'il ne ferait naturellement. Alors le cercle devient plus courbe, son rayon diminue, et la masse qu'il porte se rapproche du centre. L'effet inverse se produit par le refroidissement; les masses s'écartent du centre.

Nous avons donc là le moyen de compenser les effets de la température sur le spiral. On remarque sur le balancier, en outre des masses compensatrices, d'autres masses plus petites, portées par des vis : on les nomme *vis de réglage*. Une fois la compensation obtenue en déplaçant convenablement les masses sur la circonférence de l'anneau, si le chronomètre avance ou retarde sur le temps moyen, on le règle exactement en éloignant ou rapprochant ces vis du centre du balancier. Ces vis étant adaptées aux extrémités de la barrette ne concourent pas à l'effet compensateur. Ce que l'on ne s'imagine pas aisément, c'est l'extrême délicatesse des organes dont il vient d'être question. Ainsi une erreur d'une seconde par jour dans la marche d'un chronomètre est déjà une quantité trop appréciable. Or, puisqu'il y a 86 400 secondes par jour, il suffit, pour produire cette altération que chaque oscillation soit diminuée ou augmentée de $\frac{1}{86\,400^{e}}$ de sa valeur. Il suffit pour cela que les masses compensatrices se déplacent de $\frac{1}{86\,400^{e}}$ de leur distance au centre : et si cette distance est, comme dans les chronomètres de Winnerl, de $0^{m},027$, le déplacement sera à peu près de 3 millièmes de millimètre. Pour voir cette quantité, il faudrait un microscope grossissant plus de mille fois en surface.

Aussi n'est-ce pas par des mesures directes de longueurs ou de poids que les artistes arrivent à régler les montres : c'est en les établissant d'abord d'une manière approximative, observant les variations de leur marche et les corrigeant par des tâtonnements très longs et très minutieux.

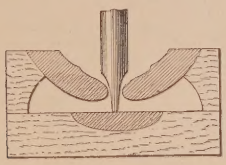
La barrette du balancier est généralement en acier. Elle est percée en son centre d'un trou dans lequel passe l'axe de rotation. Cet arbre porte à ses deux bouts des pivots très fins, qui tournent dans des crapaudines appelées *contre-pivots* ou *trous*, formées en pierres dures, rubis ou diamant, et analogues aux chapes des roses de compas. La crapaudine supérieure est engagée dans la platine inférieure du bâti du chronomètre : la crapaudine inférieure est logée dans un *pont* adapté à cette platine et qu'on appelle le *coq*. Le coq porte également un piton auquel se fixe une des extrémités du spiral : l'autre extrémité est fixée à la barrette du balancier par une *virole*.

On apporte un soin tout particulier à la bonne exécution des pivots et contre-pivots. On choisit pour ces derniers des pierres excessivement dures, quelquefois des diamants, plus souvent des rubis ou des saphirs.

Le contre-pivot se compose d'une pierre plate sur laquelle le pivot tourne par une extrémité un peu arrondie, et d'une sorte de gaîne en pierre, destinée seulement à opposer un obstacle aux excursions latérales de l'axe : l'intervalle entre les deux est lubrifié avec de l'huile très fine.

Nous représentons ici (*fig.* 47), en coupe, à une échelle agrandie,

Fig. 47.



le pivot et le contre-pivot : les parties en pierre sont couvertes de hachures.

Le choix des huiles est d'une extrême importance pour la bonne marche et la conservation d'une pièce d'horlogerie. Des huiles trop fluides laissent les pivots s'user : des huiles trop épaisses et trop oxydables opposent au mouvement trop de résistance et qui pis est, une résistance trop variable avec le temps et la température.

C'est surtout aux pivots du balancier qu'il importe d'avoir des huiles excellentes, car aux autres rouages leur importance est

moindre, la force motrice peut en effet être augmentée suffisamment pour qu'on n'ait pas à s'inquiéter de sa diminution par les résistances, au moins au delà d'une certaine mesure.

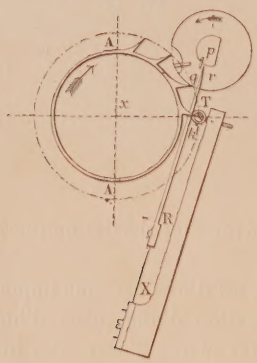
75. — Échappement.

Nous avons vu comment on arrive à avoir un mobile animé d'un mouvement périodique uniforme. Ce mobile transmet son mouvement à une roue dite *roue d'échappement,* qui est destinée à traduire le mouvement oscillatoire par un mouvement circulaire saccadé.

Afin de laisser au balancier la plus grande liberté possible, il importe qu'il ne reste en communication avec le rouage que pendant le temps nécessaire pour produire le dégagement de la roue d'échappement et en recevoir l'impulsion destinée à entretenir son mouvement. Tel est le but de l'*échappement libre,* à repos et à détente, dont le principe a été imaginé par Pierre Leroy, mais qui a été perfectionné par Arnold, horloger anglais, lequel lui a donné la disposition encore en usage aujourd'hui.

La roue d'échappement A (*fig.* 48) dont l'arbre porte un

Fig. 48.



pignon x engrenant avec la roue des secondes, se trouve par là en communication avec le rouage qui subit l'action du moteur, et en reçoit une tendance à un mouvement circulaire continu dans le

sens de la flèche. Ce mouvement participerait nécessairement de toutes les variations de la force motrice : le régulateur le transformera en un mouvement périodiquement uniforme.

Pour cela, les dents de la roue d'échappement sont arrêtées successivement par un *repos k* porté par un ressort TRX. Une des extrémités de ce ressort est amincie et fixée à la platine du chronomètre en X. L'autre extrémité se termine en forme de crosse.

Un second ressort *r*, beaucoup plus mince et plus flexible, est juxtaposé au premier; son extrémité libre s'appuie sur la crosse T. On voit par là que si l'on presse ce petit ressort, en l'appuyant sur le ressort R, il tend à entraîner celui-ci dans son mouvement; mais, dans le mouvement inverse, sa grande flexibilité permet de l'écarter d'une petite quantité de ce dernier. L'ensemble de ces ressorts est dans un plan différent de celui de la roue d'échappement; mais le repos *k* porté par le ressort déborde la largeur de celui-ci et peut arrêter la roue d'échappement.

L'arbre du balancier porte :

1° Dans le plan des ressorts, une levée *p* en pierre dure;

2° Dans le plan de la roue d'échappement, *un cercle d'échappement* évidé dans une partie de son contour, et portant une pierre dure *q* en saillie dans cet évidement. La saillie de cette pierre est calculée de telle sorte que, lorsqu'un rayon de la roue d'échappement se trouve passer par l'axe du balancier, la dent correspondante puisse imprimer à la pierre une impulsion, et qu'au contraire, quand le rayon de la roue d'échappement qui rencontre l'axe du balancier correspond au vide entre deux roues, il n'y ait aucun contact. Ceci posé, on comprend facilement le fonctionnement de l'appareil. Admettons que le balancier tourne de droite à gauche (sens de la flèche) : la levée *p* rencontrant le ressort *r* l'écarte, ce qui entraîne le ressort R et le repos *k*, et fait échapper une dent : en même temps une dent vient frapper la pierre *q* et communique au balancier la force vive nécessaire pour entretenir son mouvement. Aussitôt l'échappement produit, le ressort R revient à sa position et arrête la dent suivante.

Pendant la deuxième période du mouvement, lorsque le balancier tourne de gauche à droite, la levée *p* soulève le ressort *r*, mais alors le ressort R ne bouge pas. Il y a donc échappement à chaque double oscillation, quand le balancier est animé de vitesses

dans le même sens. En ceci les chronomètres se distinguent des montres ordinaires à cylindre ou à ancre, dans lesquelles l'échappement se fait à chaque oscillation simple, comme dans les pendules.

On voit pourquoi cet échappement porte le nom d'*échappement libre :* sauf l'instant très court du choc de la levée contre le ressort, le balancier oscille librement, et ces chocs ont peu d'intensité à cause de la faible masse et de la résistance minime des ressorts.

L'avantage le plus apprécié de cet échappement, c'est que les actions mutuelles étant des chocs et non des frottements, on n'a pas besoin d'huile aux contacts : or l'épaississement de cette substance est une des principales causes d'irrégularité dans la marche des montres.

76. — Rouage.

Le rouage des chronomètres est d'une grande simplicité. Un pignon porté par la roue d'échappement engrène avec la roue des secondes, qui fait une révolution complète en une minute. Cette roue porte un pignon engrenant avec une roue dite *petite moyenne,* pourvue elle-même d'un pignon engrenant avec la roue de *grande moyenne,* qui fait un tour en une heure. L'axe de cette roue est appelé *axe à longue tige*. Tandis que les parties précédentes du rouage sont renfermées entre deux platines, l'axe à longue tige traverse la platine supérieure et le cadran, et dans cet intervalle est installé un rouage particulier appelé *minuterie*. Le but de ce rouage est :

1° De faire mouvoir concentriquement les aiguilles des minutes et des heures.

2° De permettre la mise à l'heure de ces aiguilles, sans produire de mouvement dans le mécanisme.

A cet effet, l'aiguille des minutes, au lieu d'être adaptée directement à l'axe à longue tige, est fixée à un canon ajusté à frottement sur cet axe; mais ce frottement est assez doux pour permettre de déplacer l'aiguille sans entraîner l'axe et sans produire de mouvement dans les parties du rouage que nous avons décrites.

Pour faire mouvoir l'aiguille des heures concentriquement avec l'aiguille de minutes, on l'adapte à un autre canon extérieur au

précédent et tournant librement autour de lui. Ce canon porte une roue dentée engrenant avec un pignon fixé à un axe parallèle à l'axe à longue tige et supporté par la platine supérieure et le cadran.

Ce deuxième axe porte un pignon qui engrène lui-même avec une roue dentée portée par le canon de l'aiguille des minutes. On voit que les mouvements de l'aiguille des minutes, qu'ils soient produits par le rouage ou par une cause extérieure, se transmettent à l'aiguille des heures avec la réduction nécessaire que l'on produit en choisissant convenablement le nombre des dents des deux roues et des deux pignons dont on vient de parler.

Dans la plupart de nos chronomètres, les roues des heures et des minutes sont concentriques : il y a pourtant quelques pièces dans lesquelles chaque aiguille a son cadran distinct; la disposition de la minuterie est alors un peu différente, mais le principe reste le même.

Reste à voir comment on arrive à entretenir le mouvement de ces divers rouages solidaires.

77. — Moteur.

Le moteur employé dans les chronomètres est un ressort. Il est formé d'une lame d'acier mince et très longue, qui a été travaillée de manière à s'enrouler d'elle-même en spirale. L'extrémité intérieure du ressort est liée à un arbre fixe. Son extrémité extérieure est fixée à un tambour en métal appelé *barillet,* concentrique à cet arbre. En faisant tourner ce barillet de manière à enrouler le ressort, on augmentera le nombre de tours et par suite la courbure, et le ressort, primitivement en équilibre, engendrera une force qui tendra à le dérouler. L'arbre étant maintenu fixe, le résultat de cette tension sera de faire tourner le barillet en sens inverse du mouvement qu'on lui a imprimé pour armer le ressort. Admettons que cette tension existe, c'est-à-dire que la montre soit *remontée.* (Nous verrons bientôt comment on fait pour cela.)

Le tambour du barillet porte des dents qui engrènent avec une des roues de la montre; en tournant sous l'action du ressort, il communiquera ce mouvement au rouage, dans les instants où celui-ci est libre de fonctionner, c'est-à-dire quand l'échappement se pro-

duit. Voilà donc une force motrice. Mais l'action du ressort diminue à mesure qu'il se déroule : elle est sensiblement proportionnelle à la déformation que ce ressort a subie en partant de l'état d'équilibre élastique correspondant à sa forme naturelle, et décroît par conséquent lors qu'en se déroulant il revient à cette forme naturelle.

A mesure que la montre marche, les impulsions communiquées par le ressort au rouage et par le rouage au balancier vont décroissant : il en résulterait une réduction progressive des amplitudes d'oscillation du régulateur. Cette réduction serait sans inconvénient avec un spiral isochrone : mais comme en pratique on arrive rarement à l'isochronisme rigoureux, il vaut mieux atténuer cette cause de variation : c'est à quoi l'on parvient par l'emploi de la *fusée* (¹). La fusée est une sorte de tambour conique, sur lequel on a tracé une série de gradins formant une courbe rampante. Une chaîne, dont une des extrémités est fixée à la surface du barillet, a son autre extrémité fixée à la fusée : quand la montre est remontée, la chaîne est tout entière enroulée sur la fusée. A mesure que le barillet tourne sous l'influence du moteur, la chaîne s'enroule sur sa surface et fait tourner la fusée qui porte la vraie roue motrice, engrenant avec un pignon fixé sur la *grande moyenne* et communiquant ainsi le mouvement au rouage.

La disposition de la courbe tracée sur la fusée est telle qu'au début, lorsque l'action du moteur est forte, la chaîne agit à une petite distance de l'axe : à mesure que le ressort se déroule, cette chaîne agit en des points de la courbe de plus en plus éloignés de l'axe : le bras du levier augmente tandis que la tension diminue; on conçoit aisément comment, par une forme convenable de fusée, on arrive à rendre constant le produit de ces quantités, qui est le moment de la force motrice.

On voit que, pendant le remontage, la fusée marchera en sens

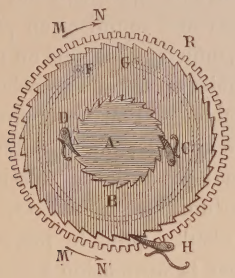
(¹) La fusée n'existe plus dans les montres ordinaires; c'est le barillet qui communique directement son mouvement au rouage. Le remontage s'effectue alors en faisant tourner l'axe du barillet; une roue à rochet est disposée de manière à empêcher que ce mouvement ne fasse rétrograder le barillet lui-même. Comme le sens du remontage est aussi celui du mouvement, on arrive ainsi à faire marcher la montre pendant le remontage. Quelques artistes, à la suite de Pierre Leroy, ont adapté ce mécanisme aux chronomètres : mais cette pratique a fini par être abandonnée.

inverse du sens de la marche ordinaire. Afin d'éviter que cela n'entraîne l'arrêt du chronomètre, il a fallu recourir à un dispositif particulier.

La fusée n'est pas invariablement fixée à la première roue R du rouage (*fig.* 49). L'axe de la fusée est fixé au centre d'une roue à rochet A qui ne transmet son mouvement à la roue dentée R que par l'intermédiaire d'une autre roue à rochet B portant deux doigts C, D.

Cette roue intermédiaire B est reliée à R par un ressort d'acier FG fixé en F à la roue supérieure B et en en G à la roue inférieure R.

Fig. 49.



Quand le rouage est en mouvement sous l'action du ressort moteur, la fusée tourne dans le sens MN et entraîne la roue B qui tend le ressort FG et entraîne par suite la roue R dans le même sens MN.

Quand on remonte le mécanisme en tournant l'axe de la fusée, c'est-à-dire la roue A, dans le sens de la flèche M'N', on voit par la position des doigts C et D que la roue A n'entraîne plus B et par conséquent ne sollicite plus R à tourner dans aucun sens.

Mais alors le ressort FG réagit par sa détente et comme la roue B ne peut retourner dans le sens M'N', à cause du doigt H qui s'y oppose, le ressort FG agit sur la roue R pour lui continuer son mouvement dans le sens MN, et le rouage n'est pas arrêté par le remontage.

Du reste, le ressort FG est calculé de telle sorte qu'il puisse, par sa détente, entretenir seul le mouvement du rouage pendant un temps plus que suffisant pour le remontage.

THÉORIE MÉCANIQUE DU MOUVEMENT DES CHRONOMÈTRES.

78. — Isochronisme et mouvements vibratoires.

Le régulateur d'un mouvement d'horlogerie est soumis à plusieurs causes perturbatrices qui peuvent faire varier soit accidentellement, soit d'une façon régulière, l'impulsion qu'il reçoit du moteur, et par suite l'amplitude et la durée de ses oscillations.

Une cause générale de variations du mouvement réside dans l'épaississement des huiles et dans les frottements, variables avec le temps, auxquels peut donner lieu l'usure des diverses pièces du mécanisme : cette cause agit également sur les horloges fixes ou portatives. Ces dernières sont soumises en plus à des mouvements résultant du transport, mouvements plus ou moins irréguliers, dont l'effet imprime au balancier tantôt une accélération, tantôt un retard. Il est donc indispensable, si l'on veut pouvoir compter sur la marche constante d'une horloge, que les différences d'amplitude des oscillations n'en affectent pas la durée : c'est ce qu'on exprime en disant que le régulateur doit être *isochrone*.

On est arrivé à ce résultat pour le pendule, en remplaçant la suspension à couteau par la suspension à ressort, à défaut du mouvement cycloïdal que la théorie indique, mais que la pratique est impuissante à réaliser. MM. Laugier et Winnerl ont fait à ce sujet des expériences très intéressantes et très utiles. (Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1845).

Pour le spiral réglant et le balancier des chronomètres, voici ce que la théorie indique : Pour que les oscillations d'un balancier tournant librement, sous l'influence d'un spiral, aient une durée constante, quelle que soit leur amplitude, il suffit qu'à un instant quelconque le moment de la résistance élastique du spiral soit proportionnel à l'angle dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre (1).

(1) Cette condition suffisante n'est pas nécessaire, comme je l'ai montré par l'analyse des mouvements d'un spiral cylindrique. (Voir *Études sur le mécanisme et la marche des chronomètres,* par E. Caspari, publiées dans les *Recherches sur les chronomètres,* 11e Cahier, Dépôt de la Marine; 1876). Je me permets de renvoyer le lecteur à cet Ouvrage pour les détails de théorie qui n'ont pu trouver place ici.

Soit en effet α cet angle; soit B une constante. Le moment de la force d'inertie du balancier est égal au produit de l'accélération angulaire du balancier par son moment d'inertie A; l'accélération angulaire est représentée par $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ou la dérivée seconde de l'écart angulaire par rapport au temps. Écrivant l'équation d'équilibre entre les forces agissantes et les forces d'inertie, et faisant attention que l'action du spiral représente une résistance au mouvement, quand les écarts vont en croissant, il vient

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -B\alpha,$$

d'où l'on tire par une première intégration

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = -\frac{B}{A}\alpha^2 + \text{const.}$$

La constante se détermine par la condition que la vitesse angulaire du balancier doit s'annuler pour une certaine valeur α_0 de la variable, représentant l'amplitude extrême

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{B}{A}(\alpha_0^2 - \alpha),$$

d'où l'on tire par une deuxième intégration

$$t = \pi\sqrt{\frac{A}{B}}\ \text{arc sin}\frac{\alpha}{\alpha_0} + \text{const.}$$

La vitesse s'annulant pour $\alpha = \pm\alpha_0$, les oscillations sont d'égale amplitude de part et d'autre de la position d'équilibre; pour avoir la durée totale d'une oscillation il faut prendre t entre les valeurs $\pm\alpha_0$ ce qui donne pour cette durée la valeur

$$T = \pi\sqrt{\frac{A}{B}}$$

indépendante de l'amplitude α_0 : le mouvement est donc isochrone si A et B sont bien des constantes. Cette démonstration, sauf la signification des constantes, est la même que celle qui se rapporte au pendule cycloïdal.

M. Phillips, membre de l'Institut, dans un savant Mémoire, démontre que la constante B a pour valeur $\frac{M}{L}$, M désignant le moment d'élasticité du spiral, L sa longueur mesurée sur l'hélice. La quantité M dépend des dimensions de la section du fil dont est formé le spiral et de son coefficient d'élasticité. Cette formule, rigoureuse pour le cas particulier que M. Phillips a examiné, est à peu près exacte pour la plupart des chronomètres.

La formule qui exprime la durée des oscillations est donc

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}};$$

elle montre que T reste invariable, quelles que soient les amplitudes, si le moment d'inertie du balancier, la longueur et l'élasticité du spiral restent les mêmes, ou plus généralement si le rapport $\frac{AL}{M}$ ne varie pas.

Il s'agit maintenant de voir quelles causes peuvent intervenir pour modifier l'égalité de durée des oscillations supposée obtenue en satisfaisant à cette condition fondamentale.

Nous verrons plus tard comment ce résultat peut être réellement atteint : et l'on comprendra alors les raisons qui nous ont fait commencer par les perturbations, avant d'avoir expliqué le mécanisme lui-même.

79. — Aperçu général des causes perturbatrices. Leur degré d'importance. Température. Huiles. Causes accidentelles.

Si les dimensions des pièces et la grandeur de leurs actions mutuelles restaient toujours les mêmes, le chronomètre aurait un mouvement périodiquement uniforme et partagerait la durée en intervalles parfaitement égaux. Ce cas extrême n'est jamais atteint dans la réalité, et un chronomètre à marche rigoureusement constante constitue un idéal de perfection dont les instruments peuvent se rapprocher plus ou moins, mais sans l'atteindre jamais. La température fait varier les dimensions des organes, les forces motrices et résistantes en jeu ; l'état physique des pièces du

mécanisme se modifie sous l'action des forces extérieures et du mouvement lui-même ; le magnétisme, l'électricité, etc., influencent ce mouvement ; l'huile employée pour lubrifier les organes change avec le temps de consistance et de composition chimique : enfin les déplacements divers auxquels sont assujettis les instruments pour le transport affectent leur marche d'une façon plus ou moins profonde et durable.

Nous allons voir le mode d'action de ces causes perturbatrices et les dispositions employées pour en neutraliser autant que possible les effets.

Parmi les diverses causes qui font varier la durée des battements d'un chronomètre, la plus importante est, sans contredit, la température.

Supposons que la température croisse : elle produira trois effets :

1° Allongement ou dilatation des pièces.

2° Augmentation de fluidité des huiles du rouage.

3° Affaiblissement de l'élasticité du spiral.

La loi exacte de cette dernière action n'est pas connue avec une précision absolue ; mais nous savons qu'à mesure que la température augmente, la résistance élastique des métaux diminue.

Reprenons maintenant la formule qui donne la durée des oscillations

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{M}}.$$

En admettant que la température croisse, le moment d'élasticité M décroît, ce qui fait croître T.

En même temps la longueur L du spiral croîtra : il en sera de même du rayon du balancier, supposé homogène, et la masse restant invariable, le moment d'inertie A sera augmenté : ces deux causes réunies feront croître T ; dans un pareil chronomètre, tout concourrait donc pour produire un retard, puisque la durée des oscillations se trouverait allongée.

Dans les montres de poche, on obvie à cet inconvénient en allongeant ou raccourcissant le spiral à l'aide de la raquette, ce qui permet de faire varier L dans le sens convenable pour conserver au radical une valeur constante : ce procédé serait impraticable dans

les chronomètres, parce qu'en raison de l'extrême précision requise, il faudrait effectuer ce réglage toutes les fois que la température varierait. Quant au moment d'élasticité M, on ne peut songer à y rien changer. Il ne reste donc que le moment d'inertie du balancier sur lequel on peut agir pour combattre le ralentissement dû à la chaleur.

De là est venue l'idée de construire le balancier compensateur, dont nous expliquerons plus loin le fonctionnement.

Pour évaluer l'importance de l'effet des variations de température, on a fait des expériences avec des chronomètres non compensés; ces expériences, exécutées d'abord par M. Dent, reprises par M. Airy, puis par MM. Delamarche et Ploix, ont fait voir qu'un chronomètre à balancier de laiton et à spiral en acier trempé retarde de 11^s par chaque degré d'augmentation de la température. En tenant compte des coefficients de dilatation de l'acier et du laiton, la formule qui donne la durée des oscillations permet de faire le départ de ces 11^s entre les trois causes perturbatrices : on trouve ainsi que l'effet de la diminution d'élasticité du spiral y entre pour 9^s. Pour compenser cet effet, il faut donc un balancier qui se contracte par la chaleur.

La température n'est pas la seule cause de perturbation avec laquelle il faille compter. Les huiles employées pour lubrifier les rouages s'épaisissent avec le temps et, la résistance augmentant, les amplitudes des oscillations diminuent. Selon que la durée des petites oscillations sera plus courte ou plus longue que celle des grandes, il résultera de là un effet progressif d'avance ou de retard. Il importe de bien comprendre que l'avance ou le retard d'un chronomètre ne dépend pas de la vitesse absolue de ses mouvements : en fait, bien des causes tendent à diminuer la durée des oscillations quand l'amplitude diminue, et par conséquent à faire *avancer* le chronomètre en réduisant la *vitesse* du balancier.

Parmi ces causes, citons sans autres détails :

L'effet de la masse du spiral, faible relativement à celle du balancier, mais non négligeable.

L'action de la force centrifuge sur le balancier, ou l'effet de l'élasticité des métaux qui le composent.

L'influence du choc de l'échappement, qui a lieu généralement avant le passage du balancier par sa position d'équilibre.

Ces trois causes produisent de l'avance avec le temps : leur effet peut se calculer.

Il y a ensuite d'autres causes dont l'action, bien que certaine, n'est pas encore suffisamment connue. D'abord les variations brusques de température paraissent influer momentanément sur l'élasticité des pièces du régulateur : il s'ensuit une perturbation plus ou moins permanente de la marche, et qui ne se confond pas avec l'effet constant et normal des changements de température.

La détérioration des pièces, notamment la rouille du spiral, se traduit par des perturbations de la marche : cette dernière cause produit généralement du retard.

Les actions électriques et magnétiques, que nous englobons à dessein dans un même groupe, sont aussi difficiles à mesurer qu'elles sont bien constatées. C'est peut-être au magnétisme du navire qu'il faudra rapporter certaines perturbations dont rien n'a pu rendre compte jusqu'ici. Il arrive rarement que les pièces du régulateur aient reçu assez de magnétisme permanent pour qu'on puisse le constater à coup sûr; pourtant le fait s'est déjà présenté. Les orages exercent une influence constatée par Krusenstern, Duperrey, Vincendon-Dumoulin, l'amiral Mouchez, et dont nous avons eu la confirmation en Cochinchine.

Mais il est impossible, dans l'état présent de la Science, de donner une règle pour expliquer et calculer ces actions, et nous en sommes réduits à les traiter comme des erreurs fortuites.

Enfin, bien que les chronomètres soient construits et installés de manière à être influencés le moins possible par le mouvement du navire, ils ne peuvent en être rendus indépendants : peu sensibles aux roulis ordinaires, ils sont très nettement affectés par les petits chocs répétés et notamment par les trépidations de l'hélice.

Mais, à part l'influence du temps et de la température, aucune de ces causes perturbatrices n'est assez bien étudiée jusqu'à présent pour permettre d'y parer par la construction. On sait, au contraire, disposer le régulateur (spiral et balancier) de manière à obtenir des oscillations sensiblement isochrones, quelle que soit leur amplitude et quelle que soit la température.

Nous allons étudier rapidement les dispositions qui ont été employées à cet effet.

80. — Du spiral.

On a vu que le nom de spiral est donné improprement à ce ressort, en ce qui regarde les chronomètres de précision, puisqu'il affecte la forme hélicoïdale dans son ensemble. Il se compose généralement d'un fil d'acier laminé, plus large qu'épais, enroulé sur un cylindre, trempé et recuit dans cette position. Certains artistes lui laissent cette forme, d'autres, et les plus nombreux, modifient ses extrémités dont ils font des courbes différentes de l'hélice : on les appelle alors les *courbes terminales* ou plus simplement les courbes. C'est Huyghens qui a imaginé d'adapter le spiral comme régulateur aux montres; mais Pierre Leroy, horloger français, est le premier qui ait trouvé le moyen d'avoir un spiral isochrone. Il a découvert que « dans tout ressort il existe une certaine longueur qui procure l'isochronisme des oscillations ». Les spiraux de Pierre Leroy différaient notablement de ceux qu'on emploie aujourd'hui; ils ne faisaient guère que deux ou trois tours; mais aussi les amplitudes d'excursion du balancier étaient de beaucoup inférieures à celles que l'on réalise de nos jours (1); il en résultait cet inconvénient que le balancier étant animé de moindres vitesses, était plus exposé à avoir son mouvement altéré par les chocs et par les déplacements plus ou moins brusques que subit un chronomètre en cours de navigation, ou quand on le porte sur soi. Aujourd'hui, le nombre de tours des spiraux employés va jusqu'à douze; il est rarement inférieur à huit.

Pour expérimenter l'isochronisme, Pierre Leroy, qui n'employait pas de fusée, réduisait les amplitudes des oscillations en ne remontant son chronomètre qu'à moitié, ce qui, avec un simple barillet, diminue d'autant l'action du moteur, et il comparait la durée des oscillations observées ainsi avec celle qu'avaient les oscillations quand le ressort faisait tout son effet. Dans les chronomètres à fusée, on n'obtiendrait pas ainsi la réduction d'amplitude nécessaire à l'expérience; les horlogers désarment alors d'une certaine quan-

(1) Pierre Leroy expérimentait ses spiraux pour des arcs compris entre 60° et 120°; aujourd'hui on a atteint 400° et plus, et l'on s'efforce de ne pas descendre au-dessous de 360°.

tité le ressort moteur; il est évident que cette expérience ne peut être faite que par un artiste habile et, autant que possible, par celui même qui a construit la montre. La comparaison des marches observées quand le ressort est ainsi désarmé partiellement, avec celles qu'on observe dans l'état normal, fait ressortir immédiatement le degré d'isochronisme qui s'évalue en secondes de marche diurne. On dit qu'un spiral a 2^s d'accélération aux petits arcs, quand sa marche diurne avec le ressort convenablement désarmé est de de 2^s plus grande que la marche (supposée en avance) dans les conditions normales. Cette expérience qui précède généralement l'achèvement de la compensation et du réglage, doit se faire avec le balancier même qui servira définitivement, approximativement compensé, et en maintenant la température aussi uniforme que possible.

Avec un balancier donné, la durée des oscillations varie selon la longueur du spiral. D'après la formule théorique, cette durée est proportionnelle à la racine carrée de la longueur : un balancier battant la demi-seconde avec un certain spiral, battrait donc la seconde avec un spiral de longueur quadruple. Les expériences de M. Phillips ont démontré que cette relation est sensiblement exacte et vérifie bien la théorie.

Nous trouvons ici une analogie remarquable avec les résultats que la théorie et l'expérience s'accordent à démontrer pour la longueur du pendule; le spiral serait en quelque sorte une tige de pendule courbe et indéfiniment déformable, et le balancier tout entier jouerait le rôle de la lentille. Mais, comme le fait observer M. Phillips, tandis que dans le pendule l'isochronisme n'existe que pour les amplitudes infiniment petites, il peut être obtenu dans le spiral pour des oscillations très grandes.

Voici ce que dit Pierre Leroy :

« Il y a dans tout ressort d'une étendue suffisante, une certaine longueur où toutes les vibrations, grandes et petites, sont isochrones; cette longueur trouvée, si l'on raccourcit le ressort, les grandes vibrations seront plus promptes que les petites; si, au contraire, vous l'allongez, les petits arcs s'achèveront en moins de temps que les grands. »

Répondant à la question : un spiral isochrone pour certaines limites, le resterait-il *entre* ces limites? Pierre Leroy ajoute :

« Je me suis assuré un grand nombre de fois, et il est aisé de vérifier, que les plus petits arcs de vibrations et les plus grands une fois rendus isochrones par cette méthode, tous les arcs intermédiaires le sont aussi avec la plus grande exactitude. »

M. Phillips a étudié la forme des courbes terminales qui procurent l'isochronisme. On y arrive en donnant à ces courbes une forme telle que, dans toute déformation du spiral, la variation de la courbure en tous ses points soit proportionnelle à l'angle d'écart dont dépend la déformation ; la courbe ainsi déterminée doit satisfaire à deux conditions :

1° Son centre de gravité doit se trouver sur la perpendiculaire menée par le centre des spires au rayon extrême de la courbe, là où elle se raccorde avec les spires.

2° La distance de ce centre de gravité au centre des spires doit être une troisième proportionnelle à la longueur de la courbe et au rayon des spires; autrement dit, égale au carré du rayon des spires divisé par la longueur de la courbe.

M. Phillips démontre que cette forme de courbes fait développer le spiral concentriquement, de façon que son centre de gravité se maintienne sur l'axe du mouvement, et que l'axe du spiral reste vertical; il en résulte que l'axe du balancier n'exerce pas de pressions latérales, ce qui était la condition à remplir.

M. Phillips a vérifié par l'expérience :

1° Que les spiraux à courbes théoriques se développent concentriquement.

2° Qu'ils exercent sur une balance élastique très précise des actions proportionnelles à l'angle d'écartement.

Il a enfin donné un grand nombre de tracés de courbes terminales satisfaisant à des exigences variées de la construction, en indiquant le moyen de créer un nombre illimité de formes nouvelles.

Diverses causes contribuent à détruire l'isochronisme du spiral, ou du moins à le rendre plus difficilement réalisable. Il suffit ici de les citer : influence du choc de l'échappement, quand il ne se produit pas exactement dans la position d'équilibre du balancier; élasticité des lames du balancier que la force centrifuge déforme d'une quantité variable; effet de la masse du spiral, dont il n'a pas été tenu compte dans la théorie. Avec le système de construction

ordinairement en usage, ces causes concourent généralement à accélérer le mouvement du chronomètre, à mesure que l'amplitude va diminuant, et, comme c'est là le principal résultat de l'épaississement des huiles, on comprend pourquoi la grande majorité des montres prennent de l'avance en vieillissant.

Pour quelques montres on observe parfois l'inverse; quand ce n'est pas l'effet d'une avarie grave, cela peut provenir de ce que les artistes ont cherché en travaillant le spiral à obtenir par tâtonnement l'isochronisme rigoureux, et que, dépassant le but, ils sont arrivés à avoir du retard pour les petits arcs. Mais alors les difficultés de la compensation augmentent dans une forte mesure et c'est contre leur gré que les artistes en viennent là. Ils préfèrent généralement laisser un peu d'avance aux petits arcs. Quand cette avance ne dépasse pas 1^s à $1^s,5$, elle est sans inconvénient : mais si, pour faciliter la compensation, on dépasse ces chiffres, cela peut entraîner de graves défectuosités. Nous avons observé des chronomètres revenant d'un voyage de deux ans, qui avaient pris des avances de 20^s et 30^s, l'usure des pivots ayant mis en évidence le défaut originel d'isochronisme. Ce vice peut encore se manifester, dans les pièces sans fusée, par une inégalité diurne de la marche, qui ne reste pas uniforme pendant les 24 heures, ou mieux, entre deux remontages successifs.

81. — Du balancier compensateur.

Nous décrirons le balancier circulaire simple, en raison de la généralité de son emploi et parce que la plupart des types nouveaux ne sont que des modifications du principe sur lequel il repose.

L'axe en acier est terminé par deux pivots, tournant dans des contre-pivots ou *trous*, généralemeut en pierre fine, rubis ou diamant; les parois sont lubréfiées par de l'huile.

Perpendiculairement à cet axe est ajustée une barre droite en acier, nommée *barrette*, qui forme le support des autres organes. Les deux extrémités de cette barrette portent, en sus des *vis réglantes*, deux lames, moitiés d'anneau cylindrique, ayant leurs génératrices parallèles à l'axe; ces lames sont formées de deux métaux : à l'intérieur, de l'acier, à l'extérieur, du laiton. Autrefois, on exécutait séparément les lames d'acier et de laiton, et on les rivait

ensemble par de nombreux points de leur surface (F. Berthoud). Mais elles se trouvaient ainsi réunies imparfaitement, et les dilatations manquaient de régularité et de continuité. Aujourd'hui elles font corps. Pour obtenir ce résultat, on commence par façonner au tour un cylindre plein en acier; ce cylindre, dont on reconnaîtra l'axe à des repères soigneusement conservés, est placé dans un creuset et entouré de laiton qu'on amène à la fusion, lequel, par le refroidissement, fera corps avec lui; dans la masse ainsi obtenue on découpe au tour les lames bimétalliques, en réservant la barrette; enfin deux traits de scie séparent l'anneau en deux lames (¹). Sur ces lames, les masses compensatrices, de forme cylindrique, sont disposées symétriquement.

Il est facile de se rendre compte du rôle de ces pièces. Supposons que la température s'élève; la lame extérieure de laiton, si elle était libre, se dilaterait plus que celle en acier; mais les deux étant soudées ensemble, cet effet se traduira par une pression normale, de l'extérieur vers le centre, qui augmentera la courbure de la lame composée. Son moment d'inertie diminuera; de plus, les masses compensatrices participant à ce mouvement, se rapprocheront du centre, et cela d'autant plus qu'elles sont plus voisines de l'extrémité libre; en les déplaçant sur la circonférence de la lame, on conçoit qu'on puisse faire varier cet effet et déterminer une diminution finale du moment d'inertie, telle qu'elle compense les effets de retard résultant de la dilatation linéaire de la barrette et du spiral, et de l'affaiblissement du moment d'élasticité de celui-ci. L'inverse arrivera si la température baisse. Une fois la compensation achevée, pour régler la montre, c'est-à-dire pour lui faire battre à peu de chose près $86\,400^{s}$ par jour, on agira sur le moment d'inertie du balancier par le déplacement des vis réglantes.

On trouve dans les Traités de Physique la description et la théorie d'un petit appareil fondé sur le même principe que le balancier compensateur, et connu sous le nom de *thermomètre Bréguet*. C'est une lame bi ou trimétallique, d'une minceur extrême, enroulée en spirale, qui, se déformant beaucoup sous l'action de la chaleur, peut servir de thermomètre.

(¹) Motel employait une double barrette et quatres lames d'un quadrant chacune.

La première idée de l'emploi des lames bimétalliques en horlogerie est due à Pierre Leroy : mais c'est Arnold, célèbre constructeur anglais, qui a, le premier, appliqué avec succès les propriétés de ces lames (*compound laminæ*) à la compensation des chronomètres. Son balancier ne différait pas essentiellement de celui qui a été employé depuis ce temps.

Yvon Villarceau a donné une théorie mathématique des déformations du balancier. Nous ne suivrons pas les savants développements qu'il a consacrés à cette étude : il suffira d'en résumer les principaux résultats. Il démontre d'abord qu'en considérant l'épaisseur des lames comme une quantité très petite relativement au rayon du balancier, si l'on néglige les quantités du second ordre, l'allongement éprouvé par un filet quelconque de la lame bimétallique est égal à l'allongement subi par un filet situé à la surface de séparation des lames, augmenté ou diminué, suivant qu'il s'agit du laiton ou de l'acier, d'une petite quantité proportionnelle à la distance des filets à la surface de séparation, et à la variation de courbure de cette surface de séparation. Calculant ensuite les tensions qui résultent de ces allongements et remarquant que pour l'équilibre intérieur du corps il faut que, dans une section quelconque, la somme de ces tensions soit nulle, il établit les équations qui définissent la courbure de la lame déformée, en fonction de la courbure initiale, des dimensions et des coefficients d'élasticité et de dilatation des deux métaux.

Soient

ρ le rayon de courbure à la température θ,

ρ_0 » » » θ_0;

on a la relation

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \upsilon(\theta - \theta_0),$$

υ étant une constante dont la valeur s'exprime en fonction des coefficients γ de dilatation, des coefficients d'élasticité E et des épaisseurs e des deux lames,

$$\upsilon = \frac{3}{2}\frac{\rho_0(\gamma'' - \gamma')}{e}\frac{1}{1 + \dfrac{(\mathrm{E}''e''^2 - \mathrm{E}'e'^2)^2}{4e^2\mathrm{E}''e''\mathrm{E}'e'}},$$

les accents $'$ et $''$ se rapportant respectivement à l'acier et au laiton.

Yvon Villarceau montre qu'il résulte de la théorie que si la lame est circulaire à une température déterminée, elle restera circulaire quand la température varie, le rayon seul du cercle variant.

82. — Propriétés du Balancier. Résultats de l'expérience.

Le balancier circulaire qui vient d'être décrit est de beaucoup le plus usité. Ce n'est pourtant pas qu'il soit parfait : mais les facilités relatives d'exécution et de réglage qu'il offre l'ont fait préférer par la plupart des artistes. A l'époque où Lieussou faisait des recherches sur la marche des chronomètres, il était à peu près exclusivement employé. C'est donc à ce balancier que s'appliquent plus spécialement les faits mis en évidence par cet ingénieur hydrographe. On trouvera dans les *Recherches chronométriques* (t. I, p. 216 et suiv.) le résumé substantiel de ses travaux. Il a étudié les marches de près de cent chronomètres relevées sur les registres des observatoires de Paris et Greenwich. La comparaison des courbes des températures et des marches diurnes a révélé les faits suivants :

1° Les points de la courbe des marches correspondant à des températures égales sont sensiblement en ligne droite.

2° Les diverses droites obtenues en joignant sur la courbe des marches les points d'égale température, sont sensiblement parallèles entr'elles et inclinées sur l'axe des temps.

3° Généralement ces droites isothermes présentent une parallèle maxima, correspondant à une certaine température Θ, variable d'un chronomètre à l'autre, et que Lieussou appelle *température de réglage*.

Partant de ces données, il a pensé qu'on pourrait représenter la marche correspondant à une température θ et à une époque t par la formule

$$m = a + bt + c(\Theta - \theta)^2.$$

Cette formule empirique, appliquée aux chronomètres étudiés, a permis de représenter leurs marches avec une grande exactitude ; on peut la traduire ainsi :

La marche d'un chronomètre, à température invariable, croît proportionnellement au temps.

Quand la température varie, cette marche varie, mais non proportionnellement : si elle est la même pour deux températures θ et θ', elle subit, en passant d'une de ces températures à l'autre, une accélération et elle atteint un maximum pour la température $\Theta = \frac{\theta + \theta'}{2}$ moyenne entre les deux.

Le fait signalé par Lieussou n'avait pas échappé aux horlogers. Dès l'invention du balancier bimétallique, ils avaient remarqué que, lorsqu'on règle la compensation de telle sorte que les marches aux températures extrêmes soient égales, on trouve de l'avance aux températures intermédiaires.

On conçoit en général la possibilité d'égaliser les marches à deux températures données, 0° et 30° par exemple.

Il suffit pour cela que les lames soient assez sensibles et déformables pour qu'en mettant les masses à leur extrémité libre, la chaleur produise un retrait plus considérable que celui qui est nécessaire pour la compensation, puisque les masses placées à l'autre extrémité, près de la barrette, ne produiraient pas d'effet du tout : dans le premier cas, la chaleur produira de l'avance, et du retard dans le second : il existe donc un point de la lame pour lequel elle ne produit ni avance ni retard, et ce point peut se trouver par tâtonnement en déplaçant les masses. Mais rien ne dit *a priori* que cette égalité obtenue pour les extrêmes s'étendra aux températures intermédiaires. Pour que cela eût lieu il faudrait que, pour un accroissement donné de la température, le moment d'inertie du balancier variât d'une quantité proportionnelle à la variation de l'action $\frac{M}{L}$ du spiral. Or cela ne doit pas arriver, en général, pour une position quelconque des masses, si l'on admet comme première approximation la loi des déformations indiquée par Yvon Villarceau.

Dans une brochure publiée en 1842, le célèbre horloger anglais Dent développait fort nettement ce double effet. « Un fait curieux, dit-il, a été dégagé et a préoccupé ceux qui se livrent à la fabrication de ces instruments; c'est qu'un chronomètre construit d'après le mode généralement reçu, s'il est réglé pour une température moyenne, retarde aux extrêmes, et inversement, s'il est réglé aux extrêmes, avance à la température moyenne. »

Il attribuait ce résultat à ce que la loi de variation du moment d'inertie du balancier est plus compliquée que celle de la variation du moment d'élasticité du spiral. Les expériences plus récentes de M. Phillips montrent d'ailleurs que la dernière variation n'est pas exactement proportionnelle à la température, comme l'admettait Dent, surtout pour l'acier trempé. Elle n'est pas la même pour tous les métaux ou alliages : le palladium, notamment, donne d'autres résultats que l'acier. Quoiqu'il en soit des causes, nous nous contenterons de la constatation du fait, basé sur l'observation d'environ 2000 chronomètres observés au Dépôt de la Marine depuis trente ans, confirmé par les observations faites par M. Hartnup sur plus de 1000 chronomètres, et étendue aux chronomètres embarqués par les observations d'officiers de diverses marines.

On règle généralement les chronomètres de manière qu'ils varient le moins possible entre 0° et 30°, et pour cela on s'efforce de leur donner la même marche à ces deux températures. Ce n'est qu'exceptionnellement qu'ils auront à subir à la mer des températures en dehors de ces limites.

Partant de là, l'observation peut se formuler ainsi :

Avec un spiral isochrone en acier et un balancier circulaire bien exécuté et bien réglé, le chronomètre, ayant des marches égales à 0° et 30°, avancera d'au moins 2^s à la température de 15°. Réglé à 0° et 15°, il retardera d'au moins 4^s à 30° : de même, réglé à 15° et 30°, il retardera de 4^s à 0°, ce qui revient à dire que la courbe des marches, ou la courbe représentative des rapports entre les moments d'inertie du balancier et les actions du spiral, diffère d'une droite et peut sensiblement s'identifier avec un arc de parabole. Ce fait ressortant également de la formule empirique de Lieussou, doit par conséquent être considéré comme exprimant la loi du phénomène dans le cas dont il s'agit.

Nous avons insisté sur cette question de l'influence de la température sur les chronomètres compensés, et nous y reviendrons encore. C'est qu'en effet on ne saurait trop faire comprendre que l'erreur due à la température n'est pas une imagination théorique, et que l'expérience est concluante et générale.

La compensation ne dépend que des rapports de quantités dont la loi est bien déterminée par la constitution des pièces métalliques qu'on emploie, cette loi n'est donc pas capricieuse, et les

constantes qui entrent dans son expression sont bien des constantes dans le sens propre de ce mot. Pour employer une analogie : le zéro d'un thermomètre peut se déplacer légèrement sous diverses influences; mais ce thermomètre n'en obéit pas moins en général à la loi constante de la dilatation. Il importe aussi de remarquer que plus le chronomètre dont on s'occupe est bon et bien réglé, plus il est nécessaire de tenir compte des termes de correction qui ne sont pas directement proportionnels à la température, mais bien à son carré.

Compensations additionnelles. — Les artistes se sont appliqués, avec des fortunes diverses, à détruire ce défaut de compensation par des dispositions nouvelles. Nous avons déjà parlé du procédé qui consiste à altérer l'isochronisme du spiral : mais on corrige un défaut par un autre. Il fallait essayer par conséquent de modifier le balancier lui-même : c'est là le but des compensations additionnelles. Nous nous bornerons à cette indication sans entrer dans le détail des nombreux systèmes proposés.

83. — Marche des chronomètres inclinés.

Jusqu'ici nous n'avons pas fait intervenir la pesanteur parmi les causes perturbatrices dont nous avons étudié les effets. Nous avons aussi supposé que le balancier est bien équilibré, c'est-à-dire que son centre de gravité se trouve toujours sur l'axe de rotation. Mais si ce centre de gravité est excentrique, il ne sera permis de négliger la pesanteur qu'à la condition que son action soit perpendiculaire au sens du mouvement, ce qui suppose la verticalité absolue de l'axe. C'est ce qui arrive rarement en toute rigueur; à terre même, on ne peut s'assujettir à poser le chronomètre rigoureusement horizontal ; la suspension produit des frottements qui empêchent la montre de revenir toujours identiquement à la position normale ; en mer, les mouvements du navire, malgré la suspension, dérangent indéfiniment cette verticalité. Quant aux montres de poche, elles sont sujettes à prendre des positions très variables et elles sont tantôt suspendues verticalement, tantôt posées à plat. Il importe que ces circonstances ne fassent pas varier les marches : il est donc nécessaire de se rendre compte

des perturbations qu'une inclinaison plus ou moins grande peut produire sur une montre réglée pour marcher dans la position horizontale.

Il est facile d'abord de voir que si une pareille pièce, dont les axes dans la position normale sont verticaux, est placée de manière à les rendre horizontaux, les frottements des axes doivent varier, ce qui affectera l'amplitude des oscillations. Généralement toute inclinaison se traduira ainsi par un changement d'amplitude : pour que la marche n'en éprouve pas d'altération, il faut donc que le spiral soit isochrone. Mais cette condition ne suffit pas : il faut encore que le balancier soit parfaitement centré. Pour nous rendre compte des effets que peut produire une excentricité du balancier, supposons que celui-ci ne décrive que des arcs moindres qu'une circonférence, et par suite ne dépasse pas de 180° de part et d'autre sa position d'équilibre. Admettons que, le centre de gravité se trouvant à une petite distance de l'axe, nous placions la montre de telle façon que dans l'état de repos ce centre de gravité soit dans le plan vertical passant par l'axe et au-dessous de cet axe. La force qui fait mouvoir le balancier se compose du moment de l'action du spiral, indépendant de la position de la montre, plus l'action de la pesanteur sur le balancier. Cette action s'ajoute à chaque instant à celle du spiral pour ramener le balancier à sa position d'équilibre : les oscillations deviennent donc plus rapides.

Si nous retournons le chronomètre de 180° dans le plan de son cadran, de telle façon que, l'axe restant horizontal, le centre de gravité du balancier se trouve au-dessus de l'axe, on observera l'effet inverse : la pesanteur tendra à écarter le balancier de sa position d'équilibre, dès qu'il en sera sorti ; elle se retranchera donc de l'action du spiral, et celle-ci se trouvant affaiblie, le chronomètre prendra un mouvement moins rapide que dans la position horizontale : il retardera.

La grandeur des effets ainsi produits dépend de l'inclinaison du chronomètre : elle est maximum quand l'axe du balancier est horizontal, nulle quand il est vertical. Cet effet subsistera encore mais atténué, si, au lieu de supposer le centre de gravité (dans l'état d'équilibre) dans la verticale de l'axe du chronomètre incliné, nous faisons tourner celui-ci dans un plan parallèle à celui de son cadran : le mode d'étude le plus commode pour constater cet

effet consiste à le décomposer en inclinant le chronomètre successivement sur ses quatre faces.

Nous avons supposé les oscillations moindres que 360°. On conçoit que si la demi-oscillation est supérieure à 180°, à partir de l'instant où cet arc de 180° est dépassé, la pesanteur supposée agir d'abord dans le même sens que le spiral, agira en sens inverse; ce qui fait pressentir que, passé une certaine amplitude, le régime observé peut être renversé, cette amplitude correspondant à l'égalité de durée des oscillations, quelle que soit l'inclinaison du chronomètre.

Quand un horloger veut s'assurer si le balancier d'un chronomètre est bien centré, il observe la marche de ce chronomètre en l'inclinant dans quatre directions rectangulaires, c'est-à-dire en mettant successivement en bas les points III^h, VI^h, IX^h et XII^h du cadran. On obtient ainsi des marches notablement différentes entr'elles, pour peu que le défaut d'excentricité soit appréciable. La moyenne des marches ainsi trouvées donne une marche indépendante du sens de l'inclinaison, et qui n'est fonction que de l'amplitude des oscillations dépendant de cette inclinaison. Examinant alors les marches comparées à cette moyenne, on en trouve généralement deux contiguës en avance. Supposons qu'on ait constaté ainsi une avance quand les points III^h et VI^h du cadran sont placés vers le bas : on ajoute alors du poids au balancier dans la partie qui, à l'état de repos, se trouve dans la direction de ces deux divisions du cadran, et par des tâtonnements successifs, on réussit à obtenir un équilibre plus ou moins parfait.

M. Phillips a traité cette question par l'Analyse : on trouvera le résumé de son savant travail dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (8 et 22 février 1864).

Il montre que la règle empirique adoptée par les horlogers n'est applicable qu'autant que les amplitudes des oscillations complètes ne dépassent pas 440° (plus exactement 439°28′). Pour cette amplitude même, les marches du chronomètre sont égales, quelle que soit la direction du cadran dans le plan incliné : pour une amplitude plus grande, la règle pratique doit être appliquée en sens contraire.

Dès 1859, on avait entrepris au Dépôt de la Marine des expériences pour évaluer l'effet de l'inclinaison sur les chronomètres et

compteurs. Ces expériences furent reprises en 1866. On observa, sur les chronomètres acquis à la suite du concours :

L'effet de l'inclinaison sur les quatre faces;

L'état d'isochronisme du spiral;

Les marches pendant une année à diverses températures.

Voici les principaux résultats de ces essais et de ceux qui ont été faits dans ces dernières années :

Les amplitudes initiales des oscillations étaient d'environ 400° avec des huiles fraîches. En diminuant la force motrice, ces amplitudes se réduisirent de 50° environ : la comparaison de ces marches avec les marches normales, avant et après l'expérience, donna l'état d'isochronisme.

Les expériences d'inclinaison indiquèrent qu'aucun balancier n'était rigoureusement centré. Le chronomètre dont le balancier était le mieux équilibré, 505 Winnerl, avait une marche de $+3^s,0$ IX^h en bas, et de $+5^s,9$ IX^h en haut, soit une différence d'environ 3^s. On a constaté qu'en général l'inclinaison, en augmentant les résistances, réduit les amplitudes et met en évidence le défaut d'isochronisme, lorsqu'il existe. Mais ce défaut, à lui seul, ne suffit pas à expliquer toutes les variations observées; en général, il y a une tendance au retard, qui s'expliquerait peut-être par l'élasticité du balancier. Il convient aussi de se rappeler les variations de la pesanteur apparente à bord, analysées par M. le Commandant Guyou.

Lorsqu'un chronomètre est soumis à de grands roulis, il y a des chances pour que les effets perturbateurs se neutralisent : mais il résulte de ce que nous venons de dire que, généralement, ces roulis se traduisant par une série d'inclinaisons, malgré la suspension à la Cardan, doivent avoir pour effet de diminuer légèrement les amplitudes : l'effet du roulis doit être, par conséquent, de faire avancer les chronomètres qui avancent aux petits arcs. M. de Magnac a constaté un effet de ce genre pour le 462 Winnerl : mais il n'a rien trouvé pour 16 autres chronomètres suivis par lui. M. Mouchez ne croit pas à l'influence des roulis sur les marches. M. Martin a constaté que les roulis et même les trépidations de la tête du gouvernail sont sans effet, pourvu que la suspension reste libre. L'inspection des nombreuses feuilles de marche à la mer que possède le Dépôt conduit à une conclusion analogue. Cet effet,

s'il se produit, n'influe que sur les dixièmes de secondes de la marche, et se dégage difficilement des autres éléments qui troublent celle-ci.

Pour les montres, on ne s'occupe généralement pas d'effectuer très rigoureusement le centrage du balancier. Le réglage du *plat* au *pendu* n'a d'autre but que d'expérimenter l'isochronisme du spiral employé, et de le poursuivre dans les limites de régularité que l'on exige de ces sortes d'instruments. La montre étant portée dans le gousset ou pendue verticalement, les amplitudes sont généralement diminuées : et c'est en touchant au spiral qu'on cherche à rapprocher les marches dans les positions verticale et horizontale.

L'étude de la marche des chronomètres inclinés semble susceptible d'une application pratique. Dans un grand nombre de cas, elle équivaut à une expérience d'isochronisme : elle permet souvent de pressentir la grandeur et le sens de l'accélération que les montres prendront par l'épaississement des huiles.

Le service hydrographique a repris dans ces derniers temps l'étude de ces questions.

84. — Des perturbations de la marche.

L'étude que nous avons faite du mécanisme du chronomètre nous a montré les principales causes qui peuvent troubler sa marche, et les dispositions employées pour diminuer les erreurs qui résultent de ces perturbations. Malgré tout le soin et l'habileté des artistes, ces erreurs ne peuvent pas être supprimées : les meilleurs chronomètres n'ont pas une marche constante. Nous allons exposer rapidement l'ensemble des effets de ce genre que l'observation a révélés, en les rattachant autant que possible à leurs causes. Nous serons amenés à rappeler plus d'une fois les principes dont il a déjà été parlé : mais on nous pardonnera quelques répétitions, qui se justifieront par l'importance des notions qu'il s'agit de démontrer.

En examinant les marches successives que prend un chronomètre, quand, après des intervalles de temps plus ou moins longs, il repasse par les mêmes températures, ce que l'on appelle ses *marches isothermes,* on reconnaît bien vite que ces nombres sont loin d'être égaux entre eux. C'est ce qu'on exprime en disant que

les montres prennent de l'*accélération*. Bien que la définition mécanique de l'accélération s'applique aux mouvements retardés aussi bien qu'à ceux dont la vitesse croît, l'emploi général de ce mot en horlogerie correspond à ce fait d'expérience que, dans la plupart des chronomètres, cette variation des marches isothermes a lieu dans le sens de l'avance : les marches en avance vont en augmentant, les retards vont diminuant et peuvent devenir des avances. Les montres qui retardent par l'effet du temps constituent l'exception.

On peut distinguer en thèse générale deux sortes d'accélération, offrant des caractères différents. L'une est particulière aux chronomètres neufs, et se rattache ordinairement à des variations rapides de la température, sans se confondre avec l'effet normal de celles-ci. Elle paraît due à des variations de forme et d'état moléculaire qui se produisent dans les spiraux et balanciers. Les courbes du spiral s'ouvrent généralement et diminuent de courbure, ce qui modifie le point d'application de la force et la position d'équilibre du balancier, ainsi que le mode d'action du ressort, dont le moment dépend de sa forme. Pour faire le spiral, on prend un fil rectiligne, qu'on enroule en hélice et qu'on trempe sous cette forme : mais la trempe ne détruit pas absolument la tendance des molécules à se rapprocher de leur ancien mode de groupement : les courbes terminales surtout, produites à une température inférieure à celle de la trempe, ne possèdent pas une stabilité complète de forme.

Le balancier est formé de deux métaux dans un état d'association forcée, qui, par suite, ne se trouvent ni l'un ni l'autre à l'état d'équilibre moléculaire : la force centrifuge les déforme constamment dans l'état de mouvement : de là une cause de déformation graduelle, que des circonstances accidentelles telles que chocs, influences électriques ou calorifiques, peuvent exagérer et précipiter.

Une autre cause d'accélération réside dans la modification des forces élastiques dépendant de la constitution moléculaire. L'état vibratoire constant du spiral produit un effet analogue à celui qu'on observe dans les ponts suspendus : le fer, fibreux d'abord, devient plus cristallin, sa ténacité diminue, mais son élasticité augmente. Les premières causes peuvent, selon les circonstances et la forme

des organes, donner accélération ou retard : cette dernière produit toujours de l'accélération.

Les horlogers connaissent fort bien ces effets : ils ont la précaution, avant d'envoyer une montre au concours, de la faire marcher longtemps, à des températures variables, surtout au chaud : on recuit le spiral; quelques artistes soumettent le balancier, une fois achevé, à des températures élevées, 200° à 300°, afin de l'amener à un état moléculaire plus stable.

Malgré ces précautions, il n'est pas possible d'éviter entièrement ces perturbations dans les chronomètres neufs.

Ces effets ne sauraient être estimés à l'avance, et il est impossible de prédire si un chronomètre neuf prendra une accélération plus ou moins forte. Mais l'expérience nous a montré que, pendant les trois premières années, on constate généralement une accélération, qui peut varier de 5^s à 15^s. Les mêmes instruments, après renouvellement des huiles, ne présentent plus ces phénomènes particuliers, au moins pas au même degré.

En dehors de l'accélération des chronomètres neufs, on en remarque fréquemment une autre, même dans des instruments dont le régulateur est arrivé à l'équilibre moléculaire. Elle est due principalement aux deux causes que nous avons indiquées dans la partie théorique :

1° *Anisochronisme du spiral,* plus ou moins voulu : l'artiste a laissé de l'accélération aux petits arcs pour faciliter la compensation;

2° *Effet de l'échappement,* quand le choc a lieu avant le passage du balancier par sa position d'équilibre.

Dans les deux cas, l'accélération résulte seulement de la réduction des amplitudes, due à l'épaississement des huiles et à l'augmentation des résistances. Dans de bons chronomètres, sauf accident, ces causes réunies augmentent rarement la marche primitive de plus de 3^s ou 4^s.

En relevant sur les feuilles des observatoires les marches à température égale d'un chronomètre, avant et après une campagne d'un ou deux ans, on trouve souvent que cette marche a à peine varié. Ce n'est pas à dire qu'elle n'ait pas varié dans l'intervalle.

Elle peut d'abord être plus ou moins altérée par le transport de terre à bord ou du bord à terre. Ces altérations ne dépendent pas

uniquement des chocs que l'instrument subit pendant les transbordements : elles tiennent à un changement complet de régime et de milieu; cet effet a été souvent constaté, quoiqu'il soit loin d'être général. M. Martin pense qu'on ne peut rien dire de précis à cet égard; nous sommes de son avis, et nous conseillons comme lui d'embarquer les chronomètres assez à temps pour pouvoir obtenir leur marche à bord, une fois qu'ils sont acclimatés.

Ensuite, et sans parler de l'effet de la chaleur ou du froid, on observe souvent des variations accidentelles de marche, que l'on désigne sous le nom général de *sauts*.

Il y a plusieurs espèces de sauts. Tantôt le changement de marche persiste, tantôt, et plus rarement, la marche revient à son état primitif; ce retour peut lui-même s'effectuer brusquement ou graduellement. Il sera, dans tous les cas, assez difficile d'en indiquer la cause, quoique parfois l'analyse des circonstances du phénomène puisse mettre sur la voie d'une explication. Voici d'abord un cas qui se présente très fréquemment dans la pratique, et que les journaux de chronomètres nous montrent très souvent.

Au départ de France pour les pays chauds, la température s'élève quelquefois assez vivement. Cette variation se traduit dans un grand nombre de cas par une accélération en quelque sorte brusque, surtout pour des chronomètres neufs : l'effet temporaire, résultant de l'élévation de température, qui généralement doit occasionner un retard, se trouve masqué par l'effet de changements moléculaires qui persistent quand la cause a cessé d'agir, suivant l'âge de la montre. Dans les concours du Dépôt de la Marine, nous observons souvent qu'une montre, transportée de la température ambiante dans la caisse chaude, retarde les deux ou trois premiers jours, puis prend une avance progressive; revenue à l'air ambiant, après un séjour de cinq à six jours dans la caisse chauffée à 30°, au lieu de reprendre sa marche antérieure, elle prend une avance de 1^s à 2^s; cette avance tantôt persiste pendant toute la durée du concours et corrige d'autant la marche normale, tantôt elle va se perdant peu à peu, en six à huit jours, et ne peut plus être alors confondue avec l'accélération. Cette avance paraît être d'autant plus longue à disparaître que la haute température à laquelle elle est due aura duré plus de temps. Nous avons observé quelquefois un effet analogue en retard, quand on place les chronomètres dans

la glace fondante; mais il est généralement moins accentué et toujours moins persistant. Il y a là quelque chose d'analogue au déplacement temporaire du zéro des thermomètres résultant de ce qu'ils ont passé d'une façon trop rapide de la température de l'eau bouillante à la température ordinaire.

Quoiqu'il en soit, un chronomètre qui a passé par ces variations reste, après comme avant, sujet à l'influence normale de la chaleur, retardant à peu près de la même quantité à mesure qu'on s'éloigne graduellement de part et d'autre de sa température de réglage.

D'autres fois, le saut brusque de la marche peut être dû à un ou plusieurs chocs. M. de Magnac nous cite le chronomètre 462 Winnerl, qui, à la suite de quelques violents coups de talon donnés par le navire, eut une marche retardée d'une manière permanente de $1^s,4$ environ. D'un autre côté, M. Martin constate un effet de retard général sur onze chronomètres, produit par des coups de marteau dans le voisinage, mais disparaissant avec la cause qui l'a produit. Ici encore nous avons, avec la même cause ou des causes analogues, des effets permanents ou passagers, du même sens d'ailleurs, et que nous pouvons assimiler à des sauts. Il faut rapprocher de ces résultats ce que nous avons dit de l'effet produit par le transport de terre à bord et inversement.

Enfin M. Mouchez décrit certains sauts qu'il a observés sur des chronomètres Winnerl et qui atteignaient jusqu'à 120^s par jour. Peut-être est-il permis d'accepter l'explication qui attribue ces anomalies à la mauvaise qualité des pierres formant les contre-pivots. Dans tous les cas, cette observation constitue une véritable rareté, fort heureusement, et peu d'officiers ont eu depuis lors l'occasion de constater des variations aussi étendues et aussi brusques. Ce qu'il y a de singulier, c'est qu'après ces perturbations considérables, le chronomètre revenait à la marche normale. Il nous paraît impossible d'attribuer ces anomalies à une autre cause qu'à un défaut de l'échappement : on comprendrait ainsi pourquoi un même chronomètre saute constamment en retard, un autre en avance. Nous avons observé cet effet sur des chronomètres vieux d'huiles; avec certains échappements, on voit alors l'aiguille parcourir la seconde entière à la fois, ou bien encore, dans d'autres cas, une oscillation ne pas produire le dégagement du doigt d'échappe-

ment. Il serait donc possible d'attribuer ces sauts à un dérangement momentané de la roue d'échappement. J'ai eu occasion de constater des *sauts* de plusieurs secondes dans les concours du Dépôt de la Marine; mais les montres sujettes à cet inconvénient sont toujours éliminées.

Nous empruntons encore à M. Mouchez la description d'une autre espèce de dérangements : « Il arrive souvent, et toujours sans cause connue, qu'un chronomètre ordinairement bon se met à varier de 10^s à 20^s par jour dans un sens ou dans un autre, et se trouve ainsi momentanément hors de service. Ce dérangement, qu'on ne saurait mieux définir qu'en le comparant à une maladie, dure plusieurs jours, souvent deux ou trois semaines; *le chronomètre reprend ensuite sa marche ordinaire.* » En l'absence de détails plus explicites, il nous est impossible de faire rentrer ce genre d'anomalies dans une catégorie déterminée, et encore moins d'en soupçonner la cause. Ce qui paraît établi, c'est que des accidents de ce genre n'arrivent guère qu'à des chronomètres ayant plus de trois ans d'huiles; on est rarement à même de les observer sur des chronomètres marchant dans des conditions normales.

Il arrive souvent, par contre, qu'un chronomètre, au bout d'un temps plus ou moins long, se mette à varier irrégulièrement, mais, pour employer la comparaison de M. Mouchez, c'est là une maladie qui n'a d'autre remède que le passage chez l'horloger. Dans la plupart des cas, il y a là une altération profonde du mécanisme; nous avons eu une fois l'exemple d'un chronomètre dont le spiral avait acquis du magnétisme permanent. D'autres fois, et cela arrive souvent, l'huile a abandonné les pivots des premiers mobiles; et les frottements variables de l'acier sur la pierre déforment les pivots, usent les pierres, et produisent des anomalies énormes dans la marche; d'autres fois encore, c'est un échappement trop juste ou trop lâche; quand la température vient à varier, l'échappement ne fonctionne plus que d'une manière intermittente et les mouvements imprimés de l'extérieur au chronomètre doivent suspendre ou exagérer quelquefois le jeu de l'échappement; de là, selon le cas, retards ou avances brusques, jusqu'à ce que, soit par un choc, soit par le retour d'une température plus normale, les pièces aient repris leurs positions respectives. Il peut arriver

que le ressort auxiliaire du remontage soit avarié et que la transmission de mouvement du moteur devienne ainsi plus capricieuse. Enfin le jeu des vis de pression peut donner lieu à de petits déplacements des masses régulatrices.

Un effet perturbateur, qui a nécessairement passé inaperçu des anciens observateurs et qui acquiert de plus en plus d'importance, est dû aux trépidations de l'hélice. M. Rouyaux en a fait l'étude : il en a établi la réalité par les comparaisons journalières ; il a même essayé de tirer de ces indications différentielles des résultats absolus. Les méthodes qu'il propose sont assez délicates dans l'application : nous renvoyons pour le détail au Mémoire de cet officier (*Recherches chronométriques*, 12e cahier).

Nous avons dit que l'influence de l'électricité sur les chronomètres paraît assez bien établie. Mais cette action semble capricieuse et irrégulière : elle ne se produit pas toujours ; il faut peut-être pour cela des circonstances spéciales et accumulées. Nous ne nous hasarderons pas à proposer la moindre explication, puisque le fait lui-même, quoique très probable, n'est pas suffisamment dégagé et analysé. Mais on fera bien, après des orages un peu violents, de vérifier le plus tôt possible l'état et la marche.

Nous avons cité les variations irrégulières dues à l'usure des pivots ou à une avarie dans le mécanisme ; ces avaries peuvent être souvent la conséquence du retrait de l'huile, souvent aussi elles se produisent dans les transports : elles ont généralement pour résultat de diminuer les amplitudes ; l'effet dominant alors est celui qui résulte du défaut d'isochronisme, bien qu'il se manifeste un peu irrégulièrement. C'est donc en raison de ce qu'on a vu, à des avaries de ce genre-là qu'on devra généralement rapporter les accélérations brusques, qui ne peuvent s'expliquer par une action analogue à celle que la chaleur produit sur les chronomètres neufs.

Nous ne prétendons pas expliquer par ce qui précède toutes les variations anormales de marche, mais nous pouvons affirmer, d'après l'examen fait de l'historique des chronomètres de la Marine française, que le plus souvent les dérangements se ramènent à une cause de ce genre.

L'accident le plus grave qui puisse arriver à une montre, c'est l'*arrêt*. L'arrêt n'est pas toujours le résultat d'une avarie, il est souvent fortuit ; sans parler de celui qui résulte de la négligence

de la personne chargée du remontage, il peut se produire en vertu de circonstances qui n'influent pas sur la marche même de l'instrument. Les chronomètres s'arrêtent assez souvent pendant le remontage; cela peut provenir d'une disposition vicieuse du ressort auxiliaire ou des cliquets. D'autres fois, c'est dans l'échappement qu'en réside la cause; il peut arriver aussi qu'un corps étranger, une parcelle de métal détachée du rouage s'introduise dans un organe essentiel. Bien qu'un chronomètre qui s'est arrêté sans cause apparente doive inspirer une légitime méfiance, il ne faudrait pas pour cela en rejeter les indications, une fois qu'on aura réussi à le remettre en marche : l'expérience a prouvé que des montres sujettes à des arrêts avaient néanmoins dans les intervalles des marches régulières, et que leurs indications pouvaient être utilisées. Si, par exemple, le corps étranger a été déplacé par la secousse circulaire donnée au chronomètre quand on l'a remis en marche, la montre doit revenir à un régime normal. Si la cause d'arrêt est dans l'appareil de remontage, il suffit souvent de redoubler de précautions pendant cette opération : bref, quand un chronomètre s'est arrêté, et qu'on n'a pas lieu de soupçonner une avarie grave, on essaiera de le remettre en marche après l'avoir remonté, en lui imprimant un mouvement circulaire un peu vif, et si l'on y réussit, on pourra continuer à le comparer aux autres montres, et supposer même que sa marche n'a pas varié.

L'arrêt résulte souvent d'une usure exagérée des organes ; alors il est toujours précédé de perturbations de marche qui l'annoncent : plus souvent encore il est dû à la rupture d'une pièce ; enfin on sait que les meilleurs ressorts moteurs peuvent se briser sans cause apparente.

Le lecteur peut voir, par le tableau que nous lui avons présenté des irrégularités de diverses espèces, que malgré quelques essais heureux, on ne saurait espérer trouver un chronomètre parfait. Il est en particulier très difficile de trouver une montre qui ne dépende plus ou moins des variations de température ; on s'efforce de réduire ces effets, mais on n'y parvient que dans une certaine mesure. Les conditions d'admission des chronomètres de la Marine française sont combinées de telle sorte (1) qu'étant donnée une montre qui

(1) *Recherches chronométriques*, 1er et 13e cahiers.

traverse en trois mois des températures comprises entre 0° et 30°, si l'on calcule son état au bout des trois mois avec une quelconque des marches observées dans l'intervalle, il ne doit pas différer de plus de 2^{min} de l'état vrai, ce qui ferait attérir à 30 milles.

Cette prétention peut sembler fort modeste; il n'est pourtant que peu de montres parmi celles présentées au concours, qui satisfassent à cette exigence : l'action de la température dans ces irrégularités est prépondérante. Il semble aussi que l'efficacité de la compensation varie dans une certaine mesure avec le temps. Cela résulte déjà des variations que subit le spiral; cela tient aussi à ce que le balancier, éprouvant à la longue des influences analogues, sa forme ainsi que ses coefficients de dilatation varient; enfin les huiles elles-mêmes subissent différemment l'action de la chaleur, selon qu'elles sont fraîches ou vieilles; ce serait donc un bien grand hasard, si tout cela n'influait pas plus ou moins sur la compensation. Il résulte de là deux conclusions :

La nécessité de tenir compte de l'action de la température et de chercher à la corriger.

La convenance de ne tirer ces données que de l'état à peu près actuel de la montre.

Nous devons expliquer dès à présent pourquoi on a laissé exclusivement aux officiers chargés des montres le soin de déterminer eux-mêmes ces coefficients de température et d'accélération, ainsi que la marche normale à une époque et à une température données, en d'autres termes les constantes de l'instrument, et pourquoi les Observatoires et le Dépôt ne communiquent à cet égard que des renseignements officieux, et sur la demande expresse des officiers responsables.

Autrefois chaque montre, à sa sortie du Dépôt de la Marine, était accompagnée d'un bulletin donnant la valeur de l'accélération et des constantes de la température. On a dû renoncer à cette pratique, et voici pourquoi :

L'expérience a prouvé qu'il est généralement imprudent de se fier aux marches d'un chronomètre dont les huiles ont plus de trois ans de date. Aussi est-il de règle dans la Marine de l'État qu'un chronomètre ayant atteint trois ans d'huiles rentre au Dépôt et passe chez l'horloger. Le nettoyage se fait avec tout le soin imaginable : on ne change rien au balancier ni au spiral, ces deux

organes sont replacés ensuite exactement dans les positions qu'ils occupaient auparavant; tout au plus touche-t-on légèrement aux vis de réglage si la marche est trop forte en plus ou en moins. Il y a donc beaucoup de chances pour que la compensation reste la même après nettoyage. On ne saurait toutefois en répondre absolument. Tout d'abord, les voyages des chronomètres, des ports chez les horlogers, et réciproquement, se font par chemin de fer, et les chocs dérangent toujours plus ou moins la marche. Puis les effets de la température, quoique variant peu dans les traits généraux que nous avons esquissés, changent néanmoins pour un même chronomètre avec l'âge des huiles, et la compensation peut se trouver plus ou moins parfaite, selon l'époque à laquelle on observe. Les données de cet ordre ne sauraient être assignées d'avance avec la précision numérique d'une formule, puisqu'elles peuvent varier avec la nature des huiles employées. Cela est encore beaucoup plus difficile pour l'accélération : on ne peut appliquer aux périodes ultérieures les accélérations des premières années, et l'influence de l'âge des huiles échappe à toute prévision. Nous citerons comme exemple le chronomètre 309 Vissière que M. de Magnac avait trouvé très sensible à la température en 1868, et qui est revenu de réparation en 1871 très bien compensé. Par contre, le n° 318 du même constructeur, après avoir eu dans deux campagnes lointaines les marches les plus satisfaisantes, était signalé par l'officier des montres du *Lhermitte* comme un véritable thermomètre, et pourtant l'artiste nous a affirmé que, dans les deux cas, il n'avait pas touché au régulateur.

D'après cela, il semble plus prudent de ne pas hasarder des prédictions qui risqueraient de partager le sort des prophéties météorologiques, et qui auraient ainsi le grave inconvénient de donner à l'officier des montres une fausse sécurité, ou bien, quand l'événement viendrait les démentir, de lui inspirer une méfiance exagérée.

Les dernières marches relevées à l'Observatoire du port peuvent donner une première approximation; en y joignant quelques renseignements généraux que le Dépôt de la Marine s'empresse de fournir à qui les lui demande, et surtout en se rappelant que la plupart des chronomètres retardent aux températures extrêmes et ont une marche maximum vers 10° ou 20°, on aura une base sur

laquelle on pourra fonder les premières traversées. Plus tard, c'est à leur expérience personnelle que les officiers demanderont les meilleurs renseignements. Une montre doit être étudiée par celui qui est appelé à s'en servir. N'oublions pas que dans la pratique ordinaire de la navigation, avec la durée des traversées actuelles, nos chronomètres sont assez bons pour faire suffisamment bien attérir, sans qu'on fasse usage d'un coefficient de température ou d'accélération bien rigoureux. Quant aux recherches de précision, ce n'est pas dans les marches très anciennes d'un chronomètre, mais bien dans celles qu'on a observées, qu'on trouvera les éléments pour pousser l'approximation aussi loin que ces instruments le comportent. M. Mouchez pense à cet égard que la dernière marche obtenue directement sera toujours la meilleure et celle qui donnera le plus de probabilités d'exactitude, sauf, bien entendu, l'application des corrections de température et d'accélération.

85. — Calcul des marches au mouillage.

Le temps que dure une relâche est généralement assez court pour que la température de l'armoire des montres varie peu dans l'intervalle des observations. Rien n'empêche d'ailleurs de fractionner un long séjour en périodes, durant chacune desquelles on peut admettre une température moyenne. Si les variations des marches étaient rigoureusement proportionnelles à celles du thermomètre, la marche moyenne correspondrait dans tous les cas à la température moyenne. Il n'en est pas ainsi généralement; mais, au point où en est la compensation des chronomètres, on peut admettre cette proportionnalité tant que les moyennes journalières du thermomètre ne varient pas de plus de 3° ou 4°. Cela posé, on pourra choisir pour la détermination des marches entre les méthodes de calcul proposées par M. Daussy et M. Vincendon-Dumoulin, ou l'on pourra recourir au procédé graphique de M. Mouchez. Nous allons résumer brièvement ces méthodes que l'on trouvera exposées dans le premier Volume des *Recherches chronométriques*.

Méthode de M. Daussy. — Si l'on a fait plus de deux observations d'états absolus pendant une relâche, il importe d'obtenir une

marche affranchie autant que possible des erreurs diverses qui affectent les états et que nous n'avons pas à énumérer ici.

Prenons pour état absolu approché le premier état observé E_0 ; soit E_i le dernier état observé; calculons une marche approchée par la formule

$$\frac{E_i - E_0}{p} = m,$$

p étant le nombre de jours écoulés.

A l'aide de la marche approchée m, réduisons tous les états absolus à la même heure de la journée, puis déduisons du premier état les états suivants; on trouvera généralement ainsi des nombres différents de ceux que l'observation a donnés. Soit maintenant a l'erreur de l'état absolu E_0, y l'erreur sur la marche réelle provenant de ce qu'on prend m pour cette marche. Soit E′ l'état absolu vrai pour un jour de rang n, et E l'état déterminé directement ce jour là, on aura

$$\text{État observé} = \text{État calculé} + x + ny,$$

et si l'on pose

$$\text{État observé} - \text{État calculé} = a,$$

$$x + ny = a.$$

On formera ainsi autant d'équations qu'on aura d'observations. Soit q le nombre des observations; on ajoutera ces q équations; l'équation somme sera

$$qx + y\,\Sigma n = \Sigma a, \tag{1}$$

le signe Σ désignant les sommes.

Puis on multiplie chaque équation par le coefficient de y dans cette équation et l'on ajoute encore : l'équation résultante sera

$$x\,\Sigma n + y\,\Sigma n^2 = \Sigma an. \tag{2}$$

La résolution des équations du premier degré (1) et (2) donnera les valeurs de x et y, et l'on aura alors pour la marche $m + y$ et pour l'état absolu au premier jour $E_0 + x$.

Cette application de la méthode des moindres carrés est légitime si l'on peut admettre qu'il n'y a pas d'erreur systématique dans les

états et que la marche est réellement restée constante. C'est ce que l'on pourra apprécier en construisant la courbe des états absolus, et voyant si la moyenne est bien une ligne droite. M. Mouchez se contente même de prendre sur cette courbe les états sensiblement en ligne droite et d'en conclure la marche, ce qui peut suffire dans bien des cas. Si l'on a des états observés le soir et le matin, il conviendra de traiter chacun des groupes séparément, pour éviter les erreurs systématiques.

Méthode de MM. Vincendon-Dumoulin et Coupvent-Desbois. — On écrit par ordre de date les états absolus, ramenés à l'aide de la marche approchée à la même heure de chaque journée; on retranche le premier du dernier, le deuxième du pénultième, le troisième de l'antépénultième, etc. On multiplie chacune de ces différences par la différence des dates correspondantes, et l'on fait la somme des produits, qui sera de la forme

$$S = (m-1)(E_0 - E_{m-1}) + (m-3)(E_1 - E_{m-2}) + (m-5)(E_2 - E_{m-3}) + \dots,$$

m étant le nombre d'observations d'états absolus. Cette somme est le numérateur de la marche cherchée. Pour trouver le dénominateur, soient $n_0, n_1, n_2, \dots$ les différences de deux dates consécutives, en commençant par la première, on formera l'expression

$$D = (m-1)(n_0 + n_{m-1}) + (m-3)(n_1 + n_{m-2}) + \dots$$

et la marche sera représentée par $\frac{S}{D}$.

Grâce à la réduction à une même heure, les nombres m et n sont toujours entiers, ce qui simplifie le calcul.

Cette formule est d'un calcul plus rapide et plus facile que celle de M. Daussy; mais cette dernière a l'avantage de corriger en même temps la marche et l'état absolu; elle tient compte de toutes les observations d'états, tandis que l'autre ne tient compte que d'un nombre pair d'états, et dans le cas de trois états, n'augmente pas la précision de la méthode vulgaire.

En pratique, les deux manières de procéder donnent des résultats peu différents et également acceptables, à condition qu'on

puisse admettre, comme nous avons fait, que pendant la période des observations, les variations de la moyenne thermométrique n'ont pas excédé 4°.

La marche ainsi trouvée pourra être considérée comme correspondant à la moyenne des températures et à l'époque moyenne.

86. — Procédés graphiques.

Quand il s'agit de déterminer les lois d'un phénomène qu'on sait d'avance être régulier, le tracé graphique peut servir, à titre de renseignement, pour peindre aux yeux ce que l'esprit voit mal; mais en général, si l'on veut de la rigueur, on sera toujours obligé d'en venir au calcul numérique. Il n'en est pas tout à fait ainsi dans le sujet qui nous occupe. La température et le temps sont les seules variables dont l'influence ait pu être bien mise en évidence; mais bien d'autres causes agissent, dont il est difficile de tenir compte; avant donc que de se hasarder dans des calculs numériques souvent fort longs, il convient de s'assurer que la fonction qu'on étudie est bien continue, ou du moins de distinguer les époques où elle l'est de celles où elle cesse d'offrir ce caractère. A cet égard, les courbes sont un précieux moyen d'investigation, elles permettent d'opérer cette étude préliminaire; mais elles ont un inconvénient, leur interprétation a toujours quelque chose d'arbitraire quand on ne préjuge pas un peu la loi qu'elles devront donner. M. Lieussou a commencé par construire des courbes pour démêler la loi en apparence compliquée des variations de marches; mais cette loi une fois dégagée, il a eu recours au calcul pour la détermination des constantes. Néanmoins, pour la pratique ordinaire de la navigation, les graphiques sagement appliqués seront d'un emploi très fructueux, et la simplicité de cette manière de faire séduit généralement les officiers.

M. Mouchez est le premier qui ait systématisé ce procédé; nous allons résumer brièvement l'esprit de sa méthode.

Pour déterminer les marches du chronomètre étalon dans les relâches, M. Mouchez construit d'abord la courbe des états absolus de ce chronomètre; puis il choisit pour le calcul de la marche plusieurs états à peu près en ligne droite. Cette marche obtenue, il

trace sur une seconde feuille la courbe des marches de l'étalon.

Pour cela, on prend deux axes coordonnés rectangulaires; l'axe horizontal est celui des temps, l'axe vertical, celui des marches et des températures.

On reporte en regard de chaque date une ordonnée égale à la marche de l'étalon; puis on construit la courbe des marches des autres chronomètres, en ajoutant aux ordonnées représentant la marche de l'étalon, les marches relatives déduites des comparaisons. M. Mouchez explique comment on peut rendre ces courbes plus continues, les redresser de sentiment, et contrôler par leur moyen la continuité de la fonction, en mettant en évidence les variations accidentelles. Ces dernières, quand on en constate, doivent être éliminées du résultat.

On construit sur la même feuille la courbe des températures. On étudie alors les inflexions de ces diverses lignes, et pour se rendre un compte plus exact du sens des variations, on construit pour chaque chronomètre les lieux des marches isothermes, c'est-à-dire qu'on joint par des traits continus les marches correspondant à une même température, ce qui fournit un système de courbes propres à représenter isolément les effets de la température et de l'accélération.

M. Mouchez admet comme résultat de ses recherches :

1° Que l'accélération est variable de signe et de grandeur avec le temps.

2° Que les variations de marche sont proportionnelles à celles de la température; par conséquent la formule de Lieussou ne s'appliquerait pas aux chronomètres embarqués.

Cette assertion est conforme à l'opinion précédemment émise par M. de Cornulier; les observations plus récentes ne la confirment pas de tout point.

Enfin M. Mouchez a trouvé aussi par l'examen de ses courbes isothermes, que pour certaines montres l'efficacité de la compensation semble varier avec le temps. Cela résulterait, pour nous, de l'existence dans la formule d'un terme fonction du temps et de la température, de la forme $t\theta$. M. Pagel a reconnu la convenance d'introduire quelquefois un terme de cette forme, et M. de Magnac, appliquant la formule de Taylor, a constaté de son côté que dans certains cas ce terme n'est pas négligeable. Mais nous reviendrons

sur les résultats; nous tenions à montrer d'abord la méthode d'investigation.

Beaucoup d'officiers sont entrés dans cette voie; nous citerons, parmi les perfectionnements que ce procédé a reçus, les travaux de MM. de Magnac et Fleuriais.

M. de Magnac procède comme M. Mouchez pour la construction des courbes. Ayant obtenu les courbes de marches en regard des courbes de température, il trace aussi les lieux des marches isothermes.

Partant de ce principe que lorsque la fonction représentant les marches est continue, elle peut être développée suivant la formule de Taylor, en se bornant aux termes du deuxième degré, il montre qu'à température égale, la courbe des marches peut être considérée comme un arc de parabole. Il trace ces arcs de parabole pour les diverses températures, les remplaçant par des droites quand l'intervalle est suffisamment court, et, quand il s'agit de trouver la marche correspondant à une époque et à une température particulières, il mesure l'ordonnée aboutissant à cette courbe isotherme et passant par cette époque.

M. Fleuriais, admettant que la marche varie proportionnellement à la température, détermine d'après cette hypothèse les coefficients de température; puis il corrige à l'aide de ces coefficients chaque marche pour la ramener à une température constante arbitraire. Il obtient ainsi une courbe des marches isothermes. Si cette courbe est sensiblement droite, c'est que l'hypothèse était juste dans les limites des erreurs d'observation; l'inclinaison de sa direction sur l'axe des temps donne alors la valeur du coefficient d'accélération. Si la courbe a des inflexions, il y a lieu de les étudier et d'en découvrir les causes, de voir si ces inflexions sont ou non dépendantes de la température, etc.

A l'égard de ces méthodes graphiques, nous présenterons une observation qui s'applique à toutes. Au lieu de représenter les marches par des points, il sera utile d'entourer ces points d'un petit cercle dont le rayon, à l'échelle de la construction, sera la valeur probable maximum de l'erreur qu'on peut commettre sur une marche donnée, en raison des erreurs des observations d'états et de températures et des comparaisons. On parviendra ainsi, en assujettissant les courbes à passer seulement par ces petits cercles, à les

rectifier d'une façon moins arbitraire et à tenir un compte plus exact des probabilités.

On voit que toutes ces méthodes reviennent à construire les courbes des marches et des températures, et à chercher la relation qui les relie. En admettant que les hypothèses qu'on a posées soient fausses, l'inspection même de la figure permet de découvrir l'erreur; c'est là un avantage qu'on obtiendrait avec moins d'évidence par l'emploi des formules. Néanmoins, l'usage qu'on fait ensuite des tracés pour trouver les marches n'est que l'application d'une méthode de calcul; nous allons donc étudier plus attentivement les formules auxquelles se ramènent les courbes, d'autant qu'un certain nombre de calculateurs préfèrent recourir aux chiffres directement sans passer par une construction graphique. La construction d'une courbe ne suppose aucune opinion sur la nature de la fonction; il suffit d'en expliquer la disposition pour que la méthode soit comprise. Pour les formules, au contraire, il y a lieu d'examiner attentivement les termes qui les composent et d'en apprécier le plus ou moins d'opportunité.

87. — Méthode de Lieussou.

M. Lieussou a relevé les marches d'une centaine de chronomètres suivis aux Observatoires de Paris et de Greenwich pendant plus d'un an chacun. Partant de ces données expérimentales, il est arrivé, comme on l'a vu, à représenter les marches par la formule

$$m = m_0 + at + b(\Theta - \theta)^2$$

Le terme en t exprime l'accélération : Θ est une constante instrumentale. L'expérience a donc prouvé à M. Lieussou, contrairement à l'opinion de M. de Cornulier, que cette accélération est sensiblement constante pendant la période de plus d'une année qu'embrassent ses observations. Elle a aussi prouvé l'inexactitude de la loi de proportionnalité aux variations de température. M. Lieussou revient ainsi aux idées de Fleurieu et Borda : ceux-ci, « au lieu d'un coefficient constant, faisaient usage d'une Table d'équation appropriée aux différents degrés de l'échelle thermométrique. Ils ne pensaient pas que les variations de marche

fussent proportionnelles aux variations de la température. » (*Recherches Chronométriques,* p. 129-130).

La formule de Lieussou, établie comme résultat d'un grand nombre d'expériences, peut être considérée comme donnant bien la loi empirique des marches d'un chronomètre. Mais il convient d'avoir égard aux conditions dans lesquelles elle a été vérifiée par son auteur :

1° Les chronomètres observés sont restés en place aux observatoires : ils n'étaient pas soumis aux mouvements du navire.

2° La température du milieu ambiant variait graduellement d'une façon très régulière ; c'était la température naturelle de la salle de l'observatoire où les montres étaient suivies : et ses variations étaient assez continues pour que M. Lieussou ait pu essayer d'en donner une formule empirique très simple. Nous avons établi que lorsque les variations de température se produisent brusquement, comme cela arrive parfois dans le cours d'une traversée, il en résulte généralement une certaine perturbation dans les marches qui se traduit par une altération de la marche constante figurant dans la formule, et quelquefois du coefficient α d'accélération. Aussi les concours du Dépôt de la Marine, dans lesquels on transporte sans transition les chronomètres d'une température à une autre qui en diffère d'au moins 15° et quelquefois 20°, sont-ils très propres à faire apprécier le plus ou moins de sensibilité des montres à cette cause de variation, d'autant plus pernicieuse qu'on ne peut pas en prévoir les effets. Les montres deviennent moins sensibles avec le temps, mais l'effet n'est jamais entièrement nul.

3° Les chronomètres avaient des huiles dont l'âge ne dépassait guère dix-huit mois. Avec des huiles plus vieilles, M. Lieussou a reconnu qu'il peut y avoir lieu d'introduire un terme de la forme αt^2, ce qui revient à dire que le coefficient d'accélération dépend du temps et qu'il est de la forme $\alpha + \alpha t$.

4° Les chronomètres expérimentés étaient tous munis du balancier circulaire ordinaire associé au spiral en acier trempé, sans compensation additionnelle. La formule exprime donc la propriété bien connue de ce régulateur, de donner de l'avance aux températures intermédiaires entre celles pour lesquelles on a obtenu l'égalité de marche. Elle ne serait plus aussi généralement vraie si l'on avait affaire à une compensation supplémentaire.

La plupart des chronomètres de notre Marine ont des balanciers circulaires et des spiraux en acier, et l'expérience des concours prouve avec la plus entière évidence que la plupart retardent au chaud et au froid : par conséquent ils se prêteront à peu près tous à l'application de la formule Lieussou. Les inconnues, quand on a observé un certain nombre de marches à des températures diverses, sont m_0, a, b et Θ : cette dernière entre au second degré, car si le terme en $b\Theta^2$ disparaît par un mode d'élimination convenable, il n'en est pas de même du terme $2b\Theta\theta$ qui contient le produit des inconnues b et Θ. M. Lieussou a indiqué une méthode très élégante de détermination des coefficients pour le cas où les époques des quatre observations de marche sont en progression arithmétique : mais on aura rarement l'occasion de procéder ainsi en mer. Dans l'application de sa méthode aux chronomètres de la *Coquille,* M. Lieussou détermine d'abord le coefficient a à l'aide de deux marches isothermes; soient m_1, m_2 deux marches observées à la même température θ aux époques t_1 et t_2, on a

$$a = \frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1}.$$

A l'aide de ce coefficient on réduit toutes les marches à la même époque, et les résultats ne diffèrent plus entre eux que des effets dûs à la température. M. Yvon Villarceau a critiqué cette formule : il lui reproche de présenter les faits sous un faux jour quand la marche varie proportionnellement à la température. Dans ce cas, en effet, Θ devient infini. Cette hypothèse ne sera probablement jamais tout à fait vraie; mais, pour un chronomètre très imparfaitement compensé, Θ pourrait acquérir une valeur démesurée, ce qui serait incommode pour les calculs. Il vaut donc mieux, dans la pratique, développer la formule; en posant

$$m_0 + b\Theta^2 = m', \qquad -2b\Theta = b',$$

elle devient

$$m = m' + at + b'\theta + b\theta^2$$

et les nouveaux coefficients à déterminer sont m', a, b, b'.

Ayant observé les marches qui correspondent respectivement aux époques t_1, t_2, t_3, t_4 et aux températures θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, on aura

à résoudre le système des quatre équations

$$m_1 = m' + at_1 + b'\theta_1 + b\theta_1^2,$$
$$m_2 = m' + at_2 + b'\theta_2 + b\theta_2^2,$$
$$m_3 = m' + at_3 + b'\theta_3 + b\theta_3^2,$$
$$m_4 = m' + at_4 + b'\theta_4 + b\theta_4^2.$$

La solution générale est connue, mais la formule est longue. Si l'on a deux marches isothermes, on fera bien d'en déduire a avant de commencer les calculs. Si l'on n'a pas de marches rigoureusement isothermes, on peut, dans des limites qui ne dépassent pas 3° ou 4°, interpoler proportionnellement en employant un coefficient de température approché. On déduira ensuite des équations précédentes, en les retranchant deux à deux, les équations

$$m_1 - m_2 = a(t_1 - t_2) + b'(\theta_1 - \theta_2) + b(\theta_1^2 - \theta_2^2),$$
$$m_3 - m_4 = a(t_3 - t_4) + b'(\theta_3 - \theta_4) + b(\theta_3^2 - \theta_4^2),$$

qui ne contiennent plus que les inconnues b et b' lesquelles se trouvent ainsi déterminées fort simplement. Pour la facilité et l'exactitude des calculs, on combinera les équations de telle sorte que le dénominateur commun des inconnues soit le plus grand possible : ce dénominateur est

$$(\theta_1 - \theta_2)(\theta_3^2 - \theta_4^2) - (\theta_3 - \theta_4)(\theta_1^2 - \theta_2^2)$$
$$= (\theta_1 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_4)[(\theta_3 + \theta_4) - (\theta_1 + \theta_2)].$$

Il faut donc éviter que $\theta_1 + \theta_2$ ne soit égal à $\theta_3 + \theta_4$, ce que l'on obtiendra en groupant ensemble les deux températures les plus élevées et les deux températures les plus basses.

On voit par ce qui précède comment, selon les circonstances, on peut simplifier les calculs. En tout état de cause, on peut éliminer m par soustractions et réduire le nombre des inconnues et des équations à trois.

Une fois b et b' calculés, on aura facilement la température de réglage

$$\Theta = -\frac{b'}{2b}.$$

On devra déterminer cette constante, qui paraît le mieux caractériser le chronomètre, et qui donne la meilleure idée de son allure aux diverses températures. D'après les expériences faites, c'est la donnée sur la constance de laquelle on peut le plus sûrement compter.

Lorsqu'on a déterminé les coefficients de la formule, on vérifie, par comparaison avec les observations, le degré d'exactitude de ces nombres. Des marches obtenues ultérieurement pourront conduire à modifier légèrement les résultats primitifs : c'est surtout dans des retouches de cette espèce qu'on peut procéder par approximations successives. On arrivera par là à tenir sa formule pour ainsi dire constamment à jour.

88. — Méthode de M. Yvon Villarceau. Application du théorème de Taylor.

Nous avons eu à diverses reprises occasion de parler des travaux de M. Yvon Villarceau sur les chronomètres. Ce savant pensait qu'en suivant ses indications on pourrait faire des chronomètres exactement compensés : mais en prévision de l'usage d'instruments moins parfaits, il a donné à la fin de son Mémoire une formule pour exprimer la marche d'une montre mal compensée. Admettant que cette marche est une fonction continue de la température et du temps seuls, il la développe par la série de Taylor, en bornant ce développement aux première et deuxième puissances des variables.

On arrive ainsi à l'expression suivante :

$$m' = m + \frac{dm}{dt}(t' - t) + \frac{dm}{d\theta}(\theta' - \theta) + \frac{d^2m}{dt^2}\frac{(t' - t)^2}{2}$$
$$+ \frac{d^2m}{dt\,d\theta}(t' - t)(\theta' - \theta) + \frac{d^2m}{d\theta^2}\frac{(\theta' - \theta)^2}{2} + \dots$$

Les dérivées $\frac{dm}{dt}, \dots, \frac{d^2m}{d\theta^2}$ sont les constantes du chronomètre. Il est facile de voir que cette formule revient à celle de M. Lieussou développée, avec addition du terme en $t\theta$ proposé par M. Pagel, et avec cette différence que les arbitraires t et θ sont nulles dans la

formule de M. Lieussou. La convenance d'attribuer à ces quantités des valeurs différentes de zéro peut résulter de ce que, pour éviter d'opérer sur des nombres trop grands, on choisirait pour origines des temps et des températures des valeurs moyennes, s'il se peut, entre celles qui figureront dans les calculs.

La formule revient en définitive à celle-ci

$$m = m' + at + a't^2 + b'\theta + b\theta^2 + ct\theta,$$

et, sous cette forme, on voit qu'il y a six constantes à déterminer. Si le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, on y appliquera les méthodes de résolution qui seront exposées plus tard. M. de Magnac a calculé, d'après les indications de M. Yvon Villarceau, les constantes d'un certain nombre de chronomètres en se servant de la méthode d'interpolation de Cauchy.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLES.

Nous donnons ici quelques Tables auxiliaires. En les joignant à celles des logarithmes ordinaires et des logarithmes d'addition, on aura tout ce qu'il faut pour résoudre les problèmes que nous traitons. Elles se rapportent plus spécialement à l'usage du deuxième Volume : il a paru pourtant préférable de les en séparer en leur donnant une pagination spéciale. On pourra de la sorte, ou les relier avec celui des Volumes auquel on préfère les adjoindre, ou les détacher de l'Ouvrage, soit pour les avoir à part, soit pour les réunir à la Table des logarithmes. Elles n'ont pas besoin d'explications autres que celles que l'on trouvera dans le corps de l'Ouvrage.

Nous les avons réduites au nombre de décimales utile, et nous avons augmenté de 10 tous les logarithmes des nombres inférieurs à l'unité, afin d'éviter l'emploi des caractéristiques négatives : c'est ce qui est fait au début des Tables III et IV, et pour les logarithmes de R, de $\frac{1}{\rho \sin 1''}$ et de $\frac{1}{\rho' \sin 1''}$ dans la Table V.

Les Tables I (Dépression de l'horizon) et V (Données relatives au sphéroïde) pour $\alpha = \frac{1}{292}$, sont nouvelles : les Tables III et IV sont empruntées à l'*Astronomie* de Brunnow en les complétant et les vérifiant, ce qui a permis de corriger quelques petites erreurs de l'original.

TABLE I.

Dépression apparente de l'horizon.

HAUTEUR DE L'ŒIL.	DÉPRESSION.	DIFFÉRENCE.	HAUTEUR DE L'ŒIL.	DÉPRESSION.	DIFFÉRENCE.
0m	0′ 0″		30m	10′ 4″	
		80″			10″
0,5	1 20		31	10 14	
		30			9
1,0	1 50		32	10 23	
		24			10
1,5	2 14		33	10 33	
		22			10
2,0	2 36		34	10 43	
		19			9
2,5	2 55		35	10 52	
		16			
3,0	3 11				9
		15			
3,5	3 26		36	11 1	
		14			9
4,0	3 40		37	11 10	
		14			9
4,5	3 54		38	11 19	
		13			9
5,0	4 7		39	11 28	
		23			9
			40	11 37	
6m	4′ 30″				9
		22			
7	4 52		41	11 46	
		20			9
8	5 12		42	11 55	
		19			8
9	5 31		43	12 3	
		18			8
10	5 49		44	12 11	
		17			8
11	6 6		45	12 20	
		16			9
12	6 22				
		16	46	12 28	
13	6 38				8
		15	47	12 36	
14	6 53				8
		14	48	12 44	
15	7 7				8
		14	49	12 52	
16	7 21				8
		14	50	13 0	
17	7 35				
		13			38
18	7 48				
		13	55m	13′ 38″	
19	8 1				36
		12	60	14 14	
20	8 13				35
		12	65	14 49	
21	8 25				34
		12	70	15 23	
22	8 37				32
		12	75	15 55	
23	8 49				31
		11	80	16 26	
24	9 0				31
		11	85	16 57	
25	9 11				29
		11	90	17 26	
26	9 22				29
		10	95	17 55	
27	9 32				28
		11	100	18 23	
28	9 43				
		10			
29	9 53				
		9			
30	10 4				

TABLE II.

Limites des circcommériidiennes.

I. — ANGLES HORAIRES POUR LESQUELS LE DEUXIÈME TERME $a^2 \cot(\delta - \lambda) \frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$ DE LA RÉDUCTION AU MÉRIDIEN ATTEINT UNE SECONDE D'ARC.

λ \ δ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
20°	20	0	12	18	22	26	29	33	39	48								160°
30	28	12	0	9	13	17	20	24	27	32	40							150
40	33	18	9	0	7	11	14	17	21	24	29	37						140
50	38	22	13	7	0	6	10	13	16	19	23	28	36					130
60	43	26	17	11	6	0	5	9	12	15	18	22	28	37				120
70	48	29	20	14	10	5	0	5	8	12	15	18	23	29	40			110
80	54	33	24	17	13	9	5	0	5	8	12	15	19	24	32	48		100
90	67	39	27	21	16	12	8	5	0	5	8	12	16	21	27	39	67	90
	170°	160°	150°	140°	130°	120°	110°	100°	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	λ

δ

II. — ANGLES HORAIRES POUR LESQUELS LE TROISIÈME TERME (NÉGLIGÉ) DE LA RÉDUCTION AU MÉRIDIEN ATTEINT 1″ D'ARC.

λ \ δ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170	
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
20°	45	0	27	42	54	64	73	82	90	96								160°
30	67	27	0	19	32	42	51	59	67	75	82							150
40	82	42	19	0	16	26	35	43	51	59	67	75						140
50	95	54	32	16	0	14	23	32	40	47	56	64	73					130
60	107	64	42	26	14	0	12	21	29	37	46	55	64	75				120
70	118	73	51	35	23	12	0	11	20	28	37	46	56	67	82			110
80	128	82	59	43	32	21	11	0	11	20	28	37	47	59	75	96		100
90	135	90	67	51	40	29	20	11	0	11	20	29	40	51	67	90	135	90
	170°	160°	150°	140°	13 0	120°	110°	100°	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	λ

δ

Logarithmes de $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$.

P	0m	1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m
0°	— ∞	0,2930	0,8951	1,2473	1,4971	1,6910	1,8493	1,9832
1	6,7367	3074	9023	2521	5008	6939	8517	9853
2	7,3388	3215	9094	2569	5044	6967	8541	9873
3	7,6910	3354	9165	2616	5079	6996	8565	9894
4	7,9408	3491	9236	2664	5115	7025	8589	9914
5	8,1347	0,3625	0,9306	1,2711	1,5151	1,7053	1,8613	1,9935
6	8,2930	3758	9375	2758	5186	7081	8637	9955
7	8,4269	3889	9443	2804	5221	7110	8660	9976
8	8,5429	4017	9511	2850	5256	7138	8684	1,9996
9	8,6452	4144	9579	2896	5291	7166	8707	2,0016
10	8,7367	0,4269	0,9646	1,2942	1,5326	1,7194	1,8731	2,0036
11	8,8195	4392	9713	2988	5361	7222	8754	0056
12	8,8951	4514	9779	3033	5395	7250	8778	0077
13	8,9646	4634	9844	3078	5430	7278	8801	0097
14	9,0290	4752	9909	3123	5464	7306	8824	0117
15	9,0889	0,4868	0,9974	1,3168	1,5498	1,7333	1,8848	2,0137
16	9,1450	4983	1,0038	3212	5532	7361	8871	0157
17	9,1976	5097	0102	3257	5566	7388	8894	0177
18	9,2472	5209	0165	3301	5600	7416	8917	0196
19	9,2942	5320	0228	3344	5633	7443	8940	0216
20	9,3388	0,5429	1,0290	1,3388	1,5667	1,7470	1,8963	2,0236
21	9,3812	5537	0352	3431	5700	7497	8986	0256
22	9,4216	5644	0413	3474	5733	7524	9008	0275
23	9,4602	5749	0474	3517	5766	7551	9031	0295
24	9,4972	5853	0535	3560	5799	7578	9054	0315
25	9,5326	0,5956	1,0595	1,3602	1,5832	1,7605	1,9076	2,0334
26	9,5667	6057	0654	3645	5865	7631	9099	0354
27	9,5994	6158	0714	3687	5897	7658	9121	0373
28	9,6310	6257	0772	3729	5930	7685	9144	0392
29	9,6616	6355	0831	3770	5962	7711	9166	0412
30	9,6910	0,6452	1,0889	1,3812	1,5995	1,7737	1,9188	2,0431
31	9,7194	6548	0947	3853	6027	7764	9211	0450
32	9,7470	6643	1004	3894	6059	7790	9233	0470
33	9,7738	6737	1061	3935	6090	7816	9255	0489
34	9,7997	6830	1118	3976	6122	7842	9277	0508
35	9,8249	0,6922	1,1174	1,4016	1,6154	1,7868	1,9299	2,0527
36	9,8493	7013	1230	4056	6185	7894	9321	0546
37	9,8731	7103	1285	4096	6217	7920	9343	0565
38	9,8963	7192	1340	4136	6248	7945	9365	0584
39	9,9189	7280	1395	4176	6279	7971	9386	0603
40	9,9408	0,7367	1,1450	1,4216	1,6310	1,7997	1,9408	2,0622
41	9,9623	7454	1504	4255	6341	8022	9430	0641
42	9,9832	7539	1558	4294	6372	8048	9451	0660
43	0,0037	7624	1611	4333	6403	8073	9473	0679
44	0,0237	7708	1664	4372	6434	8098	9495	0697
45	0,0432	0,7791	1,1717	1,4411	1,6464	1,8123	1,9516	2,0716
46	0,0622	7873	1769	4449	6495	8149	9537	0735
47	0,0809	7955	1822	4488	6525	8174	9559	0753
48	0,0992	8036	1873	4526	6555	8199	9580	0772
49	0,1171	8116	1925	4564	6585	8224	9601	0790
50	0,1347	0,8195	1,1976	1,4602	1,6615	1,8248	1,9623	2,0809
51	0,1519	8274	2027	4640	6645	8273	9644	0827
52	0,1688	8352	2078	4677	6675	8298	9665	0846
53	0,1853	8429	2128	4714	6705	8322	9686	0864
54	0,2015	8505	2178	4752	6734	8347	9707	0882
55	0,2174	0,8581	1,2228	1,4789	1,6764	1,8372	1,9728	2,0901
56	0,2331	8656	2277	4826	6793	8396	9749	0919
57	0,2485	8731	2327	4862	6822	8420	9770	0937
58	0,2636	8805	2376	4899	6852	8445	9790	0955
59	0,2784	8878	2424	4935	6881	8469	9811	0973

TABLE III. — Circonméridiennes (*Suite*).

Logarithmes de $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$.

P	8m	9m	10m	11m	12m	13m	14m	15m
0s	2,0992	2,2015	2,2930	2,3757	2,4513	2,5208	2,5852	2,6451
1	1010	2031	2944	3770	4525	5219	5862	6460
2	1029	2047	2959	3784	4537	5230	5872	6470
3	1048	2063	2973	3797	4549	5241	5882	6479
4	1064	2079	2987	3810	4561	5252	5893	6489
5	2,1082	2,2095	2,3002	2,3823	2,4573	2,5264	2,5903	2,6499
6	1100	2111	3016	3836	4585	5275	5913	6508
7	1117	2126	3030	3849	4597	5286	5924	6518
8	1135	2142	3045	3862	4609	5297	5934	6527
9	1153	2158	3059	3875	4621	5308	5944	6537
10	2,1171	2,2174	2,3073	2,3888	2,4633	2,5319	2,5954	2,6547
11	1188	2190	3087	3901	4645	5330	5964	6556
12	1206	2205	3101	3914	4657	5341	5975	6566
13	1224	2221	3116	3927	4668	5352	5985	6575
14	1241	2237	3130	3940	4680	5363	5995	6585
15	2,1259	2,2253	2,3144	2,3953	2,4692	2,5373	2,6005	2,6594
16	1276	2268	3158	3965	4704	5384	6015	6604
17	1294	2284	3172	3978	4716	5395	6026	6613
18	1311	2299	3186	3991	4727	5406	6036	6623
19	1329	2315	3200	4004	4739	5417	6046	6632
20	2,1346	2,2330	2,3214	2,4017	2,4751	2,5428	2,6056	2,6641
21	1363	2346	3228	4029	4763	5439	6066	6651
22	1381	2361	3242	4042	4774	5450	6076	6660
23	1398	2377	3256	4055	4786	5460	6086	6670
24	1415	2392	3270	4068	4798	5471	6096	6679
25	2,1433	2,2408	2,3284	2,4080	2,4809	2,5482	2,6106	2,6689
26	1450	2423	3298	4093	4821	5493	6116	6698
27	1467	2438	3312	4105	4833	5504	6126	6707
28	1484	2454	3326	4118	4844	5514	6136	6717
29	1501	2469	3340	4131	4856	5525	6146	6726
30	2,1518	2,2484	2,3353	2,4144	2,4867	2,5536	2,6156	2,6735
31	1535	2499	3367	4156	4879	5547	6166	6745
32	1552	2515	3381	4169	4891	5557	6176	6754
33	1569	2530	3395	4181	4902	5568	6186	6763
34	1586	2545	3408	4194	4914	5579	6196	6773
35	2,1603	2,2560	2,3422	2,4206	2,4925	2,5589	2,6206	2,6782
36	1620	2575	3436	4219	4937	5600	6216	6791
37	1637	2590	3449	4231	4948	5610	6226	6800
38	1653	2605	3463	4243	4960	5621	6236	6810
39	1670	2620	3477	4256	4971	5632	6246	6819
40	2,1687	2,2635	2,3490	2,4268	2,4982	2,5642	2,6255	2,6828
41	1704	2650	3504	4281	4994	5653	6265	6837
42	1720	2665	3517	4293	5005	5664	6275	6847
43	1737	2680	3531	4305	5017	5674	6285	6856
44	1753	2695	3544	4318	5028	5685	6295	6865
45	2,1770	2,2710	2,3558	2,4330	2,5039	2,5695	2,6305	2,6874
46	1787	2725	3571	4342	5051	5706	6315	6883
47	1803	2739	3585	4355	5062	5716	6324	6893
48	1819	2754	3598	4367	5073	5727	6334	6902
49	1836	2769	3611	4379	5085	5737	6344	6911
50	2,1852	2,2784	2,3625	2,4391	2,5096	2,5748	2,6354	2,6920
51	1869	2798	3638	4404	5107	5758	6363	6929
52	1885	2813	3651	4416	5119	5768	6373	6938
53	1901	2828	3665	4428	5130	5779	6383	6947
54	1918	2842	3678	4440	5141	5789	6392	6957
55	2,1934	2,2857	2,3691	2,4452	2,5152	2,5800	2,6402	2,6966
56	1950	2871	3705	4465	5163	5810	6412	6975
57	1966	2886	3718	4477	5175	5820	6422	6984
58	1982	2901	3731	4489	5186	5831	6431	6993
59	1999	2915	3744	4501	5197	5841	6441	7002

Logarithmes de $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$.

P	16m	17m	18m	19m	20m	21m	22m
0°	2,70169	2,75373	2,80336	2,85029	2,89481	2,93717	2,97755
1	70200	75458	80416	85105	89554	93786	97820
2	70291	75543	80496	85181	89626	93855	97886
3	70381	75628	80576	85257	89698	93923	97952
4	70471	75713	80656	85333	89770	93992	98017
5	2,70561	2,75798	2,80736	2,85409	2,89842	2,94061	2,98083
6	70651	75883	80816	85483	89914	94129	98148
7	70741	75967	80896	85561	89986	94198	98214
8	70830	76052	80976	85636	90058	94266	98279
9	70920	76136	81056	85712	90130	94335	98344
10	2,71010	2,76220	2,81135	2,85787	2,90202	2,94403	2,98410
11	71099	76304	81215	85863	90274	94471	98475
12	71188	76388	81295	85938	90346	94540	98540
13	71278	76472	81375	86014	90417	94608	98605
14	71367	76556	81454	86089	90489	94676	98670
15	2,71456	2,76640	2,81533	2,86164	2,90560	2,94744	2,98735
16	71545	76724	81612	86239	90632	94812	98800
17	71634	76808	81691	86314	90703	94880	98865
18	71723	76892	81770	86389	90774	94948	98930
19	71811	76976	81849	86464	90845	95016	98995
20	2,71900	2,77059	2,81928	2,86539	2,90917	2,95084	2,99060
21	71989	77143	82007	86614	90988	95152	99125
22	72077	77226	82086	86689	91058	95219	99189
23	72165	77309	82165	86763	91129	95287	99254
24	72254	77392	82244	86838	91200	95355	99319
25	2,72342	2,77476	2,82322	2,86912	2,91271	2,95422	2,99383
26	72430	77559	82401	86987	91342	95490	99448
27	72518	77642	82479	87061	91413	95557	99512
28	72606	77724	82558	87136	91484	95625	99576
29	72694	77807	82636	87210	91555	95692	99641
30	2,72781	2,77890	2,82714	2,87284	2,91625	2,95759	2,99705
31	72869	77973	82792	87358	91695	95827	99769
32	72957	78056	82870	87432	91766	95894	99834
33	73044	78138	82948	87506	91837	95961	99898
34	73132	78220	83026	87580	91907	96028	2,99962
35	2,73219	2,78302	2,83104	2,87654	2,91977	2,96095	3,00026
36	73306	78385	83182	87728	92048	96162	00090
37	73393	78467	83260	87802	92118	96229	00154
38	73480	78549	83337	87876	92188	96296	00218
39	73567	78631	83414	87949	92258	96362	00282
40	2,73654	2,78713	2,83492	2,88023	2,92328	2,96429	3,00346
41	73741	78795	83570	88096	92398	96496	00409
42	73827	78877	83648	88170	92468	96563	00473
43	73914	78958	83725	88243	92538	96630	00537
44	74001	79040	83802	88317	92608	96696	00600
45	2,74087	2,79121	2,83879	2,88390	2,92677	2,96763	3,00664
46	74173	79203	83957	88463	92747	96829	00728
47	74259	79284	84034	88536	92817	96896	00791
48	74346	79366	84111	88610	92886	96962	00855
49	74432	79447	84188	88683	92956	97028	00918
50	2,74518	2,79528	2,84264	2,88756	2,93026	2,97095	3,00981
51	74604	79609	84341	88828	93095	97161	01045
52	74690	79690	84418	88901	93164	97227	01108
53	74775	79771	84495	88974	93233	97293	01171
54	74861	79852	84571	89047	93303	97359	01234
55	2,74947	2,79933	2,84648	2,89119	2,93372	2,97425	3,01298
56	75032	80014	84724	89192	93441	97491	01361
57	75118	80094	84801	89265	93510	97557	01424
58	75203	80175	84877	89337	93579	97623	01487
59	75288	80255	84953	89409	93648	97689	01550

TABLE III. — Circonméridiennes (*Suite*).

Logarithmes de $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$.

P	23m	24m	25m	26m	27m	28m	29m
0s	3,01613	3,05306	3,08848	3,12252	3,15526	3,18681	3,21725
1	01675	05366	08906	12307	15580	18733	21775
2	01738	05426	08964	12363	15633	18784	21825
3	01801	05487	09022	12418	15686	18836	21875
4	01864	05547	09079	12474	15740	18887	21924
5	3,01926	3,05607	3,09137	3,12529	3,15793	3,18939	3,21974
6	01989	05667	09195	12585	15847	18990	22024
7	02052	05727	09252	12640	15900	19042	22073
8	02114	05787	09310	12695	15953	19093	22123
9	02177	05847	09367	12751	16007	19145	22172
10	3,02239	3,05907	3,09425	3,12806	3,16060	3,19196	3,22222
11	02302	05966	09482	12861	16113	19247	22272
12	02364	06026	09540	12916	16166	19299	22321
13	02426	06086	09597	12971	16220	19350	22371
14	02489	06146	09655	13026	16273	19401	22420
15	3,02551	3,06205	3,09712	3,13081	3,16326	3,19452	3,22470
16	02613	06265	09769	13136	16379	19503	22519
17	02675	06324	09826	13191	16432	19554	22568
18	02737	06384	09883	13246	16485	19606	22618
19	02799	06444	09941	13301	16538	19657	22667
20	3,02861	3,06503	3,09998	3,13356	3,16591	3,19708	3,22716
21	02923	06562	10055	13411	16643	19759	22766
22	02985	06622	10112	13466	16696	19810	22815
23	03047	06681	10169	13521	16749	19861	22864
24	03109	06740	10226	13576	16802	19912	22913
25	3,03171	3,06800	3,10283	3,13631	3,16855	3,19962	3,22963
26	03232	06859	10340	13686	16907	20013	23012
27	03294	06918	10396	13740	16960	20064	23061
28	03356	06977	10453	13795	17013	20115	23110
29	03417	07036	10510	13850	17066	20166	23159
30	3,03479	3,07095	3,10567	3,13904	3,17118	3,20216	3,23208
31	03540	07154	10623	13959	17170	20267	23257
32	03602	07213	10680	14013	17223	20318	23306
33	03663	07272	10737	14068	17275	20369	23355
34	03725	07331	10793	14122	17327	20419	23404
35	3,03787	3,07389	3,10850	3,14177	3,17380	3,20470	3,23453
36	03848	07448	10906	14231	17433	20520	23501
37	03909	07507	10963	14285	17485	20571	23550
38	03970	07556	11019	14340	17538	20621	23599
39	04031	07625	11076	14394	17590	20672	23648
40	3,04092	3,07683	3,11132	3,14448	3,17642	3,20722	3,23697
41	04153	07742	11188	14502	17694	20772	23745
42	04214	07801	11245	14557	17746	20822	23794
43	04275	07859	11301	14611	17799	20873	23843
44	04336	07918	11357	14665	17851	20924	23891
45	3,04397	3,07976	3,11413	3,14719	3,17903	3,20974	3,23940
46	04458	08035	11469	14773	17955	21024	23988
47	04519	08093	11525	14827	18007	21075	24037
48	04580	08151	11582	14881	18059	21125	24086
49	04641	08210	11638	14935	18111	21175	24134
50	3,04701	3,08268	3,11694	3,14989	3,18163	3,21225	3,24182
51	04762	08326	11750	15043	18215	21275	24231
52	04823	08384	11805	15096	18267	21325	24279
53	04883	08442	11861	15150	18319	21375	24328
54	04944	08501	11917	15204	18371	21425	24376
55	3,05004	3,08559	3,11973	3,15258	3,18422	3,21475	3,24424
56	05065	08617	12029	15312	18474	21525	24473
57	05125	08675	12085	15365	18526	21575	24521
58	05185	08733	12140	15419	18578	21625	24569
59	05246	08791	12196	15472	18629	21675	24617

TABLE IV. — Circonméridiennes.

LOGARITHMES DE $\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$.

P	$\log\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$	P	$\log\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$	P	$\log\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$	P	$\log\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$
0m 0s	— ∞	8m 0s	8,5829	16m 0s	9,7867	24m 0s	0,4907
10	1,8580	10	8,6187	10	9,8047	10	0,5027
20	3,0621	20	8,6538	20	9,8225	20	0,5146
30	3,7665	30	8,6882	30	9,8402	30	0,5264
40	4,2662	40	8,7219	40	9,8576	40	0,5382
50	4,6539	50	8,7550	50	9,8749	50	0,5499
1 0	4,9706	9 0	8,7875	17 0	9,8920	25 0	0,5615
10	5,2384	10	8,8193	10	9,9089	10	0,5730
20	5,4704	20	8,8506	20	9,9257	20	0,5845
30	5,6750	30	8,8814	30	9,9423	30	0,5959
40	5,8580	40	8,9116	40	9,9588	40	0,6072
50	6,0236	50	8,9413	50	9,9751	50	0,6184
2 0	6,1747	10 0	8,9705	18 0	9,9912	26 0	0,6296
10	6,3138	10	8,9992	10	0,0072	10	0,6407
20	6,4425	20	9,0274	20	0,0231	20	0,6517
30	6,5624	30	9,0552	30	0,0388	30	0,6626
40	6,6745	40	9,0826	40	0,0544	40	0,6735
50	6,7798	50	9,1095	50	0,0698	50	0,6843
3 0	6,8791	11 0	9,1360	19 0	0,0851	27 0	0,6951
10	6,9730	10	9,1621	10	0,1003	10	0,7057
20	7,0621	20	9,1879	20	0,1153	20	0,7163
30	7,1469	30	9,2132	30	0,1302	30	0,7269
40	7,2277	40	9,2382	40	0,1450	40	0,7374
50	7,3049	50	9,2628	50	0,1597	50	0,7478
4 0	7,3788	12 0	9,2871	20 0	0,1742	28 0	0,7582
10	7,4497	10	9,3111	10	0,1886	10	0,7685
20	7,5179	20	9,3347	20	0,2029	20	0,7787
30	7,5834	30	9,3580	30	0,2170	30	0,7889
40	7,6466	40	9,3810	40	0,2311	40	0,7990
50	7,7076	50	9,4037	50	0,2450	50	0,8090
5 0	7,7665	13 0	9,4262	21 0	0,2589	29 0	0,8190
10	7,8234	10	9,4483	10	0,2726	10	0,8290
20	7,8786	20	9,4701	20	0,2862	20	0,8389
30	7,9320	30	9,4917	30	0,2997	30	0,8487
40	7,9839	40	9,5130	40	0,3131	40	0,8585
50	8,0342	50	9,5341	50	0,3264	50	0,8682
6 0	8,0832	14 0	9,5549	22 0	0,3396	30 0	0,8779
10	8,1308	10	9,5754	10	0,3527		
20	8,1771	20	9,5957	20	0,3657		
30	8,2222	30	9,6158	30	0,3786		
40	8,2662	40	9,6356	40	0,3915		
50	8,3091	50	9,6553	50	0,4042		
7 0	8,3509	15 0	9,6747	23 0	0,4168		
10	8,3918	10	9,6939	10	0,4293		
20	8,4317	20	9,7128	20	0,4418		
30	8,4708	30	9,7316	30	0,4541		
40	8,5089	40	9,7502	40	0,4664		
50	8,5463	50	9,7686	50	0,4786		

Jusqu'à 18m, les caractéristiques sont trop fortes de 10.

TABLE V. — Données relatives au sphéroïde.

APLATISSEMENT $= \frac{1}{292}$.

LATITUDE.	RAYON vecteur. log R.	CORRECTION de la colatitude. $\lambda' - \lambda$	PERPENDICULAIRE		MÉRIDIEN		$\log (1 + e^2 \sin^2 \lambda)$	λ	
			$\log \rho'$.	$\log \frac{1}{\rho' \sin 1''}$	$\log \rho$.	$\log \frac{1}{\rho \sin 1''}$			
0	0,00000	0′ 0″,0	6,80471	8,50971	6,80173	8,51269	0,00296	90°	90°
5	9,99999	2 2 ,4	6,80472	8,50970	6,80177	8,51266	0,00294	95	85
10	9,99995	4 1 ,4	6,80476	8,50967	6,80187	8,51256	0,00287	100	80
11	9,99995	4 24 ,3	6,80477	8,50965	6,80189	8,51253	0,00285	101	79
12	994	4 47 ,0	478	964	192	250	283	102	78
13	992	5 9 ,2	479	963	196	247	281	103	77
14	991	5 31 ,1	480	962	199	243	279	104	76
15	990	5 52 ,8	481	961	203	240	276	105	75
16	9,99989	6 13 ,9	6,80482	8,50960	6,80207	8,51235	0,00274	106	74
17	987	6 34 ,6	484	958	211	231	271	107	73
18	986	6 45 ,0	485	957	216	227	268	108	72
19	984	7 14 ,6	487	955	220	222	265	109	71
20	983	7 33 ,7	489	954	225	217	261	110	70
21	9,99981	7 52 ,3	6,80490	8,50953	6,80230	8,51212	0,00258	111	69
22	979	8 10 ,4	492	951	236	207	255	112	68
23	977	8 27 ,7	494	949	241	201	251	113	67
24	976	8 44 ,5	496	947	247	196	247	114	66
25	974	9 0 ,8	498	945	253	190	243	115	65
26	9,99972	9 16 ,4	6,80500	8,50943	6,80259	8,51184	0,00239	116	64
27	970	9 31 ,3	502	940	265	177	235	117	63
28	967	9 45 ,5	504	938	271	171	231	118	62
29	965	9 59 ,0	506	936	278	165	227	119	61
30	963	10 11 ,8	508	934	285	158	222	120	60
31	9,99961	10 24 ,0	6,80511	8,50931	6,80291	8,51151	0,00218	121	59
32	958	10 35 ,2	513	929	298	144	213	122	58
33	956	10 45 ,5	515	927	305	137	208	123	57
34	954	10 55 ,2	518	924	313	130	204	124	56
35	951	11 4 ,4	520	922	320	123	199	125	55
36	9,99949	11 12 ,6	6,80522	8,50920	6,80327	8,51115	0,00194	126	54
37	946	11 19 ,8	525	917	335	108	189	127	53
38	944	11 26 ,2	527	915	342	100	184	128	52
39	941	11 31 ,7	530	912	350	093	179	129	51
40	939	11 36 ,7	533	910	357	085	174	130	50
41	9,99936	11 40 ,6	6,80535	8,50907	6,80365	8,51077	0,00169	131	49
42	934	11 43 ,6	538	904	373	070	164	132	48
43	931	11 45 ,8	540	902	381	062	159	133	47
44	928	11 47 ,1	543	900	388	054	153	134	46
45	9,99926	11 47 ,6	6,80546	8,50897	6,80396	8,51046	0,00148	135	45

TABLE V. — Données relatives au sphéroïde (*Suite*).

APLATISSEMENT $= \frac{1}{292}$.

LATITUDE.	RAYON vecteur. log R.	CORRECTION de la colatitude. $\lambda' - \lambda$	PERPENDICULAIRE		MÉRIDIEN		$\log(1+e^2\sin^2\lambda)$	λ	
			$\log\rho'$.	$\log\frac{1}{\rho''\sin 1''}$	$\log\rho$.	$\log\frac{1}{\rho\sin 1''}$			
45°	9,99926	11′ 47″,6	6,80546	8,50897	6,80396	8,51046	0,00148	135°	45°
46	9,99923	11 47 ,3	6,80548	8,50894	6,80404	8,51039	0,00143	136	44
47	921	11 46 ,1	551	892	412	031	138	137	43
48	918	11 44 ,0	553	889	420	023	133	138	42
49	916	11 41 ,0	556	887	427	015	128	139	41
50	913	11 37 ,2	558	884	435	008	123	140	40
51	9,99910	11 32 ,6	6,80561	8,50882	6,80443	8,51000	0,00117	141	39
52	908	11 27 ,2	563	879	450	8,50992	112	142	38
53	905	11 20 ,9	566	876	458	985	107	143	37
54	903	11 13 ,7	569	874	465	977	102	144	36
55	900	11 5 ,8	571	872	473	970	098	145	35
56	9,99898	10 57 ,0	6,80573	8,50869	6,80480	8,50962	0,00093	146	34
57	896	10 47 ,2	576	867	487	955	88	147	33
58	893	10 36 ,9	578	864	494	948	83	148	32
59	891	10 25 ,9	580	862	501	941	79	149	31
60	889	10 13 ,9	583	860	508	934	74	150	30
61	9,99886	10 1 ,3	6,80585	8,50858	6,80515	8,50928	0,00070	151	29
62	884	9 48 ,0	587	856	521	921	65	152	28
63	882	9 33 ,8	589	853	528	915	61	153	27
64	880	9 18 ,9	591	851	534	909	57	154	26
65	878	9 3 ,7	593	849	540	902	53	155	25
66	9,99876	8 47 ,6	6,80595	8,50847	6,80546	8,50897	0,00049	156	24
67	874	8 30 ,4	597	845	552	891	45	157	23
68	872	8 12 ,7	599	843	557	885	42	158	22
69	870	7 54 ,6	601	842	563	880	38	159	21
70	869	7 36 ,1	602	840	568	875	35	160	20
71	9,99867	7 16 ,8	6,80604	8,50838	6,80573	8,50870	0,00031	161	19
72	865	6 57 ,2	606	836	577	865	28	162	18
73	864	6 36 ,9	607	835	582	861	25	163	17
74	862	6 16 ,1	609	833	586	856	23	164	16
75	861	5 54 ,8	610	832	590	852	20	165	15
80	9,99856	4 3 ,0	6,80616	8,50827	6,80607	8,50836	0,00009	170	10
85	9,99852	2 3 ,3	6,80619	8,50824	6,80617	8,50826	0,00002	175	5
90	9,99851	0 0 ,0	6,80620	8,50822	6,80620	8,50822	0,00000	180	0

FIN DES TABLES.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

COURS

D'ASTRONOMIE PRATIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

55, quai des Grands-Augustins.

COURS

D'ASTRONOMIE PRATIQUE

APPLICATION
A LA GÉOGRAPHIE ET A LA NAVIGATION

PAR

E. CASPARI,

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE.

DEUXIÈME PARTIE

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS GÉOGRAPHIQUES. — APPLICATIONS PRATIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES

DE LA DEUXIÈME PARTIE.

LIVRE III.

Détermination des éléments géographiques.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DE LA COLATITUDE.

Pages.

89. Culminations 3
90. Colatitude par le cercle méridien 4
91. Colatitude par la culmination 10
92. *Circumméridiennes* 12
93. Formule de Delambre 15
94. Astres dont la distance polaire est variable 18
95. Limites des observations de circumméridiennes 20
96. Circumméridiennes en fonction de l'azimut 21
97. *Colatitude par l'observation de la Polaire. Cas général* 23
98. Colatitude par les observations des passages supérieur et inférieur d'une même circompolaire 27
99. *Colatitude par le passage au premier vertical* 27
100. *Colatitude par les digressions des circompolaires* 33
101. Réduction à l'azimut de la digression 36
102. *Méthode Talcott ou Horrebow* 39
103. Colatitude par le temps que le Soleil met à disparaître à l'horizon 40
104. Colatitude par le temps que le Soleil met à passer par un vertical. ... 43

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION DE L'HEURE

105. Passages méridiens 49
106. *Hauteurs correspondantes ou égales* 50
107. Hauteurs égales de deux étoiles 54

Pages.
108. *Distances zénithales simples.* Discussion des circonstances favorables. 57
109. Distances zénithales doubles. 62
110. *Heure par les distances zénithales circomméridiennes.* Méthode de Littrow. 65
111. Heure par les circomméridiennes. Méthode indirecte. 75
112. Angle horaire par des observations d'azimut. 80

CHAPITRE VIII.

DÉTERMINATION DE L'AZIMUT.

113. Généralités. Azimut par la lunette méridienne. 81
114. Azimut par les hauteurs correspondantes. 83
115. Azimut par l'angle horaire. 85
116. Azimut par la distance zénithale. 90
117. Formules approchées pour les petites hauteurs et les basses latitudes. 95
118. Amplitudes ortive et occase. 96
119. Azimut par les digressions. 96
120. Azimut par la Polaire. 97
121. Azimut des points terrestres. 98
122. Discussion des observations d'azimut. 99

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION DE LA LONGITUDE GÉOGRAPHIQUE.

123. Généralités. 102
124. *Phénomènes instantanés.* Signaux optiques. 103
125. Éclipses. 105
126. Télégraphe électrique. 106
127. *Longitude par les chronomètres.* Préliminaires. 111
128. Comparaisons. 115
129. Détermination des états et des marches. 118
130. Préparation des calculs de longitude. 120
131. Calcul des longitudes. 123
132. Remarques sur les méthodes chronométriques. 133
133. Règles pratiques. 137
134. *Longitude par les observations de Lune.* 139
135. Culminations lunaires. 139
136. Distances lunaires. 148
137. Hauteurs de la Lune. 155
138. Azimuts de la Lune. 165

Pages.
139. *Occultations et Éclipses.* Généralités 169
140. Prédiction des occultations et éclipses 171
141. Observation de l'éclipse 183
142. Calcul de la longitude par les occultations 184

LIVRE IV.

Applications pratiques.

CHAPITRE X.

GÉOGRAPHIE ET NAVIGATION.

143. *Projection des cartes* 194
144. Projection de Mercator ou carte réduite 195
145. Influence de l'aplatissement 197
146. Projection polaire orthomorphe 199
147. Projection stéréographique. Ses propriétés géométriques 200
148. Construction du canevas stéréographique 205
149. Projection gnomonique 208
150. *Problèmes généraux de Géographie et de Navigation* 209
151. Navigation à l'estime. Extension aux voyages par terre 211
152. Navigation astronomique. Méthode ancienne 216
153. Réduction d'une hauteur à l'horizon d'un autre lieu 217
154. Méthodes Lalande, Pagel et Sumner 219
155. Point par deux hauteurs et l'intervalle. Problème de Douwes 222
156. Calcul du point rapproché et de l'intersection de deux droites de hauteur 231
157. Point par trois hauteurs et plus. Solutions graphiques 238
158. *Courbes de hauteur sur la carte réduite* 240
159. Routes orthodromiques 250
160. *Levés géodésiques.* Formules 253
161. Construction d'un relèvement. Correction Givry 256
162. Construction et calcul d'un point par les segments capables 259
163. Construction de trois points inaccessibles par trois stations 262
164. Mesure des bases par les moyens rapides. Calcul des points 264
165. Détermination des altitudes et problème inverse 269
166. Indications pratiques sur les méthodes de levé 273
167. *Procédés pour reconnaître une étoile* 277

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION.

Pages.

168. Généralités. Classification des erreurs 280
169. Examen général des circonstances favorables aux observations. Calcul des erreurs 284
170. Équations de condition. Manière de les établir 293
171. Résolution des équations de condition. Méthode de Mayer. Application aux déviations des compas 301
172. Méthode de Legendre ou des moindres carrés. Loi des erreurs 306
173. Équations normales de la méthode des moindres carrés. Erreurs des résultats 312
174. Méthode de Cauchy 321
175. Détermination simultanée du temps, de la colatitude et de l'erreur de hauteur 328
176. Détermination des corrections de la lunette méridienne 330
177. Application au point rapproché. Point le plus probable 332
178. Conclusion 333

Additions et rectifications 339

Table analytique des deux Parties 345

Planche.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE.

COURS

D'ASTRONOMIE PRATIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

LIVRE III.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS GÉOGRAPHIQUES.

Un point de la surface terrestre est déterminé par sa colatitude, par la différence de sa longitude avec celle d'un méridien connu et par son altitude au-dessus du niveau des mers. Si l'on sait calculer ces éléments, on saura théoriquement construire une carte. Mais il est clair que le nombre des points à porter sur la feuille étant très grand, ces points ne doivent pas se déterminer isolément, d'autant plus que les erreurs possibles des observations altéreraient leurs positions relatives. Il faut donc les rattacher entre eux par des opérations spéciales. C'est l'objet de la Géodésie et de la Topographie, lesquelles empruntent aux observations astronomiques une donnée essentielle, l'orientation.

La détermination de la longitude à son tour comprend les deux recherches distinctes de l'heure locale et de l'heure du premier méridien.

Les éléments dont la recherche doit nous occuper ici se ramènent donc à quatre : Colatitude, Heure, Azimut et Longitude.

En général, le triangle de position est déterminé quand on connaît trois de ses éléments. On peut toujours se donner la dis-

tance polaire connue par les éphémérides et les Catalogues. Deux éléments doivent donc être demandés directement ou indirectement à l'observation. Les instruments portatifs permettent la mesure de l'azimut et de la hauteur, d'où découle la résolution du triangle; une observation des deux fera donc connaître l'heure et la colatitude. Ce n'est pourtant pas ainsi qu'on procède d'ordinaire; on divise le travail et l'on détermine séparément les différents éléments, en se plaçant dans les circonstances les plus favorables qui peuvent se définir ainsi : les circonstances dans lesquelles une erreur donnée commise dans les observations entraîne la moindre erreur possible sur le résultat cherché.

Le nombre des méthodes proposées est excessivement grand; nous ne développerons ici que celles qui sont d'un usage véritablement pratique, en insistant de préférence sur celles que l'expérience nous a prouvé être les plus sûres.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DE LA COLATITUDE.

89. — Culminations.

Dans le triangle de position pôle-zénith-astre, la colatitude est le côté compris entre le pôle et le zénith. Nous connaissons le côté δ (distance polaire) donné par les éphémérides. Nous pouvons mesurer le côté ζ (distance zénithale); il suffit alors, pour trouver la colatitude, de connaître un des angles. Parmi ces angles, celui qui est opposé au côté cherché, l'angle à l'astre ou angle de position serait difficile à mesurer; on ne peut se proposer de chercher que l'azimut ou l'angle horaire. Le cas le plus simple est celui où ces deux angles sont nuls, c'est-à-dire où l'astre est dans le méridien. La formule générale

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P$$

nous donne, en différentiant, δ et λ restant constants,

$$\sin\zeta\, d\zeta = \sin\delta\sin\lambda\sin P\, dP$$

ou bien

$$\frac{d\zeta}{dP} = \frac{\sin\delta\sin\lambda\sin P}{\sin\zeta}$$

et, la dérivée s'annulant pour $P = 0$ et $P = 180°$, on voit que ζ est alors maximum ou minimum.

Pour les astres dont la déclinaison ne varie pas, l'instant du passage au méridien est celui du minimum ou du maximum de distance au zénith, d'où le terme équivalent de *culmination*.

Pour $P = 0$ la relation primitive se ramène à

$$\cos\zeta = \cos(\delta - \lambda) = \cos(\lambda - \delta)$$

et elle est satisfaite par

$$\zeta = \delta - \lambda, \qquad \zeta = \lambda - \delta.$$

Le premier cas se rapporte aux culminations entre le zénith et l'horizon opposé au pôle, le deuxième aux culminations entre le pôle et le zénith. Pour $P = 180°$, $\cos\zeta = \cos(\delta + \lambda)$, c'est-à-dire $\zeta = \delta + \lambda$ ou $\zeta = -(\delta + \lambda)$.

C'est le cas des passages inférieurs.

On peut tout réunir en une seule formule

$$\lambda = \delta + \zeta, \tag{1}$$

en convenant de compter ζ positif quand l'astre est du même côté du zénith que le pôle, et négatif dans le cas inverse, δ positif pour les passages supérieurs, négatif pour les passages inférieurs, ou, plus simplement, en comptant les arcs + du pôle vers le zénith et du zénith vers le pôle, — quand ils s'éloignent de l'arc pôle-zénith. Si donc P est nul au moment de l'observation de la distance zénithale, la relation précédente a lieu en toute rigueur. Mais, en vertu des propriétés des maxima et minima, lors même que P n'est pas rigoureusement nul, l'erreur commise en le supposant égal à zéro est la plus petite possible dans le cas de la culmination.

90. — Colatitude par le cercle méridien.

Nous supposons la lunette installée dans le méridien, et les corrections de collimation, de niveau transversal et d'azimut aussi petites que possible. La condition essentielle à remplir, c'est que le fil horizontal soit exactement horizontal. On vérifie cette condition en pointant une étoile équatoriale à son entrée dans le champ, et s'assurant qu'elle reste constamment bissectée pour la même position de la lunette.

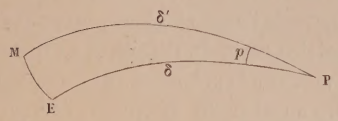
Le plan passant par ce fil et l'axe optique de la lunette coupera alors la sphère céleste suivant un grand cercle perpendiculaire au méridien, et une étoile pointée sous ce fil sera sur ce grand cercle.

Supposons maintenant qu'on observe une étoile non équatoriale à un instant où son angle horaire est P. Cette étoile ne restera plus exactement bissectée (dans cette position de l'instrument) quand P sera nul.

Considérons le triangle formé par le cercle de déclinaison de l'étoile PE, le méridien MP, et le grand cercle ME passant par le fil horizontal ; il est rectangle en M. Le côté EP est

égal à la distance polaire δ, et le côté MP est la distance polaire apparente, c'est-à-dire la différence entre la lecture instrumentale qu'on fait en pointant l'étoile en E, et la lecture qui correspondrait

Fig. 50.



au pôle. La distance zénithale ainsi mesurée satisfait donc à l'équation

$$\lambda = \delta' + \zeta'$$

tandis que celle qu'on cherche doit satisfaire à $\lambda = \delta + \zeta$. Il résulte de là que

$$\zeta = \zeta' + (\delta' - \delta) \tag{2}$$

et comme on a mesuré ζ', pour trouver ζ il est nécessaire de calculer $(\delta' - \delta)$.

Le triangle rectangle nous donne la relation connue

$$\operatorname{tang} \delta' = \operatorname{tang} \delta \cos P.$$

En y appliquant le développement (31) du Paragraphe 7,

$$\delta' = \delta - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} P \sin 2\delta + \dots . \tag{3}$$

Si l'on fait $\delta = 90^\circ$, on voit que $\delta' = \delta$, ce qui est, comme on l'a dit, le cas des étoiles équatoriales.

Si l'on exprime P en secondes de temps t, l'arc P sera égal à $15\,t$, et, pour trouver $\delta' - \delta$ en arc, on aura, avec une approximation suffisante,

$$\delta' = \delta - \left(\frac{15\,t}{2}\right)^2 \sin 1'' \sin 2\delta = \delta - 56,25 \sin 1'' t^2 \sin 2\delta.$$

Si l'on veut que l'erreur commise en prenant δ pour δ' ne dépasse pas $0'',5$ d'arc, on prendra dans le cas le plus défavorable de $\delta = 45^\circ$, $t < 43^s$: on a donc 86 secondes de temps pour pointer l'étoile et vérifier le pointé.

A cause des erreurs instrumentales du cercle méridien : niveau, collimation, azimut, l'angle horaire de l'étoile à son passage au fil

moyen n'est pas nul; mais il est toujours d'un petit nombre de secondes (moins de 4^s pour une étoile équatoriale, quand le cercle est convenablement installé). On peut s'assurer sans calcul nouveau, que dans ces conditions les erreurs intrumentales sont sans influence sur la hauteur. En effet, il ressort de ce qui précède que pour de petites valeurs de l'angle horaire, on peut admettre l'égalité entre la distance polaire vraie de l'étoile et sa distance polaire projetée orthogonalement sur le méridien. Si donc le fil horizontal est bien perpendiculaire au plan du méridien, l'erreur de collimation n'aura d'autre effet que d'altérer l'angle horaire d'une quantité dont l'effet sur la distance polaire est absolument négligeable. Quant à l'inclinaison et à l'azimut, leur effet se traduit par une très petite inclinaison du plan décrit par la lunette sur le méridien, ce qui altère d'une quantité très petite l'angle droit suivant lequel se fait la projection : l'écart du pied des perpendiculaires est alors une quantité du deuxième ordre, en prenant pour premier ordre la distance de l'étoile au méridien ou l'erreur instrumentale : et elle est absolument négligeable dans les conditions où nous nous supposons placés.

D'après les mêmes considérations, si le fil était légèrement incliné sur l'horizontale, il en résulterait que les limites du temps, pendant lequel on peut faire l'observation sans qu'elle ait besoin de correction, se trouveraient sensiblement réduites, et l'on devrait pointer à l'instant même du passage au fil moyen.

Si l'on désire néanmoins utiliser des observations faites en dehors du méridien, il faut noter l'heure du pointé et en déduire t; on calculera $(\delta' - \delta)$ par la formule (4) et l'on trouvera la distance zénithale méridienne par la relation (2) : la relation (1) donnera la colatitude. On n'aura généralement l'occasion d'appliquer cette réduction qu'aux étoiles voisines du pôle.

L'observation des circompolaires permet de déterminer l'inclinaison du fil, ou du moins l'erreur que cette inclinaison produit sur les distances zénithales. Pour cela, on pointera la circompolaire en différents points de ce fil; on notera chaque fois l'heure, et l'on réduira toutes ces positions au méridien : la comparaison de ces distances zénithales réduites avec celle qui a été observée lors du passage au fil moyen indiquera l'existence de l'erreur, sa grandeur et son signe.

La correction donnée par la formule (4) porte le nom de *réduction au méridien :* il ne faut pas la confondre avec une autre correction qui porte le même nom et qui se présente dans le calcul de la colatitude par les distances zénithales *circumméridiennes*.

Le pointé de l'étoile ne nous donne qu'une direction : pour connaître sa distance zénithale, il faut connaître le point de la graduation qui correspond au zénith.

On peut obtenir directement ce point, ou plutôt le nadir, qui lui est directement opposé, en pointant le fil horizontal sur son image réfléchie par le bain de mercure. Nous avons expliqué (§ 40) comment on fait cette observation de *collimation au nadir*. Mais il se présente une légère cause d'incertitude, due à ce que l'image réfléchie est beaucoup plus faible que l'image directe. Le fil a un diamètre apparent sensible, de 10″ à 15″ environ : on n'est donc pas bien sûr que l'image réfléchie soit entièrement recouverte par l'image directe, car, si elle débordait d'une petite quantité, 2″ à 3″, elle ne serait pas très apparente. Il est préférable de l'amener par deux pointés distincts à tangenter l'image directe successivement au Nord et au Sud, et l'on prend la moyenne de ces lectures pour le pointé nadiral. Pour éliminer les déplacements de l'instrument dus aux états d'équilibre différents du sol, selon que l'observateur est placé au nord ou au sud de la lunette, on observe dans les deux positions : on peut admettre que la moyenne des deux espèces d'observations donne exactement le nadir. On s'assurera d'ailleurs qu'il en est ainsi en déduisant les distances zénithales des étoiles observées face au Sud, de la lecture du nadir relative à la même position, de même que l'on combinera entr'elles les observations d'étoiles et du nadir faites face au Nord. Si les erreurs de graduation sont éliminées et si la correction des réfractions est bien faite, les deux séries distinctes doivent conduire à la même colatitude. Une différence constante entre les deux colatitudes ainsi obtenues, quelle que soit la distance zénithale des étoiles observées, indiquerait une erreur de détermination du nadir, car l'erreur de flexion est proportionnelle au sinus de la distance zénithale et varie avec celle-ci.

Exemple d'observation de colatitude. — A la Pointe-à-Pitre (jardin de l'hôpital militaire), on a observé le 11 décembre 1868 :

Baromètre $768^{mm},6$. $\theta = 20°7$.

Passage méridien de δ Persée : Lecture...	$61°50'45'',2$	moyenne des deux microscopes.
Nadir $272°57'45''$; d'où zénith.....	92.57.45	
ζ' apparent.....	31 .6.59,8	vers le Nord.
Réfraction.....	34,1	
Distance polaire δ....	42.38. 3,9	
$\lambda =$	$73°45'37'',8$	

Si l'on ne dispose pas d'un oculaire nadiral et d'un bain de mercure, ou si les conditions dans lesquelles on observe ne permettent pas d'arriver à une immobilité et à une netteté suffisantes de l'image réfléchie du fil, on aura recours au niveau placé parallèlement à la lunette. Supposons d'abord qu'on ait affaire à un astre dont le mouvement soit assez lent pour qu'on ait le temps de retourner la lunette sur ses tourillons dans l'intervalle de deux observations : c'est ce qui arrive pour la Polaire. On pointe l'astre cercle à l'Ouest, et l'on fait la lecture des verniers et celle du niveau. Puis on retourne la lunette sur ses tourillons, on fait un nouveau pointé cercle à l'Est avec lecture des verniers et du niveau. On réduit les lectures au méridien, on les corrige du niveau et l'on fait la différence des résultats, qui est le double de la distance zénithale cherchée. La moyenne de ces lectures donne le zénith instrumental. C'est en somme le procédé employé pour déterminer les doubles distances zénithales avec un théodolite centré.

Le champ de la lunette méridienne n'est pas assez grand pour permettre l'application de cette méthode à des astres autres que les circompolaires. Mais on peut observer deux étoiles différentes, la première cercle à l'Ouest, la deuxième cercle à l'Est.

Supposons, pour fixer les idées, que les deux étoiles culminent toutes deux du même côté du zénith. La différence des lectures corrigées donnera la somme des distances zénithales. La différence de ces distances zénithales se calculera en remarquant qu'on a pour la première étoile

$$\lambda = \delta + \zeta,$$

pour la deuxième étoile

$$\lambda = \delta' + \zeta';$$

donc $\zeta - \zeta' = \delta' - \delta$, quantité connue. Ayant la somme $\zeta + \zeta'$ et la différence $\zeta - \zeta'$, on en déduira ζ et ζ' et, pour vérification, on doit trouver pour λ deux valeurs identiques. Mais pour pouvoir comparer entr'elles deux distances, il faut *au préalable* les corriger de la réfraction, ce qui exige qu'on en connaisse une valeur approchée. C'est ce qui arrive toujours, puisqu'on a toujours une valeur approchée de la colatitude suffisamment exacte pour calculer la distance zénithale dont on a besoin pour trouver la réfraction.

Enfin si l'on dispose d'un bain de mercure, sans oculaire nadiral, on peut observer les astres directement et par réflexion. La combinaison de quatre observations de ce genre faites dans les deux positions de l'instrument permet d'éliminer le terme principal de l'erreur de flexion. On peut étendre à ce cas les remarques qui viennent d'être faites; nous n'y insisterons pas, ces observations se faisant rarement : le lecteur n'aurait pas de peine à faire lui-même la généralisation et l'application.

L'emploi du bain de mercure est préférable à celui du niveau, dont les indications n'ont pas toujours la fidélité désirable, et qui est très sensible aux variations de la température. Les niveaux qu'on adapte ordinairement aux cercles méridiens portatifs pour le nivellement du cercle de hauteur sont d'une sensibilité inférieure à la précision de la lunette; un observateur adroit pourrait leur substituer pour la mesure des latitudes le grand niveau, qui donne facilement la seconde d'arc ; mais l'instrument n'est pas disposé pour cela.

Les explications qui précèdent se rapportent aux étoiles fixes. Pour le Soleil, la Lune et les grosses planètes, on pointe un des bords, et l'on doit faire alors les corrections de demi-diamètre et de parallaxe; il est nécessaire, cela va sans dire, de connaître approximativement l'heure du méridien des éphémérides, afin de calculer la distance polaire à l'instant du passage. Il est préférable de ne se servir que des étoiles quand on dispose d'un cercle méridien.

91. — Colatitude par la culmination.

On peut aussi déterminer la latitude en mesurant la hauteur d'un astre à l'instant où cette hauteur est maximum (minimum pour les passages inférieurs). Ce procédé peut être employé avec un théodolite dont on connaît la collimation au zénith ou au nadir. C'est le plus pratique quand on se sert d'un instrument à réflexion. En mer, on calcule approximativement l'heure de la culmination, c'est-à-dire l'heure du chronomètre qui correspond à l'heure sidérale du lieu égale à l'Æ de l'astre. On se met en observation quelques instants avant. On vise directement à l'horizon apparent, et l'on amène l'image de l'astre au contact par réflexion. Tant que l'image tend à se détacher de la ligne d'horizon (¹), le maximum de hauteur n'est pas atteint : il arrive un instant où l'astre ne monte plus et ne descend pas encore; à ce moment, on arrête le mouvement et l'on fait la lecture de la hauteur. On corrige de l'erreur instrumentale, de la dépression, de la réfraction, de la parallaxe et du demi-diamètre, s'il y a lieu, et l'on a la hauteur h du centre. On en déduit la distance zénithale $\zeta = 90^\circ - h$ et l'on applique la formule

$$\lambda = \zeta + \delta$$

avec les conventions indiquées au Paragraphe 89.

Exemple de calcul de la colatitude. — Le 24 mai 1874, au mouillage de Bonne-Anse, à l'entrée de la Gironde, on a mesuré avec un cercle hydrographique la hauteur d'ε Vierge au-dessus de l'horizon de la mer, à son passage méridien et trouvé..... $55^\circ 58' 0''$

Collimation du cercle.....	$+2.0$
Dépression pour $3^m,0$ de hauteur de l'œil.....	-3.4
	$55^\circ 56' 56''$
Distance zénithale.....	$34\ 3.4$
Réfraction.....	$+40$
ζ corrigé.....	$34^\circ\ 3' 44''$
Distance polaire (90° — déclinaison).....	$78\ 21.53$
Colatitude.....	$44^\circ 18' 9''$

(¹) Ces indications s'appliquent aux passages supérieurs : pour les passages inférieurs, la distance zénithale est maximum et l'image de l'astre ne mord l'horizon ni avant ni après le passage.

La latitude de ce point prise sur la carte.....	45° 41′ 20″
Somme.....	89° 59′ 29″
L'erreur est donc de.....	31″

On ne devra pas compter sur cette précision toutes les fois qu'on observera à l'horizon de la mer.

A terre, on emploie l'horizon artificiel : on vise directement à l'image réfléchie dans le liquide, et l'on amène au contact par réflexion l'image directe. A l'instant où le contact persiste, la distance angulaire des deux images est maximum et égale au double de la hauteur. On corrige de l'erreur instrumentale, de la réfraction, du demi-diamètre et de la parallaxe.

Ceci suppose que l'instant du maximum de hauteur coïncide avec le passage au méridien, et n'est vrai qu'à la condition que l'observateur ne se déplace pas et que la distance polaire de l'astre reste invariable.

Supposons maintenant l'observateur mobile et la déclinaison de l'astre variable.

Différentions la formule

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P,$$

par rapport aux quatre variables, il viendra en faisant usage des analogies des sinus

$$d\zeta = \cos A\, d\lambda + \cos\varpi\, d\delta - \frac{\sin\lambda\sin\delta}{\sin\zeta}\sin P\, dP.$$

Pour avoir la valeur de l'angle horaire à l'instant du maximum de ζ, il faut égaler à zéro la différentielle totale $d\zeta$.

On trouve alors

$$\sin P = \frac{\sin\zeta}{\sin\lambda\sin\delta}\left(\cos A\,\frac{d\lambda}{dP} + \cos\varpi\,\frac{d\delta}{dP}\right);$$

si l'observateur se déplace en longitude, et que dL soit la différentielle de la longitude (+ vers l'Ouest), H l'angle horaire, on doit prendre

$$dP = dH - dL.$$

En prenant pour $d\delta$ la variation de distance polaire en 1^h, exprimée en secondes d'arc, il faudra faire $dH = 54\,000''$ et dL sera le nombre de secondes d'arc de longitude parcourues en 1^h. Une dis-

cussion facile montrerait, en tenant compte des valeurs extrêmes que comportent dL, $d\lambda$ et $d\hat{\delta}$, que pour le cas le plus défavorable relatif à la Lune, P est toujours inférieur à 2°, et qu'alors on peut prendre $\cos A$ et $\cos\varpi$ égaux à 1, en valeur absolue (leurs signes sont toujours contraires), et $\zeta = \hat{\delta} - \lambda$. On calculera donc P par la formule

$$\sin P = \frac{\sin(\hat{\delta} - \lambda)}{\sin\lambda \sin\hat{\delta}} \left(\frac{d\lambda}{dP} - \frac{d\hat{\delta}}{dP} \right). \tag{5}$$

Les signes de $d\lambda$ et de $d\hat{\delta}$ sont faciles à connaître, ces deux arcs partant du pôle nord. Le signe de $\sin P$ dépend de celui de $\hat{\delta} - \lambda$ et de celui de $\hat{\delta}$, en se rappelant les conventions faites plus haut.

Connaissant P, on fera la réduction au méridien comme pour les hauteurs circonméridiennes (*voir* plus loin) et l'on se servira de la valeur de $\hat{\delta}$ correspondant *à l'instant de l'observation* pour calculer λ.

92. — Circonméridiennes.

La méthode des culminations ne permet qu'un seul pointé à chaque passage au méridien : elle ne comporte pas l'emploi de la répétition ; elle se trouve en défaut si, à l'instant précis de la culmination, un nuage vient cacher l'astre ; enfin elle n'est pas applicable à l'usage du théodolite ordinaire, avec lequel on mesure toujours la double distance zénithale. Pour ne pas perdre les avantages résultant du faible mouvement en hauteur aux environs de la culmination, on emploie fréquemment la méthode des *distances zénithales circonméridiennes*.

Une hauteur quelconque d'un astre peut donner la colatitude si l'on connaît l'angle horaire : il suffit de résoudre la formule fondamentale par rapport à λ. On peut toujours supposer la distance zénithale déterminée dans tous les cas avec la même précision, sauf les erreurs de réfraction ; mais l'évaluation de l'heure donne lieu à deux erreurs :

1° Erreur d'estimation de l'instant du pointé ;

2° Erreur de l'état absolu du chronomètre.

Les meilleures conditions d'observation sont celles où une erreur donnée sur l'heure produit la moindre erreur sur la colatitude.

Différentions donc la formule fondamentale en ne faisant varier

que P et λ, il vient

$$0 = -(\cos\delta \sin\lambda + \sin\delta \cos\lambda \cos P)\, d\lambda - \sin\delta \sin\lambda \sin P\, dP.$$

et comme

$$\cos\delta \sin\lambda - \sin\delta \cos\lambda \cos P = -\sin\zeta \cos A,$$

on a

$$d\lambda = -dP \frac{\sin\delta \sin\lambda \sin P}{\sin\zeta \cos A} = -dP \sin\lambda \operatorname{tang} A.$$

Pour une valeur donnée de dP, $d\lambda$ sera d'autant moindre que P ou A seront plus petits; pour $P = 0°$ ou $P = 180°$, $d\lambda$ sera nul. C'est ce qui arrive quand l'astre est dans le méridien. Ce sont donc les hauteurs voisines du méridien qui sont les plus avantageuses à ce point de vue. De plus la culmination supérieure correspondant au maximum de hauteur est affectée d'une moindre réfraction que les autres hauteurs du même astre.

Il ne faut pourtant pas que ζ soit trop petit : les observations très voisines du zénith, assez difficiles à faire, ne sont pas favorables à la précision, comme le montre la première valeur de $d\lambda$ et comme on s'en rend facilement compte *à priori*. Ce qui constitue en effet l'avantage des circonméridiennes au point de vue de la détermination de la colatitude, c'est la lenteur du mouvement en distance zénithale aux environs du passage méridien. Or un astre qui culmine au zénith se meut rapidement en distance zénithale aux environs du passage : sous l'équateur, ce mouvement est même égal au mouvement en angle horaire.

Le calcul de λ peut se faire avec la formule fondamentale

$$\cos\zeta = \cos\delta \cos\lambda + \sin\delta \sin\lambda \cos P.$$

Faisons

$$\cos\delta = a \sin\varphi, \qquad \sin\delta \cos P = a \cos\varphi,$$

il vient

$$(6) \qquad \sin(\varphi + \lambda) = \frac{\cos\zeta}{a} = \frac{\cos\zeta \sin\varphi}{\cos\delta} = \frac{\cos\zeta \cos\varphi}{\sin\delta \cos P},$$

l'angle auxiliaire φ étant donné par la relation

$$\cot\varphi = \cos P \operatorname{tang}\delta.$$

Bien que cette formule offre l'avantage de donner une vérification

du calcul par les deux valeurs de sin $(\varphi + \lambda)$, elle n'est guère employée quand P est petit. Abstraction faite de l'ambiguïté qui résulte de ce que $\varphi + \lambda$ est donné par son sinus, difficulté assez facile à lever dans la généralité des cas, puisqu'on a toujours une valeur approximative de λ, le calcul est assez long et exige l'emploi de logarithmes à six décimales. On peut appliquer ici une méthode d'*approximations successives*.

La formule fondamentale s'écrit en effet

$$\cos\zeta - \cos(\lambda - \delta) = -2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}P \qquad (7)$$

ou

$$\sin\tfrac{1}{2}(\lambda - \delta + \zeta)\sin\tfrac{1}{2}(\lambda - \delta - \zeta) = -\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}P. \qquad (8)$$

Posons maintenant $\lambda - \delta + \zeta = x$; comme, dans le méridien même, $\lambda - \delta + \zeta = 0$, x est une quantité assez petite dans son voisinage; on l'appelle *réduction au méridien* (¹).

Éliminons ζ au moyen de cette relation, la formule (8) devient

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin(\lambda - \delta - \tfrac{1}{2}x) = -\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}P,$$

ou encore

$$\frac{x\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} = -\frac{\sin\delta\sin\lambda}{\sin(\lambda - \delta)}2\sin^2\tfrac{1}{2}P\frac{\sin(\lambda - \delta)}{\sin(\lambda - \delta - \frac{1}{2}x)}.$$

Or on a, aux termes du quatrième ordre près,

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \sqrt[3]{\cos\alpha} \qquad \text{(formule de Maskelyne)},$$

car on vérifie aisément qu'en négligeant les termes en α^4,

$$\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha^2}{6} + \dots = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

donc, posant $a = -\frac{\sin\delta\sin\lambda}{\sin(\lambda - \delta)}$, et calculant avec une valeur ap-

(¹) Ne pas confondre avec la correction de même nom relative à l'emploi du cercle méridien (§ 90). Cette dernière est la différence entre un arc de grand cercle de déclinaison et sa projection par grand cercle, soit entre deux distances polaires; celle qui nous occupe est la différence entre deux distances zénithales, ou bien la distance de deux petits cercles de hauteur.

prochée de λ,

$$x\sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}x} = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P}\,\frac{\sin(\lambda-\delta)}{\sin(\lambda-\delta-\frac{1}{2}x)}. \tag{9}$$

On prendra pour première valeur de x

$$\xi = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P}.$$

La deuxième approximation sera

$$\xi' = \xi\,\frac{\sin(\lambda-\delta)}{\sin(\lambda-\delta-\frac{1}{2}\xi)}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\cos\frac{1}{2}\xi}}. \tag{10}$$

Elle suffira en général; sinon on substitue ξ' à ξ et l'on refait le calcul. Finalement, après avoir divisé la correction par $\sin 1''$,

$$\lambda = \delta - \zeta + x.$$

Cette formule a l'avantage de ne laisser subsister aucune ambiguïté, relativement au signe de la correction.

93. — Formule de Delambre.

La formule des circonméridiennes de Delambre est plus élégante. Revenons à l'équation (7), dans laquelle nous faisons

$$(\delta-\lambda) = y \quad \text{et} \quad -2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P} = b,$$

elle prend la forme

$$\cos\zeta = \cos y + b$$

et ζ peut se développer par la formule donnée au Paragraphe 7.

Si l'on pose comme précédemment

$$a = \frac{\sin\delta\sin\lambda}{\sin(\delta-\lambda)},$$

ce développement donnera, après substitution des valeurs de y et de b

$$\zeta = \delta - \lambda + 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P} - 2\cot(\delta-\lambda)\,a^2\sin^4\tfrac{1}{2}\mathrm{P} + \ldots,$$

Ici la réduction au méridien se présente sous forme de série. Dans cette formule, λ, δ et ζ sont exprimés en partie du rayon : en les divisant partout par $\sin 1''$, ils se trouveront exprimés en secondes d'arc et la colatitude sera

$$(11) \qquad \lambda = \delta - \zeta + a\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''} - a^2\cot(\delta - \lambda)\frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}.$$

Le calcul se fait facilement si l'on a des Tables de logarithmes des sinus verses. Il suffit, dans les cas où la formule est applicable, de prendre les logarithmes avec quatre décimales. On fera attention aux conventions relatives aux signes de ζ, δ et λ. On prendra pour le calcul de a une valeur approchée de λ, obtenue au moyen de la plus faible distance zénithale mesurée.

Cette méthode est également une méthode d'approximations successives, car si la correction du λ admis est considérable, il faut recalculer une nouvelle valeur de a.

Le facteur $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$ se réduit en Tables. (*Voir* Table n° III qui en donne les logarithmes).

Nous avons cru devoir présenter deux méthodes de calcul afin de permettre la vérification des résultats, ce qui est très important.

Voici maintenant comment on conduira les observations et les calculs. On exécutera un certain nombre de pointés de l'astre, et l'on notera à chaque pointé l'heure du chronomètre, dont l'état absolu est supposé connu.

On calculera pour chacune de ces heures l'angle horaire de l'astre, en tenant compte, s'il y a lieu, de son mouvement en ascension droite. Cet angle horaire sera évalué en temps sidéral pour les étoiles, en temps vrai pour le Soleil.

La valeur de a est la même pour toutes les observations. On calculera la réduction au méridien pour chaque pointé. Cela posé, le calcul de la colatitude se fera d'une manière qui dépend de la méthode d'observation.

Si l'on opère avec un sextant, on a pour chaque observation une valeur de la hauteur simple ou double, d'où l'on déduit la distance zénithale géocentrique, et l'on applique à cette distance la réduction au méridien. On obtient ainsi autant de valeurs de la colati-

tude que de pointés, et leur accord permet de juger de la concordance des observations.

Avec le cercle à réflexion répétiteur ou le théodolite répétiteur, on a un angle final, somme des angles partiels. On applique à cet angle la somme des réductions au méridien et l'on divise par le nombre des observations. On trouve ainsi la distance zénithale méridienne.

Avec un théodolite non répétiteur, on a des doubles distances zénithales, auxquelles on ajoute les sommes des réductions au méridien prises deux à deux. La variation de hauteur n'étant pas proportionnelle à la variation d'angle horaire, on ne peut pas prendre la moyenne des angles horaires pour calculer une correction moyenne unique.

Colatitude par circonméridiennes d'étoiles. — Le 6 mai 1878, étant à Boung-Quioua, par longitude $6^h\,56^m\,3^s$ E., λ approché $= 72°3'$, on a observé vers 10^h du soir les distances zénithales circonméridiennes de l'Épi. Après correction du niveau et de la réfraction, on a obtenu les résultats des deux premières colonnes.

Heures au compteur	Double dist. zénithale	Angles horaires	Correction	$2(\delta-\lambda)$	$\delta-\lambda$	λ
h m s	° ′ ″	m s	″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
10.17.48,8		10.13,3	402,2			
21.45,6	57. 6.15,4	6.16,1	151,4	9.13,4	56.57.2,0	28.28.31,0	72.3.15,4
27.44,0		0.17,5	0,3			
33. 2,4	56.58.39,1	5. 2,7	98,1	1.38,4	56.57.0,7	28.28.30,3	72.3.16,1

Le compteur avance de $6^h\,34^m$ sur le temps moyen du lieu.
Correction $11^h\,53^m\,26^s$.

Coordonnées de l'Épi :

$$\alpha = 13^h\,18^m\,48^s,8 \qquad \delta = 100°\,31'\,46'',4$$

Temps sidéral à midi Paris	$2^h\,56^m\,48^s,6$
Correction pour longitude $6^h\,56^m\,36^s$	$-1\;\;8\;,4$
Temps sidéral à midi du lieu	$2^h\,55^m\,40^s,2$
Ascension droite	$13\;\;18\;\;48\;,8$
Intervalle sidéral depuis midi	$10^h\,23^m\;\;8^s,6$
Réduction au temps moyen	$-1\;\;42\;,1$
Passage méridien, temps moyen	$10^h\,21^m\,26^s,5$

Table VI. *C. des T*

Calculons d'abord les angles horaires :

Heure au compteur	$10^h\,17^m\,48^s,8$
Correction	11 53 26
Heure de l'observation, temps moyen	$10^h\,11^m\,14^s,8$
Heure du passage	10 21 26 ,5
Angle horaire temps moyen	$10^m\,11^s,7$
Réduction en temps sidéral	+ 1 ,6
Angle horaire : temps sidéral	$10^m\,13^s,3$

Les autres angles horaires sont calculés de même et l'on achève ainsi :

$\delta = 100°\,31'\,46''$	log sin	9,9926			
$\lambda = 72\ \ 3$	log sin	9,9783			
$\delta - \lambda = 28°\,28'\,46''$	colog sin	0,3216			
	$\log a$	0,2925	0,2925	0,2925	0,2925
	$\log \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$	2,3119	1,8873	9,222	1,6990
	log corrections	2,6044	2,1800	9,514	1,9915

L'usage d'un chronomètre sidéral aurait beaucoup abrégé les calculs.

94. — Astres dont la distance polaire est variable.

Si la distance polaire de l'astre considéré varie sensiblement dans le courant d'une série d'observations, a n'est plus une constante, et le calcul se complique et s'allonge. On peut employer un artifice, grâce auquel il sera permis de considérer la distance polaire comme constante et égale à la valeur qu'elle prend à l'instant du passage méridien.

Supposons, par exemple, qu'on ait observé le Soleil. Soit δ la distance polaire à midi vrai. A l'heure vraie P, elle sera $\delta + P\frac{d\delta}{dP}$, et, en nous en tenant au premier terme de la réduction au méridien, nous aurons

$$\lambda = \delta + P\frac{d\delta}{dP} - \zeta + 2a\sin^2\tfrac{1}{2}P.$$

On peut sans inconvénient prendre δ au lieu de $\delta + \mathrm{P}\frac{d\delta}{d\mathrm{P}}$ pour le calcul de a. Si nous posons

$$\mathrm{P}\frac{d\delta}{d\mathrm{P}} + 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P} = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}+\gamma)$$

et que nous tirions de là la valeur de γ, il est clair qu'en remplaçant P par $\mathrm{P}+\gamma$ dans le calcul de la réduction au méridien, on aura le résultat exact qu'on cherche. Cette équation peut s'écrire

$$\mathrm{P}\frac{d\delta}{d\mathrm{P}} = 2a[\sin^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}+\gamma) - \sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P}] = 2a\sin(\mathrm{P}+\tfrac{1}{2}\gamma)\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Comme γ est petit, nous pouvons remplacer $\sin(\mathrm{P}+\frac{1}{2}\gamma)$ par P, et $2\sin\frac{1}{2}\gamma$ par γ, et si nous mettons pour a sa valeur, il vient

$$\gamma = \frac{d\delta}{d\mathrm{P}}\frac{\sin(\delta-\lambda)}{\sin\delta\sin\lambda}. \tag{12}$$

Cette valeur est indépendante de P : elle est donc la même pour toute la série des circonméridiennes d'un même astre observées le même jour. Cet angle γ est précisément l'angle horaire à l'instant du maximum de hauteur, changé de signe. Il suffit pour s'en assurer de faire $d\lambda = 0$ dans l'équation (5) du Paragraphe 91, ce qui revient à supposer l'observateur immobile, et de remplacer sin P par l'arc. On pourra donc supposer la distance polaire constante pour le calcul, et égale à sa valeur à l'instant précis du passage méridien, à la condition de compter les angles horaires non plus à partir du passage méridien, mais à partir du maximum de hauteur.

Pour effectuer le calcul numérique de l'angle γ, on prendra pour $\frac{d\delta}{d\mathrm{P}}$ la variation horaire de la distance polaire ; on aura cette variation exprimée en secondes d'arc par la formule

$$\frac{d\delta}{d\mathrm{P}} = \text{variation horaire} \times \frac{206265}{15\times 3600}.$$

En effet, en prenant l'heure pour unité du temps P, pour réduire le temps en secondes d'arc, il faut le multiplier par 3600 et par 15, tandis que $d\delta$ étant exprimé en parties du rayon, se réduit en

secondes d'arc en le multipliant par $206265 = \frac{1}{\text{arc } 1''}$; on a donc

$$y = \text{variation horaire} \times 3,82 \times \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta \sin\lambda},$$

$$\log 3,82 = 0,5820.$$

Quand on a plusieurs observations distinctes, la simplification trouvée ainsi n'est pas très importante. Le calcul des différents $\frac{d\delta}{dP}$ est vite fait, et δ peut toujours être pris constant dans le calcul du coefficient a. En traitant ainsi chaque observation séparément, on a l'avantage de juger plus sûrement du degré de concordance des résultats. Il vaut mieux consacrer un peu plus de temps aux calculs et se ménager de nombreuses vérifications.

95. — Limites des observations de circonméridiennes.

Nous avons borné notre approximation aux deux premiers termes de la série qui représente la réduction au méridien. Il est utile de savoir dans quelles limites le résultat obtenu peut être estimé suffisamment exact.

Pour y arriver, on poussera le développement jusqu'aux termes du troisième ordre. Le terme complémentaire de cet ordre est en valeur absolue

$$\frac{4}{3}\frac{[1 + 3\cot^2(\delta - \lambda)]\sin^3\delta \sin^3\lambda \sin^6\frac{1}{2}P}{\sin^3(\delta - \lambda)\sin 1''}.$$

Si l'on veut que l'erreur résultant de l'omission de ce terme ne dépasse pas une limite donnée, $1''$ par exemple, on égalera cette expression à cette limite, et l'on résoudra l'équation par rapport à P

$$\sin^6\tfrac{1}{2}P = \sin 1'' \times \frac{3}{4}\frac{\sin^3(\delta - \lambda)}{[1 + 3\cot^2(\delta - \lambda)]\sin^3\delta \sin^3\lambda}. \qquad (13)$$

La valeur de P ainsi trouvée donnera la limite de l'angle horaire qu'on ne doit pas dépasser. Nous donnons à la fin de la I^re^ Partie une Table de ces limites qui dispense de ce calcul. On trouvera, par un procédé analogue, les limites plus étroites dans lesquelles on peut

s'en tenir au premier terme de la réduction au méridien. On remarquera que cela suppose qu'on calcule avec un angle horaire exact. Le propre des observations circumméridiennes est qu'une erreur sur l'angle horaire a peu d'influence sur la réduction de la distance zénithale. Ceci cesse d'être vrai quand le mouvement en hauteur devient plus rapide. A supposer même l'état absolu bien connu, une petite erreur sur l'estimation de l'heure en entraîne une sur le calcul de la réduction. Ce cas se discuterait facilement en différentiant la formule fondamentale dans laquelle on ferait varier ζ et P, et en tirant $\frac{d\zeta}{d\mathrm{P}}$. Il paraît inutile de s'appesantir sur ce point. L'observateur aura pour ainsi dire le sentiment de cette variation par l'aspect même du mouvement de l'astre, et le bon sens lui indiquera le moment où ce mouvement est assez rapide pour se prêter mieux à la détermination de l'heure même qu'à celle de la latitude.

96. — Circumméridiennes en fonction de l'azimut.

La méthode que nous venons d'exposer suppose que l'on possède un chronomètre passable. Si cela n'était pas et si l'on ne pouvait pas trouver les angles horaires nécessaires à la réduction, on ne serait pourtant pas privé de tout moyen d'utiliser les propriétés des circumméridiennes. L'azimut s'annule en même temps que l'angle horaire; aux environs du passage méridien, il varie rapidement tandis que la hauteur varie peu.

Si nous prenons la formule

$$\cos\delta = \cos\lambda\cos\zeta - \sin\lambda\sin\zeta\cos\mathrm{A},$$

elle peut se mettre sous la forme

$$\cos\delta = \cos(\zeta+\lambda) + 2\sin\lambda\sin\zeta\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A},$$

dont on tire comme précédemment le développement

$$\delta = (\zeta+\lambda) - \frac{b}{\sin(\zeta+\lambda)} - \tfrac{1}{2}\cot(\zeta+\lambda)\frac{b^2}{\sin^2(\zeta+\lambda)},$$

avec

$$b = 2\sin\lambda\sin\zeta\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A}.$$

On a donc pour le calcul numérique, après réduction en arc,

$$\lambda = \delta - \zeta + \frac{\sin\lambda \sin\zeta}{\sin\delta} \frac{2\sin^2\frac{1}{2}A}{\sin 1''} + \frac{\sin^2\lambda \sin^2\zeta}{\sin^2\delta} \cot^2(\zeta + \lambda) \frac{2\sin^4\frac{1}{2}A}{\sin 1''}$$

et le calcul se fera comme le précédent. L'analogie de l'expression qui donne $\cos\delta$ avec celle qui donne $\cos\zeta$ fait voir comment on calculerait une formule d'approximations successives en suivant la même marche qu'au Paragraphe 92. Nous nous dispenserons de ce calcul facile; la formule que nous venons d'écrire est suffisante; λ y entrera par sa valeur estimée et ζ peut être pris uniformément égal à $\delta - \lambda$. Il ne reste donc qu'à connaître A.

M. d'Abbadie conseille de déterminer A par la méthode des hauteurs correspondantes, dont le principe est le même que celui du tracé de la méridienne par le gnomon, et sur laquelle nous reviendrons. Cette méthode ne laisse pas que de présenter certaines difficultés pratiques d'application. On peut s'affranchir de ces difficultés en suivant une marche tout à fait analogue à celle que nous donnons plus loin pour la détermination de l'heure par les circonméridiennes (*voir* § 110), en y remplaçant a par $\frac{\sin\lambda \sin\zeta}{\sin\delta}$ et P par A. On remarquera que, lors même que ce calcul ne déterminerait pas l'azimut avec une grande précision, il le donnerait assez exactement pour avoir une bonne approximation de la colatitude. Cette circonstance, en effet, ne se présentera que si le rapport $\frac{d\zeta}{dA}$ est très petit, et alors une erreur sur l'azimut est considérablement réduite comme effet sur la distance zénithale.

La même substitution de A à P nous montre que dans le cas d'un astre de déclinaison variable, on peut se dispenser de tenir compte de cette variation en calculant les azimuts à partir d'un angle γ donné par

$$\gamma = \frac{d\delta}{dA} \frac{\sin\delta}{\sin\lambda \sin\zeta};$$

en différentiant la formule qui donne $\cos\delta$, où l'on fait varier δ, ζ et A, on en tire une valeur de $d\zeta$ que l'on annule pour trouver les conditions du maximum; l'équation ainsi trouvée donne précisément pour l'azimut du maximum de hauteur

$$\sin A = -\frac{\sin\delta}{\sin\zeta \sin\lambda} \frac{d\delta}{dA}.$$

Mais l'azimut n'étant pas, comme l'angle horaire, l'argument des Tables, il faudrait transformer $\frac{d\delta}{dA}$ en $\frac{d\delta}{dP}\frac{dP}{dA}$, et $\frac{dP}{dA}$ se trouverait avec une approximation suffisante par la formule

$$\frac{dP}{dA} = \frac{\cos A}{\cos P}\frac{\sin\zeta}{\sin\delta}$$

qu'on obtient en différentiant l'analogie des sinus, sans faire varier δ ni ζ, et dans laquelle, en vue du cas particulier, on ferait

$$\cos A = \cos P = 1.$$

Pour le calcul numérique, on peut se servir des mêmes Tables qui donnent $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$.

97. — Colatitude par l'observation de la Polaire. Cas général.

Nous avons dit que la précision avec laquelle les circumméridiennes donnent la colatitude tient à la lenteur du mouvement en distance zénithale à l'époque où l'on observe. Les étoiles voisines du pôle ont une vitesse apparente très faible en tous les points de leur parallèle diurne ; elles doivent par suite se prêter à cette observation à toute heure.

Les éphémérides astronomiques renferment des Tables pour trouver la *latitude par l'observation de l'étoile polaire*.

Les Tables de la *Connaissance des Temps* ont pour argument le *temps vrai*. Elles sont ainsi d'un usage plus rapide en mer et partout où l'on aura réglé sa montre sur le temps vrai. A terre, où l'on a plutôt le temps sidéral, on pourra donner la préférence à la méthode du *Nautical Almanac*. Les explications dont ces Tables sont accompagnées sont suffisantes en pratique. Nous croyons pourtant utile de donner les formules dont celles du *Nautical Almanac* sont la traduction.

Soit PZA (*fig.* 51) le triangle de position : de l'astre A abaissons l'arc de grand cercle AM perpendiculaire sur le méridien PZ.

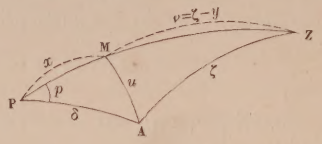
Comme ici P peut prendre une valeur quelconque entre 0° et 360°, nous ne pouvons plus donner de signes à ζ et à δ.

Soient $PM = x$, $MZ = v = \zeta - y$; on a

$$\lambda = \zeta - (y - x);$$

ce qu'il faut calculer, c'est $y - x$, correction de la distance zénithale.

Fig. 51.



Nous avons, dans le triangle rectangle MAZ,

$$\cos(\zeta - y) = \frac{\cos\zeta}{\cos u}.$$

Il est aisé de voir que si l'on considère u et δ comme étant du premier ordre de petitesse, y sera du deuxième ordre.

Cette équation donne en effet

$$\cos\zeta\cos y + \sin\zeta\sin y = \frac{\cos\zeta}{\cos u}.$$

Résolvant par rapport à $\sin y$, remplaçant $\cos y$ par $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}y$ et enfin développant $\frac{1-\cos u}{\cos u}$, il vient

$$\sin y = \cot\zeta\left(2\sin^2\tfrac{1}{2}y - \frac{u^2}{2}\right);$$

y étant au plus du premier ordre, $2\sin^2\frac{1}{2}y$ ne peut être que du deuxième ordre ou d'un ordre plus élevé; donc, d'après son expression, $\sin y$ est du deuxième ordre, et par suite $2\sin^2\frac{1}{2}y$ du quatrième. Négligeons-le; il reste

$$\sin y = -\frac{u^2}{2}\cot\zeta.$$

Le triangle rectangle donne aussi

$$\sin u = \sin\delta\sin P.$$

Développant les sinus de u et de δ et opérant par approximations successives en prenant pour première valeur $u = \delta \sin P$, il vient

$$u = \delta \sin P - \frac{\delta^3}{6} \sin P \cos^2 P.$$

Par conséquent,

$$y = -\frac{\delta^2 \sin^2 P \cot \zeta}{2}.$$

Le triangle rectangle PMA donne

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \delta \cos P$$

et, en développant,

$$x + \frac{x^3}{3} = \left(\delta + \frac{\delta^3}{3}\right) \cos P.$$

Opérant encore par approximations successives, avec une première valeur $x = \delta \cos P$, nous aurons

$$x = \delta \cos P + \frac{\delta^3}{3} \cos P \sin^2 P.$$

Donc enfin, avec la même approximation que plus haut,

$$(14) \qquad y - x = -\delta \cos P - \frac{\delta^2 \sin^2 P \cot \zeta}{2} - \frac{\delta^3}{3} \cos P \sin^2 P.$$

Le maximum du terme en δ^3 correspond à $P = 54^\circ 44'$ et est égal à $0'',65$. On le néglige dans la pratique.

L'ascension droite et la distance polaire de l'étoile varient, ce qui fait varier aussi les termes correctifs. On a réduit ces termes en Tables calculées pour des valeurs moyennes des coordonnées, et un terme supplémentaire tient compte de l'erreur qui en résulte.

Soient α l'ascension droite, δ la distance polaire ; α_0 δ_0 les valeurs pour lesquelles les Tables sont calculées, posons

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \qquad \delta = \delta_0 + \Delta\delta.$$

Soit S l'heure sidérale de l'observation, on a

$$P = S - \alpha.$$

Posons

$$P_0 = S - \alpha_0,$$

on aura

$$P = P_0 - \Delta\alpha.$$

Introduisant ces valeurs dans l'équation ci-dessus et effectuant les développements, il vient finalement

$$(15) \qquad \lambda = \zeta - (y - x)$$

$$= \underset{\text{I}}{\zeta} + \underset{\text{II}}{\delta_0 \cos P_0 + \tfrac{1}{2}\delta_0^2 \sin^2 P_0 \cot\zeta} + \underset{\text{III}}{\Delta\alpha\, \delta_0 \sin P_0 + \Delta\delta \cos P_0}.$$

Les numéros des termes correctifs sont ceux des Tables ; les arguments sont : S pour I, S et ζ pour II, S et la date pour III.

On pourrait se servir de la formule (14) pour calculer les Tables. Il faut pourtant faire attention que le calcul d'après les éphémérides donne la latitude et non la colatitude. Les formules donneraient les termes correctifs du *Nautical Almanac*, au signe près.

Voici maintenant un exemple de calcul d'après la *Connaissance des Temps* :

Le 9 septembre 1879, M. Renaud a observé au cap Paklung la double distance zénithale de la Polaire. Correction du compteur sur le temps moyen du lieu : $1^h 46^m 0^s$. Longitude $7^h 3^m 24^s$ E.

Lectures.....	285°23′45″	Heures au compteur. ..	6h36m 8s,0
	148 42 29		6 39 38 ,0
Double distance zénithale....	136°41′16″	Moyenne.....	6h37m53s,0
Correction du niveau	— 1 20	Correction du compteur.	1 46 0
		Heure temps moyen....	8h23m53s,0
2 ζ.....	136°39′56″	Équation du temps.....	2 41 ,0
ζ.....	68 19 58	Temps vrai	8h26m34s,3
Réfraction	2 19	Tables I et II, *C. des T.*	9 54 48 ,0
ζ.....	68°22′17″	S.....	18h21m22s,3
h	21 37 43	Temps vrai	8 26 34
Table III.....	— 7 26	Longitude.....	7 3 24
Tables IV et V.	+ 21	Correction.....	1h23m10s
Latitude.....	21°30′38″	Table II.....	+ 12s

98. — Colatitude par les observations des passages supérieur et inférieur d'une même circompolaire.

Les méthodes qui précèdent s'appuient toutes sur la connaissance *à priori* de la distance polaire de l'astre observé. Dans les observatoires, on détermine la latitude directement, en observant une même circompolaire à ses passages supérieur et inférieur. La moyenne des distances zénithales ainsi obtenues, corrigées de la réfraction, donne directement la lecture de l'instrument correspondante au pôle. Les mêmes observations donnent la distance polaire. Nous ne nous étendrons pas sur cette méthode qui n'est guère pratique en voyage, et qui ne présente pas de difficultés spéciales en dehors de celles de l'observation même.

99. — Colatitude par les passages au premier vertical.

Ce qui a été dit jusqu'ici suppose l'observation exacte des distances zénithales. Il faut pour cela un bon cercle vertical et un bon niveau. Cette dernière condition est indispensable, quel que soit le procédé suivi; c'est par le niveau qu'on détermine la verticale qui doit être connue avec la même précision que la direction de l'axe de la Terre. Mais la première n'est pas essentielle; nous allons donner des méthodes qui permettent de s'en passer plus ou moins.

Si l'on dispose d'un cercle méridien à lunette puissante, dont le grand niveau, susceptible de retournement, est très sensible, mais dont le cercle des hauteurs est petit, et qui est muni de verniers qui ne donnent que les $30''$, on peut l'installer *dans le premier vertical* et observer les passages d'une même étoile dans ce grand cercle.

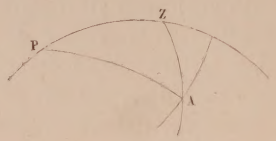
Pour se préparer à l'observation, il faut connaître la hauteur de l'astre à l'instant de son passage, ainsi que l'heure de ce passage. Une construction graphique donnera ces deux éléments avec une précision suffisante, si l'on connaît d'avance λ à $1'$ ou $2'$ près, ce qui est toujours possible, soit en observant avec le même instrument dans le méridien, soit en recourant à d'autres instruments. Une fois

l'observation faite, on connaît l'intervalle des deux passages corrigés; cet intervalle, corrigé de la marche diurne du chronomètre, est égal au double de l'angle horaire P. Le triangle PZA (*fig.* 52), rectangle en A, nous donne

$$\text{tang}\,\delta\cos P = \text{tang}\,\lambda \tag{16}$$

que l'on peut calculer directement en se servant de logarithmes à

Fig. 52.



six décimales. On peut aussi développer la solution en série, quand P est petit, c'est-à-dire quand l'étoile culmine près du zénith; on appliquera la formule

$$\lambda - \delta = -\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}P\sin 2\delta}{\sin 1''} + \frac{\text{tang}^4\frac{1}{2}P\sin 4\delta}{2\sin 1''} - \dots \tag{17}$$

qui donne $\lambda - \delta$ en secondes d'arc.

On peut observer les passages de deux étoiles différentes, l'une à l'Est, l'autre à l'Ouest; dans ce cas, on note sur un chronomètre sidéral les heures S, S′ des passages; on connaît les ascensions droites α, α'. Si S et S′ étaient les heures sidérales exactes, les relations

$$S = \alpha + P, \qquad S' = \alpha' + P'$$

donneraient P et P′ et résoudraient le problème au moyen des équations (16) et (17). Mais le but de la méthode est précisément de dispenser de la connaissance très exacte de l'heure sidérale. Soient donc E l'état de la montre sur le temps sidéral, H et H′ les heures qu'elle marque aux instants du passage,

$$S = H + E, \qquad S' = H' + E$$

et l'on peut déduire de là

$$P' - P = H' - H - (\alpha' - \alpha)$$

et calculer ainsi P′ — P.

Si l'on connaissait P′ et P, la relation (16) et son analogue

$$\text{tang}\,\delta' \cos P' = \text{tang}\,\lambda \qquad (16\ bis)$$

résoudraient le problème. Les deux reviennent à celle-ci

$$\sin\delta\cos\delta'\cos P = \sin\delta'\cos\delta\cos P';$$

Posons

$$\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(P'-P) = m\sin\varphi,$$
$$\sin(\delta'-\delta)\cos\tfrac{1}{2}(P'-P) = m\cos\varphi,$$

l'angle φ se calculera par sa tangente

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sin(\delta+\delta')}{\sin(\delta'-\delta)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(P'-P);$$

multiplions la première par $\sin\frac{1}{2}(P'+P)$, la deuxième par $\cos\frac{1}{2}(P'+P)$ et ajoutons, il viendra après quelques réductions faciles

$$\sin\delta\cos\delta'\cos P - \cos\delta\sin\delta'\cos P' = \frac{m}{2}\cos[\varphi - \tfrac{1}{2}(P'+P)] = 0,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(P'+P) = \varphi - 90^\circ.$$

On peut donc calculer P et P′; les équations (16) et (16 *bis*) donneront alors deux valeurs de la colatitude, qui doivent être égales, ce qui vérifie les calculs. Il va de soi qu'on peut également appliquer (17) et son analogue si l'on y trouve avantage.

Pour corriger ces observations de l'effet des erreurs instrumentales, on pourrait chercher les corrections à attribuer à l'angle horaire P, comme conséquence de ces erreurs. Mais comme, en dernière analyse, ce n'est pas l'angle horaire, mais la colatitude ou la distance polaire que l'on cherche, il est préférable de calculer les corrections que doivent recevoir ces éléments et qui sont d'ailleurs les mêmes pour l'un et pour l'autre.

Donnons d'abord une formule qui peut servir à calculer directement la différence $(\delta - \lambda)$. Cette différence est positive, autrement l'astre ne passerait pas au premier vertical et serait circompolaire.

On a la relation déduite des formules générales de la Trigonométrie sphérique

$$\sin\zeta\cos A = \cos\delta\sin\lambda - \cos\lambda\sin\delta\cos P.$$

Puisqu'on observe dans le premier vertical $\cos A = 0$, donc

$$\cos\delta \sin\lambda = \cos\lambda \sin\delta \cos P;$$

retranchant aux deux membres $\sin\delta \cos\lambda$ et remplaçant le sinus verse $1 - \cos P$ par $2\sin^2\frac{1}{2}P$, il viendra

$$\sin(\delta - \lambda) = \sin\delta \cos\lambda \, 2\sin^2\tfrac{1}{2}P. \qquad (18)$$

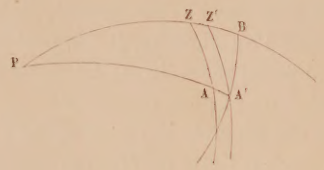
Nous calculerons $(\delta - \lambda)$ par cette formule, avec la valeur de P déduite de l'observation; reste maintenant à en calculer la correction, c'est-à-dire la correction que doit recevoir le δ qu'on déduirait de là.

Nous admettrons que les erreurs d'inclinaison et d'azimut sont petites. Celle de collimation peut avoir une valeur allant à 10′ et plus, si l'on y englobe la réduction au fil moyen.

Il n'en reste pas moins vrai que l'on peut, comme dans le cas de la lunette méridienne, calculer les trois corrections indépendamment l'une de l'autre, ce qui revient à négliger les termes du deuxième ordre. La recherche se simplifie encore si l'on admet que $\lambda - \delta$ et P sont petits, ce sont en effet là les seules conditions d'application exacte de la méthode. Le problème se pose alors ainsi : on a calculé $\delta - \lambda$ (ou δ) avec une certaine valeur de P, ce qui suppose donné le cercle de déclinaison de l'astre : trouver les corrections de la distance polaire résultant de chacune des erreurs instrumentales. Pour fixer les idées et abréger le langage, supposons que nous soyons dans l'hémisphère nord.

1° *Collimation.* — Au lieu de décrire le vertical ZA (*fig.* 53),

Fig. 53.



l'axe optique décrit un petit cercle Z′A′ parallèle à ZA, et tel que $ZZ' = c$, la collimation.

L'astre a été observé sur ce petit cercle en A′, et l'on a déduit de cette observation l'angle horaire $A'PZ = P$.

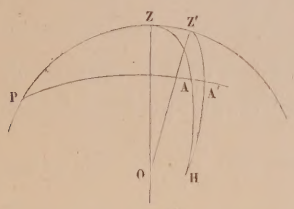
Supposant la colatitude donnée, on a calculé avec cet angle la distance polaire dans l'hypothèse du passage au premier vertical; c'est donc en réalité la distance polaire PA que le calcul a donnée. Si P est petit (seul cas auquel conviennent les formules de réduction à établir), on a, à une petite quantité du deuxième ordre près, $AA' = ZZ' = c$, et la correction du δ obtenu, ou de $\delta - \lambda$, est $+ c$.

La simple addition de la collimation réduit donc l'observation à ce qu'elle eût été avec un instrument sans collimation.

Elle s'appliquera après le calcul fait.

2° *Inclinaison.* — La lunette décrit un plan Z'A'H (*fig.* 54)

Fig. 54.



qui coupe le premier vertical ZAH à l'horizon; l'angle des deux plans est mesuré par ZOZ' ou par l'arc $ZZ' = b$.

La vraie distance polaire est PA', et AA' est la correction à appliquer au PA calculé.

Le petit triangle AA'H nous donne

$$\frac{\sin \widehat{AA'}}{\sin H} = \frac{\sin \widehat{A'H}}{\sin A},$$

A'H est la hauteur de l'astre, voisine de 90°; H est égal à l'inclinaison b; A est l'angle parallactique ou de position, très voisin d'un droit : par suite

$$\sin \widehat{AA'} = \frac{\sin b \cos \zeta}{\sin A} \qquad \text{ou} \qquad \widehat{AA'} = b.$$

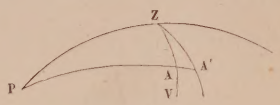
La correction est donc égale à l'inclinaison directement déterminée, aux termes du deuxième ordre près.

3° *Azimut.* — Enfin un raisonnement analogue montre que la correction résultant de l'azimut est AA′ (*fig.* 55), si AZA′ $= a$ est l'erreur d'azimut de l'instrument, et ZAV le premier vertical; que l'angle en A est sensiblement droit, et que par suite le triangle ZAA′ donne avec le même genre d'approximation

$$\operatorname{tang} AA' = \operatorname{tang} a \sin\zeta \qquad \text{ou} \qquad AA' = a \sin\zeta.$$

Ici, comme dans la lunette méridienne, l'influence de l'erreur

Fig. 55.



d'orientation est très faible dans le voisinage du zénith.

On a donc en définitive, puisque $\delta - \lambda$ lui-même est petit,

$$(19) \qquad \delta - \lambda = \sin\delta \cos\lambda \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin 1''} + a \sin\zeta + b + c;$$

dans c est comprise la distance du fil observé au fil sans collimation.

Admettons, pour fixer les idées, qu'on choisisse pour position directe de l'instrument celle pour laquelle le cercle divisé est au Nord. Soient a l'azimut de l'axe compté positivement du Nord vers l'Est ou du Sud vers l'Ouest; b l'inclinaison de cet axe sur l'horizon, du côté du Nord, + au-dessus, — au-dessous de l'horizon. Enfin soit $90° + c$ l'angle de la ligne de collimation avec la partie de l'axe de rotation qui se dirige du côté du cercle divisé : soit ε la correction à apporter à la valeur calculée de $\delta - \lambda$, pour avoir la vraie, c'est-à-dire

$$\varepsilon = \delta - \lambda - \cos\lambda \sin\delta \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin 1''},$$

on a les formules suivantes :

Positions directes...	Étoile ouest..	$\varepsilon = c + b - a \sin\zeta,$
	Étoile est....	$\varepsilon = c + b + a \sin\zeta.$
Positions inverses...	Étoile ouest..	$\varepsilon = -c + b - a \sin\zeta,$
	Étoile est....	$\varepsilon = -c + b + a \sin\zeta.$

Cette méthode n'est guère applicable quand la colatitude se rapproche de 90° : le nombre des étoiles qui passent au premier vertical diminue à mesure qu'on s'avance vers l'équateur.

La précision avec laquelle on évalue l'instant du passage décroît à mesure qu'on se rapproche du zénith; mais en même temps l'erreur sur δ résultant d'une erreur sur P diminue aussi.

En fait, ce sont les étoiles voisines du zénith qui se prêtent le mieux à l'application de la méthode, et la précision décroît à mesure qu'on descend vers l'horizon. Une étoile qui passerait au premier vertical à l'horizon même ne pourrait pas donner la latitude : une telle étoile serait en même temps équatoriale, et à quelque latitude qu'on se trouve, la durée 2P qu'elle fournirait serait de 12 heures.

Il y a enfin un avantage très sérieux à restreindre l'angle P, c'est-à-dire à opérer près du zénith; outre que l'erreur résultant du défaut d'orientation est ainsi réduite, on a moins à craindre les anomalies de marche du chronomètre pendant un court espace de temps.

100. — Colatitude par les digressions des circompolaires.

A mesure qu'on se rapproche de l'équateur, le nombre des étoiles qui culminent entre le pôle et le premier vertical, autrement dit des circompolaires, augmente. Ces étoiles, caractérisées par la condition $\delta < \lambda$ ont un maximum d'azimut, qu'on appelle *digression;* on peut le voir par des considérations géométriques en remarquant que l'azimut d'une étoile dont la distance polaire est plus grande que la colatitude prend toutes les valeurs entre 0° et 360°, tandis que les étoiles qui culminent entre le zénith et le pôle sont toujours situées dans l'intérieur de l'angle formé par deux grands cercles tangents à leur parallèle diurne. Il est aisé de tirer ces conséquences des formules de la Trigonométrie.

Si l'on différentie la formule

$$\sin\lambda \cot\delta = -\cot A \sin P + \cos P \cos\lambda,$$

par rapport à P et A, et qu'on égale à zéro la dérivée $\frac{dA}{dP}$, on trouve en dehors de la relation évidente $A = 0$, se rapportant au pôle, même

$$\cos A \cos P + \cos\lambda \sin P \sin A = 0.$$

Or ϖ étant l'angle à l'astre, on a la relation connue

$$\cos\varpi = \cos A \cos P + \cos\lambda \sin P \sin A,$$

qui, comparée avec la précédente, nous montre que la condition du maximum est $\cos\varpi = 0$, c'est-à-dire l'angle à l'étoile droit. Si donc le triangle de position est rectangle à l'astre, on a aussi la relation

$$\sin\delta = \sin\lambda \sin A,$$

d'où l'on tire

$$\sin A = \frac{\sin\delta}{\sin\lambda}. \tag{20}$$

Pour que $\sin A$ soit inférieur à l'unité, c'est-à-dire pour que la solution soit possible et que A ait un maximum, il faut et il suffit qu'on ait $\delta < \lambda$ ou $\delta > 180^\circ - \lambda$, ce qui comprend les circompolaires des deux pôles; mais il est clair que seules les circompolaires du pôle élevé atteignent ce maximum au-dessus de l'horizon. Dans ce sens du mot, la zone qui comprend les circompolaires est nulle au pôle même, et embrasse tout le ciel à l'équateur. C'est justement l'inverse de ce qui a lieu quand on définit les circompolaires comme comprises entre le pôle et le cercle de perpétuelle apparition.

A l'instant du maximum, le mouvement en azimut est nul; si donc on observe l'azimut d'une étoile au moment où son mouvement a lieu dans la direction du fil vertical du théodolite, on a l'azimut de la digression : et, en se rappelant qu'à cet instant le triangle de position est rectangle à l'astre, la colatitude se calculera par la formule

$$\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin A}.$$

On voit que λ étant donné par son sinus, le procédé est d'autant plus exact que la colatitude est plus petite. Du reste, en différentiant cette formule en A et λ, on trouve

$$d\lambda = -\operatorname{tang}\lambda \cot A \, dA.$$

Une erreur sur l'azimut donnera donc sur λ une erreur d'autant plus grande

1° que λ est plus grand, ce qu'on vient de voir;

2° que A est plus petit.

Les meilleures étoiles sont ainsi celles qui passent au méridien le plus près possible du zénith. Au zénith même, $A = 90^\circ$ et l'exactitude est parfaite, car $\cot A = 0$. Ce cas est limite entre les digressions et les passages au premier vertical.

L'azimut absolu de la digression pourrait se calculer en observant ensuite une circompolaire. Il est plus exact d'observer soit les deux digressions d'une même étoile, soit les digressions de deux étoiles, l'une à l'Est, l'autre à l'Ouest. Dans les deux cas, il suffit d'un cercle azimutal, et l'on a pas besoin de connaître l'heure : enfin les erreurs de réfraction sont sans influence.

Si l'axe vertical est bien rectifié, les erreurs en azimut résultant de l'inclinaison de l'axe horizontal et de la collimation sont égales pour les observations des deux digressions d'une même étoile, puisque les deux correspondent à des distances zénithales égales.

Si donc on fait la différence des deux lectures azimutales L et L′, elle donnera $2A$, et

$$A = \frac{L' - L}{2}.$$

Si l'intervalle de temps entre les deux digressions est trop grand, on peut craindre que le changement des circonstances atmosphériques ne fasse manquer la deuxième observation. Dans ce cas, on choisit une étoile ayant à peu près même distance polaire, afin d'éliminer encore la majeure partie des erreurs instrumentales, et l'on observe sa digression du côté opposé du méridien. On mesure alors la somme de deux azimuts *pris en valeur absolue* des deux côtés du méridien. Pour en déduire les deux azimuts A et A′, on a les relations

$$\sin\delta = \sin\lambda \sin A,$$

$$\sin\delta' = \sin\lambda \sin A',$$

d'où

$$\frac{\sin A}{\sin A'} = \frac{\sin\delta}{\sin\delta'}.$$

Si l'on considère un triangle fictif dans lequel δ et δ' seraient deux côtés, A et A′ seront respectivement les côtés opposés. On a alors par les analogies de Néper

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A - A') = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A + A').$$

$A + A'$ est la différence des deux lectures instrumentales; on calcule $\frac{1}{2}(A - A')$, on trouve donc A et A′ qu'on substitue dans les deux formules qui donnent $\sin\delta$ et $\sin\delta'$, et l'on calculera ainsi deux valeurs de λ qui doivent être égales.

101. — Réduction à l'azimut de la digression.

Cette méthode, analogue à celle de l'observation de la latitude par une hauteur méridienne unique, a l'inconvénient de ne pas se prêter à des pointés multiples. Si l'on disposait d'un instrument répétiteur, on aurait avantage à multiplier les mesures. On y arriverait en répétant plusieurs fois, *aux environs de la digression,* l'angle entre l'astre choisi et un astre à mouvement lent, tel que la Polaire. Il faudrait connaître alors approximativement l'heure sidérale, pour calculer les azimuts de ce dernier astre et les réductions à la digression. Avec un instrument réitérateur, on peut de même multiplier les pointés. Il suffit, dans les deux cas, de pouvoir réduire l'azimut observé aux environs de la digression à l'azimut de la digression même.

Une formule analogue à celle des circonméridiennes nous permettra d'arriver à ce but. Nous allons la donner en nous bornant aux corrections du deuxième ordre par rapport à la différence entre l'angle horaire de la digression et celui de l'observation. Il est facile de voir d'abord que la correction est au plus de l'ordre du carré de cette différence. Soit en effet P l'angle horaire de la digression donné par la relation

$$\cot A_0 = \operatorname{tang}\psi \cos\lambda.$$

Représentons l'angle horaire par $P = \psi + p$. On a la relation

$$\sin\lambda \cot\delta = \cot A \sin(\psi + p) + \cos(\psi + p)\cos\lambda.$$

L'azimut A est donc fonction de p, et peut se développer en une série de la forme

$$A = A_0 + \left(\frac{dA}{dp}\right)_0 p + \left(\frac{d^2A}{dp^2}\right)_0 \frac{p^2}{2} + \dots$$

dans laquelle A_0 est l'azimut de la digression, $\left(\frac{dA}{dp}\right)_0$ la valeur de sa dérivée pour $p = 0$.

Différentions la relation trigonométrique ci-dessus et calculons

$$\frac{dA}{dp} = \frac{\cot A \cos(\psi + p) - \cos\lambda \sin(\psi + p)}{\sin(\psi + p)} \sin^2 A,$$

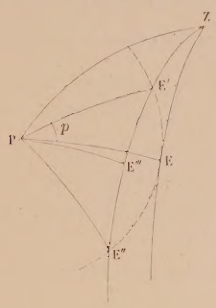
on aura ainsi

$$\left(\frac{dA}{dp}\right)_0 = \frac{\cot A_0 \cos\psi - \cos\lambda \sin\psi}{\sin\psi} \sin^2 A_0,$$

quantité qui s'annule en vertu de la relation $\cot A_0 = \operatorname{tang}\psi \cos\lambda$. La valeur de A ne contient donc pas de terme du premier degré en p.

On pourrait continuer et calculer $\left(\frac{d^2A}{dp^2}\right)_0$, mais le calcul serait long et fastidieux. Des considérations géométriques très simples suffiront. Soit E′EE″ (*fig.* 56) le parallèle diurne de l'étoile. Admettons qu'elle ait été observée en E′. La correction a de

Fig. 56.



l'azimut A est l'angle E′ZE. Menons le grand cercle PE‴ normal à ZE′E″. Puisque l'angle a est du deuxième ordre au plus en p, il en est de même de l'angle E‴PE, nous pourrons donc remplacer dans l'ordre d'approximation adopté les angles $E'''PE' = E'''PE''$ par p. Posons maintenant $PE'' = \delta - d$, d est du même ordre que a, et nous pourrons négliger leurs carrés.

Nous avons dans le triangle PE‴E′, rectangle en E‴,

$$\operatorname{tang}(\delta - d) = \operatorname{tang}\delta \cos p.$$

Soit $\cos p = 1 - 2\sin^2\frac{p}{2} = 1 - 2x$; remplaçons $\operatorname{tang}(\delta - d)$ par sa valeur $\frac{\operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang} d}{1 + \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang} d}$, et résolvons par rapport à tang d, il vient

$$\operatorname{tang} d = \frac{x \sin 2\delta}{1 - 2x\sin^2\delta} = \frac{2x \sin\delta\cos\delta}{1 - 2x\sin\delta\sin\delta},$$

expression qu'on sait développer par la formule des parallaxes et qui donne

$$d = x\sin 2\delta + 2x^2\sin^2\delta\sin 2\delta + \ldots.$$

Maintenant nous avons dans les triangles rectangles considérés

$$\sin A_0 \sin\lambda = \sin\delta,$$
$$\sin(A_0 - a)\sin\lambda = \sin(\delta - d).$$

Développons cette dernière relation, faisons les sinus égaux aux arcs et les cosinus à l'unité, et retranchons de la première, on a

$$a\sin\lambda\cos A_0 = d\cos\delta$$

et substituant à d sa valeur réduite au premier terme, il viendra

$$a = \frac{x\sin 2\delta\cos\delta}{\sin\lambda\cos A_0}.$$

On peut prendre pour valeur approchée de A_0 la valeur donnée par l'observation, c'est-à-dire $A_0 - a$.

Pour calculer p, il faut connaître ψ. On le calculera par la formule

$$\cot\psi = \operatorname{tang} A_0\cos\lambda.$$

On est supposé connaître l'heure, par suite l'angle horaire P de l'astre : on calcule

$$p = P - \psi,$$

et l'on a enfin la correction a par l'une ou l'autre des formules

$$a = \frac{\sin 2\delta\cos\delta}{\sin\lambda\cos A}\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}p}{\sin 1''} \qquad (22)$$

ou

$$a = \frac{\sin 2\delta\cos\delta}{\sin\lambda\cos A}\,\frac{p^2}{4\sin 1''}.$$

Le premier facteur $\frac{\sin 2\delta \cos\delta}{\sin\lambda \cos A}$ est égal à $\frac{\sin 2\delta}{\sin\lambda \sin P}$, à cause de $\cos A = \sin P \cos\delta$.

On peut donc vérifier par là le calcul.

Le signe de a ne saurait être douteux : il faut appliquer la correction de manière à éloigner l'astre du méridien.

Les deux méthodes qui viennent d'être développées sont les meilleures parmi celles qui déduisent la latitude d'observations d'azimut ; mais, en général, la connaissance de l'azimut et de l'heure permet de trouver la latitude. On peut même déterminer simultanément ces trois éléments à l'aide de la méthode des *hauteurs correspondantes*. Mais l'application de ce dernier procédé à la recherche de la colatitude exige la connaissance de la distance zénithale absolue ; si cette condition est remplie, il sera toujours préférable de recourir aux méthodes plus précises que nous avons développées. Le grand avantage des méthodes qui déduisent la colatitude d'observations azimutales est d'éliminer presque complètement les erreurs qui proviennent des réfractions et des flexions : l'observation du passage au premier vertical donne des résultats dégagés des erreurs de division.

102. — Méthode Talcott.

Nous indiquons encore le procédé Talcott pour déterminer la latitude sans cercle divisé, soit au moyen du *zenith-telescope* des Américains, soit à l'aide d'un cercle méridien dont le cercle de calage ne donne qu'une approximation grossière. Il faut pour cela que la lunette soit munie d'un micromètre à fil mobile, dont le pas de vis aura une valeur connue. Supposons qu'on se serve du dernier instrument cité. Il conviendra dans ce cas, pour augmenter la précision du nivellement, de remplacer le petit niveau parallèle au cercle par le grand niveau, plus sensible, si l'on a les moyens et l'habileté nécessaires pour faire cette substitution. On fait tourner le micromètre de 90°, de manière à rendre horizontaux les fils horaires et le fil mobile qui leur est parallèle. On choisit alors deux étoiles qui culminent à peu près à la même distance de part et d'autre du zénith. Soit λ la colatitude, dont on doit avoir une valeur approchée,

les étoiles qui satisfont à cette condition satisfont aux relations

$$\zeta = \delta - \lambda, \qquad \zeta' = \lambda - \delta' \qquad \text{ou} \qquad \frac{\delta + \delta'}{2} = \lambda$$

exactement ou à peu près.

On observe la première étoile cercle à l'Ouest et on la pointe avec le fil mobile. Puis, sans toucher au *calage* de la lunette, on retourne celle-ci sur ses tourillons, la deuxième étoile passera dans le champ de l'instrument ainsi placé, et on la pointera également avec le fil mobile. On aura soin d'amener le niveau entre les mêmes repères, ou du moins on fera les lectures D et I du niveau dans les deux positions. La différence des deux lectures du micromètre M — M′ est égale à la différence des distances zénithales des deux étoiles

$$\zeta - \zeta' = \delta + \delta' - 2\lambda;$$

par suite

$$\lambda = \frac{\delta + \delta'}{2} \pm \frac{M - M'}{2} \pm \frac{D - I}{2}.$$

M — M′ et D — I sont réduits en arc; le signe de la correction dépend des positions de la vis et du niveau, et se déterminera sans difficulté. On tiendra encore compte de la *différence* des réfractions, qui est toujours une quantité minime.

La condition nécessaire au succès de la méthode étant la constance du calage de la lunette, on ne peut pas employer le bain de mercure pour la détermination du nadir.

103. — Colatitude par le temps que le diamètre du Soleil met à disparaître à l'horizon.

Considérons, à l'instant où le centre du Soleil se trouve à l'horizon, le plan vertical tangent en ce point à la sphère céleste. En raison de la petitesse du diamètre du Soleil, on peut admettre que le mouvement de l'astre se fait dans ce plan. La portion de parallèle diurne décrite par le centre est perpendiculaire au cercle de déclinaison : par suite, l'angle que fait la trajectoire du Soleil avec la trace de l'horizon est égal à celui que fait son vertical avec le cercle de déclinaison, c'est-à-dire à l'angle à l'astre du triangle de position.

La relation

$$\cos\lambda = \cos\delta\cos\zeta + \sin\delta\sin\zeta\cos\varpi \tag{23}$$

se réduit alors pour $\zeta = 90^\circ$ à

$$\cos\lambda = \sin\delta\cos\varpi. \tag{24}$$

Soient P et P′ les angles horaires du centre du Soleil qui correspondent aux instants de contact des deux bords, l'arc de trajectoire parcouru par le centre pendant le temps P′ — P est

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(P' - P)}{\sin\delta};$$

cet espace projeté sur la trace du vertical est égal au diamètre D du Soleil, ou mieux à $2\sin\frac{1}{2}D$; donc, d'après ce qui a été dit,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(P' - P)}{\sin\delta}\sin\varpi = \sin\tfrac{1}{2}D. \tag{25}$$

Si donc on a observé les heures des deux contacts, on connaît P′ — P, et l'on peut calculer $\sin\varpi$: l'angle ϖ étant connu, la colatitude se déduit de la formule (24).

Si l'observation est faite à l'horizon de la mer, on n'a pas exactement $\zeta = 90^\circ$: la réfraction, la dépression et la parallaxe interviennent et l'on a en réalité $\zeta = 90^\circ$ + réfraction + dépression — parallaxe. Soit plus généralement $\zeta = 90^\circ + y$, y étant une petite quantité. Dans l'ordre d'approximation que comporte cette méthode, et puisque l'on a établi les formules en projetant sur un plan, c'est-à-dire en négligeant les termes du deuxième ordre en P — P′ et D, la valeur de ϖ ainsi obtenue est celle qui correspond au triangle de position qui renferme $\zeta = 90^\circ + y$. Mais pour le calcul de λ par la formule (24), on suppose $\zeta = 90^\circ$. Il y a donc à corriger la valeur de ϖ qu'on a trouvée par la formule (25).

Il suffit de considérer les variations comme représentées par les différentielles : différentions donc la formule (23) en y faisant varier ζ et ϖ, remplaçons $d\zeta$ par y, nous aurons

$$d\varpi = -y\,\frac{\cos\delta\sin\zeta - \sin\delta\cos\zeta\cos\varpi}{\sin\delta\sin\zeta\sin\varpi}.$$

Faisons $\sin\zeta = 1$, remarquons que le numérateur est égal à $\sin\lambda$

$\cos A$, et enfin que

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\delta} = \frac{\sin\varpi}{\sin A};$$

il viendra

$$d\varpi = -y \cot A.$$

Pour $\cot A$, on peut prendre en valeur absolue la tangente de l'amplitude occase. Ayant calculé ϖ par la formule (25), on introduira $\varpi - d\varpi$ dans la formule (24).

Le signe de $d\varpi$ est déterminé par ceux de $\cot A$ et de y : cette dernière quantité est positive au-dessous de l'horizon, négative au-dessus.

Il est clair que l'observation en question peut se faire aussi avec une lunette munie d'un fil horizontal, pourvu qu'on soit à même de vérifier l'horizontalité de ce fil et celle de l'axe optique.

ϖ étant calculé par son sinus, les conditions les plus favorables correspondent à de petites valeurs de cet angle, qui est d'autant plus petit que $P - P'$ est plus grand.

D'autre part, λ est donné par son cosinus, il ne faut donc pas qu'il soit trop petit. En fait, c'est entre les tropiques et les pôles que la méthode est applicable : plus près de l'équateur, ϖ se trouve mal déterminé.

On remarquera que l'incertitude de la réfraction près de l'horizon n'influe que sur le terme correctif : en effet, la réfraction est la même pour les deux observations.

Si l'on connaît l'angle horaire du Soleil, on peut appliquer une autre formule, qui est rigoureuse. Les distances zénithales du centre aux instants des deux observations étant

$$90^\circ + y - \tfrac{1}{2}D \qquad \text{et} \qquad 90^\circ + y + \tfrac{1}{2}D,$$

en retranchant l'une de l'autre les deux valeurs de $\cos\zeta$ données par la formule fondamentale, on aura

$$\sin\tfrac{1}{2}D\cos x = \sin\delta\sin\lambda\sin\tfrac{1}{2}(P + P')\sin\tfrac{1}{2}(P' - P),$$

et il suffit d'une valeur grossièrement approchée de x pour trouver λ, à condition d'avoir $\frac{1}{2}(P + P')$.

Or il peut se faire qu'en voyage on arrive en un point trop tard pour déterminer la latitude par des observations méridiennes, mais assez tôt pour observer l'heure à l'instant favorable : dans ce cas,

et en procédant au besoin par approximations successives, on peut trouver à la fois l'heure, l'azimut et la colatitude.

104. — Colatitude par le temps que met le Soleil à passer par un vertical.

La méthode qui précède ne donne de bons résultats que sous les hautes latitudes. Près de l'équateur, la durée du passage varie peu avec la colatitude, et une petite erreur sur l'évaluation de l'intervalle en occasionne une beaucoup plus considérable sur le résultat. Mais en remarquant qu'à l'équateur la trajectoire apparente des astres à une certaine distance du méridien est très près d'être verticale, on est amené à observer le temps que met le Soleil à traverser un vertical éloigné du méridien, en mettant à profit la lenteur de son mouvement en azimut.

On installe une lunette mobile autour d'un axe horizontal, en apportant un grand soin au nivellement de cet axe et à la rectification de la verticalité du fil. Pour réduire les erreurs dues à ce que cette dernière rectification est imparfaite, on observe les contacts avec le fil vertical à son intersection avec le fil horizontal.

On note au chronomètre l'instant t du contact du bord qui mord, puis l'heure t' du contact du bord qui démord. Entre ces deux observations, on peut prendre des distances zénithales avec un sextant, de manière à interpoler la distance zénithale ζ du centre du Soleil pour l'instant moyen $\frac{1}{2}(t+t')$ du chronomètre. Soient σ et σ' (*fig* 57) les positions du centre aux heures t et t', $\frac{1}{2}$D le demi-diamètre tabulaire ; les contacts ont été observés aux points b et b' du disque, et l'angle $\sigma P\sigma' = t' - t = 2p$ est connu. Menons par σ et σ' un arc de grand cercle ; on voit aisément que les triangles $\sigma b S$ et $\sigma' b' S$, rectangles en b et b', et dans lesquels $b\sigma = b'\sigma' = \frac{1}{2}D$ sont égaux, et que S est le milieu de $\sigma\sigma'$ et de bb'. On peut admettre sans erreur sensible que les points b et b' ont les mêmes distances zénithales que σ et σ', et que la distance zénithale de S en est la moyenne ζ. On peut aussi négliger la variation de la distance polaire pendant le petit intervalle $2p$.

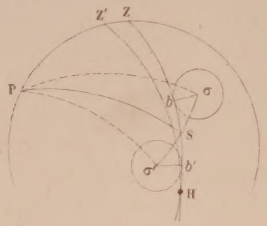
Cela posé, le triangle isocèle $\sigma P\sigma'$ est décomposé par PS en deux triangles égaux, rectangles en S. Ce point S n'est pas une

des positions du Soleil, n'étant pas sur le petit cercle que décrit l'astre, mais sur un grand cercle passant par σ et σ'. Les deux angles en P sont égaux entre eux et à p.

Les côtés $S\sigma = S\sigma' = x$ seront donnés par la formule des triangles rectangles

$$(a) \qquad \sin x = \sin\delta \sin p.$$

Fig. 57.



Le côté PS, que nous appellerons $\hat{\delta}_1$, diffère peu de $P\sigma' = \hat{\delta}$; il se calcule par

$$\operatorname{tang}\hat{\delta}_1 = \operatorname{tang}\hat{\delta}\cos p$$

ou, si l'on voulait, par le développement

$$\hat{\delta}_1 = \hat{\delta} - \frac{\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}p \sin 2\hat{\delta}}{\sin 1''} - \dots$$

Il est maintenant facile de trouver l'angle parallactique $\varpi = PSZ$.

Puisque $PS\sigma'$ est droit, ϖ est le complément de $\sigma' S b'$, et d'après la formule connue des triangles rectangles,

$$(b) \qquad \cos\varpi = \sin\sigma' S b' = \frac{\sin\tfrac{1}{2}D}{\sin x} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}D}{\sin\delta \sin p}.$$

Enfin le triangle PSZ nous donnera la colatitude par la formule

$$(c) \qquad \cos\lambda = \cos\delta_1 \cos\zeta + \sin\delta_1 \sin\zeta \cos\varpi,$$

dans laquelle tout le second membre est connu. Elle peut se calculer directement ou par les logarithmes d'addition. On peut aussi poser

$$\frac{\sin\delta_1 \sin\tfrac{1}{2}D}{\sin\delta \sin p} = m \sin\varphi, \qquad \cos\delta_1 = m\cos\varphi$$

et calculer l'angle φ par

$$(d) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{D}\sin\delta_1}{\sin p\cos\delta_1\sin\delta} = \frac{\cot p\sin\frac{1}{2}\mathrm{D}}{\cos\delta},$$

et λ par

$$(e) \qquad \cos\lambda = \frac{\cos\delta_1\cos(\varphi-\zeta)}{\cos\varphi} = \frac{\cos\delta\cos(\varphi-\zeta)}{\cos x\cos\varphi}.$$

Les formules (a), (d), (e) résolvent le problème. Elles donnent λ par son cosinus, et le déterminent par conséquent très bien sous les basses latitudes.

Pour examiner les conditions de précision, différentions (c) en y faisant varier λ, ζ et ϖ; on trouve, après une substitution évidente,

$$(f) \qquad d\lambda = -\cos\mathrm{A}\,d\zeta + \frac{\sin\delta\sin\zeta\sin\varpi}{\sin\lambda}\,d\varpi.$$

Pour évaluer $d\varpi$ en fonction de dp, différentions l'équation (b) en p et ϖ

$$d\varpi = \frac{dp}{\operatorname{tang}\varpi\operatorname{tang}p}$$

qui montre d'abord que ϖ est d'autant mieux déterminé qu'il est plus voisin de 90° et que p est plus grand. Cette relation substituée dans (f) donne

$$d\lambda = -\cos\mathrm{A}\,d\zeta + \frac{\sin\delta\sin\zeta\cos\varpi}{\sin\lambda\operatorname{tang}p}\,dp$$

et nous montre :

Que l'erreur sur la colatitude, provenant de celle qu'on a commise sur la distance zénithale, est nulle lorsqu'on observe dans le premier vertical;

Que, pour réduire au minimum l'erreur provenant de l'appréciation de l'intervalle $2p$, les conditions favorables sont :

λ voisin de 90°, c'est-à-dire que l'observation convient sous les basses latitudes;

ζ petit, condition qui se concilie avec la précédente aux époques où le Soleil culmine près du zénith;

ϖ voisin de 90° (digression) ou ayant sa valeur maximum (premier vertical);

p aussi grand que possible, c'est-à-dire que l'azimut du Soleil doit varier lentement; cette condition résulte des précédentes, A ou ϖ voisins de 90° en même temps que λ.

La connaissance de l'azimut peut remplacer théoriquement celle de la distance zénithale. On a alors

$$\sin\lambda = \sin\varpi \frac{\sin\delta_1}{\sin A};$$

mais si λ est voisin de 90°, son sinus le définit mal. Cela était à prévoir, car lorsque l'azimut varie lentement, il n'est pas propre à donner l'angle horaire ou la distance zénithale.

Si, au contraire, on connaissait l'heure (par exemple par la méthode des hauteurs correspondantes), on aurait

$$\cot\lambda \sin\delta_1 = \cot\varpi \sin P + \cos\delta_1 \cos P$$

et l'on calculerait directement, ou en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cot\varpi}{\cos\delta_1},$$

ce qui donnerait

$$\cot\lambda = \frac{\cos\delta_1 \cos(P-\varphi)}{\cos\varphi \sin\delta_1} = \frac{\cot\varpi \cos(P-\varphi)}{\sin\varphi \sin\delta}.$$

Dans ce dernier cas, les circonstances favorables sont les mêmes que pour l'emploi de la distance zénithale; on pourra donc trouver l'heure et la latitude sans cercle divisé vertical, à la seule condition de disposer d'une lunette qui puisse être calée et nivelée exactement.

Nous avons dit qu'il importe de rectifier avec le plus grand soin l'horizontalité de l'axe de rotation de la lunette employée. Si cet axe est incliné sur l'horizon, le plan dans lequel on observe les deux contacts n'est plus un vertical. La lunette pointée à l'horizon en H décrit un grand cercle qui coupe le méridien en Z', et c'est la distance PZ' que le calcul donne comme colatitude cherchée. Si nous désignons par y l'inclinaison de l'axe de rotation, par x la correction cherchée de la colatitude, on voit que

$$y = \widehat{Z'HZ} \qquad \text{et} \qquad x = Z'Z,$$

et comme $ZH = 90^0$, la formule des cotangentes donne pour le triangle Z′HZ

$$\cot x = \sin A \cot y, \qquad \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} y}{\sin A};$$

tant que x et y sont petits, avec $\sin A$ notablement différent de zéro, cela revient à

$$x = \frac{y}{\sin A}.$$

La correction de la colatitude est positive si le tourillon le plus bas est du côté du Nord, négative dans le cas contraire; $\sin A$ doit toujours être pris positivement, qu'on observe à l'Est ou à l'Ouest. Si N est la lecture du niveau, le zéro des divisions étant vers le Nord, S la lecture avec le zéro au Sud, les deux réduites en secondes, on a

$$y = \tfrac{1}{2}(N - S).$$

On voit que pour $\sin A = 0$ le résultat est illusoire; que de plus l'erreur de la colatitude est toujours plus grande que celle du niveau, sauf dans le premier vertical où les deux sont égales; nous sommes donc encore amenés à observer le plus près possible du premier vertical; l'observation dans le méridien ne peut rien donner, puisque la durée du passage méridien du demi-diamètre est indépendante de la colatitude. Il est inutile d'insister sur les analogies que cette méthode présente avec celle des passages d'étoiles au premier vertical : dans les deux cas, la colatitude se trouve par l'inclinaison de la trajectoire, mesurée par des observations de temps; mais cette dernière méthode est précisément très avantageuse dans les circonstances où celle des passages au premier vertical est d'une application laborieuse ou même impossible. La principale cause d'erreur tient à l'incertitude de la valeur du demi-diamètre tabulaire. Elle peut souvent être corrigée après coup. Il est nécessaire d'apporter beaucoup de soin à la mise au point exacte de la lunette et de choisir des verres colorés assez foncés pour supprimer l'irradiation.

Exemple. — Le 18 juin 1887, on a observé aux environs de Brest le passage des deux bords du Soleil au fil vertical d'un théodolite excentrique.

On a pris, avant et après, des hauteurs du Soleil au-dessus de l'horizon de la mer.

On trouve par des calculs inutiles à détailler

$$\delta = 66^\circ 34' 50'' \qquad \zeta = 59^\circ 50' \qquad \tfrac{1}{2}D = 15' 46'',44.$$

Heures des observations..... $4^h 37^m 32^s,8$
$4\ 40\ 52\ ,6$

$2p = 3^m 19^s,8 \quad p = 24' 58'',5$

(d)

log tang p.....	7,86124
log cos δ	9,59929
	7,46053
log sin $\frac{1}{2}$D.....	7,66167
log tang φ.....	0,20114

(a)

log sin p.....	7,86123
log sin δ.....	9,96266
log sin x.....	7,82389
$x = 0^\circ 22' 55''$	

(e)

$\varphi =$	$57^\circ 49'\ 4''$	.....	colog cos φ..... 0,27359
$\zeta =$	$59\ 50\ 0$	.....	colog cos x..... 0,00001
			log cos δ..... 9,59929
$\varphi - \zeta =$	$-2^\circ\ 0' 56''$	.....	log cos $(\varphi - \zeta)$ .. 9,99973
			log cos λ..... 9,87262

d'où

$$\lambda = 41^\circ 46' 20''.$$

CHAPITRE VII.

DÉTERMINATION DE L'HEURE.

L'angle horaire est nécessaire pour la plupart des déterminations de latitude : il intervient utilement dans celles d'azimut, enfin il est la base du calcul des longitudes.

Nous allons exposer les méthodes à l'aide desquelles on peut le déterminer et nous verrons comment on en déduit l'heure vraie, l'heure sidérale, l'heure temps moyen.

105. — Passages méridiens.

C'est le cas d'un angle horaire sensiblement nul. On observe un astre à la lunette méridienne, en notant les heures du passage à chaque fil vertical. Nous avons vu comment on déduit de cette observation l'état du chronomètre. Soit t' l'heure du passage corrigé, la relation

$$C = \alpha - t'$$

est générale, et donne la correction du chronomètre relative au temps sidéral. Pour avoir la correction d'un chronomètre temps moyen, on remplace α par l'heure en temps moyen du passage au méridien. Cette heure se calcule en retranchant de l'ascension droite le temps sidéral à midi moyen, ce qui donne un intervalle sidéral, et convertissant cette différence en temps moyen. Si l'on a observé le Soleil, cette quantité est toute calculée : c'est le temps moyen à midi vrai, et l'on a

$$C = E - t'.$$

Rappelons ici qu'un chronomètre quelconque peut être considéré indifféremment comme chronomètre temps moyen ou sidéral, seulement sa marche n'est pas la même dans les deux cas.

106. — Hauteurs correspondantes ou égales.

Le principe de cette méthode consiste, comme pour la précédente, à déterminer l'heure que marque le chronomètre lors du passage méridien d'un astre : mais, au lieu de l'observer dans le méridien, on l'observe dans deux positions symétriques par rapport à ce plan.

Supposons que la distance de l'astre au pôle ne varie pas. A deux hauteurs égales de l'astre observé des deux côtés du méridien, correspondent des angles horaires égaux et de signes contraires, dont la moyenne est zéro. L'observation peut se faire avec le théodolite, avec un instrument à réflexion, avec une lunette même dépourvue de tout cercle gradué, pourvu qu'elle puisse être fixée invariablement à un axe vertical, et qu'on puisse assurer la verticalité de cet axe ou mesurer ses écarts de cette position.

Soient h et h' les heures observées au chronomètre aux instants où les hauteurs de l'astre étaient égales, $\frac{1}{2}(h + h')$ est l'heure qu'il marquait à l'instant du passage méridien. On a donc, avec les notations ci-dessus où $\frac{1}{2}(h + h')$ remplace t',

$$C = \alpha - \tfrac{1}{2}(h + h') \text{ pour le temps sidéral,}$$

$$C = E - \tfrac{1}{2}(h + h') \text{ pour le temps moyen (Obs. du } \odot).$$

Si la déclinaison de l'astre varie, les angles horaires correspondant à une même hauteur ne sont plus égaux en valeur absolue.

Soient h l'heure au chronomètre lors de la première observation, h' lors de la seconde ; δ la distance polaire lors de la première observation, $\delta + d$ lors de la seconde ; — P l'angle horaire lors de la première observation, $P + p$ lors de la seconde ;

Soit m le retard diurne de la montre, exprimé en secondes de temps et $m' = \dfrac{m}{86\,400}$. L'heure qu'elle doit marquer à l'instant du passage méridien est, d'après la première observation,

$$h + P(1 - m'),$$

et, d'après la deuxième,

$$h' - (\mathrm{P} + p)(1 - m').$$

Ces deux valeurs doivent être égales, donc

$$h' - h = (2\mathrm{P} + p)(1 - m')$$

et

$$\frac{h + h'}{2} = \frac{p}{2}(1 - m').$$

Soit maintenant x la correction à ajouter à $\frac{1}{2}(h + h')$ pour avoir l'heure du passage méridien,

$$\tfrac{1}{2}(h + h') + x = h + \mathrm{P}(1 - m').$$

Éliminant P entre cette équation et la précédente, il vient

$$x = -\frac{p}{2}(1 - m').$$

Comme p et d sont toujours des petites quantités, on peut les calculer en les assimilant aux différentielles $d\mathrm{P}$ et $d\delta$; différentions la formule

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos\mathrm{P},$$

en y faisant varier δ et P, il viendra

$$(1) \qquad p = \frac{\cos\delta\sin\lambda\cos\mathrm{P} - \sin\delta\cos\lambda}{\sin\delta\sin\lambda\sin\mathrm{P}}\,d.$$

Le facteur de d peut se mettre sous la forme $-\dfrac{\cot\varpi}{\sin\delta}$ qui montre que lorsqu'on observe un astre circompolaire à sa digression, la correction x est nulle. C'est d'ailleurs une circonstance favorable à la précision de l'observation d'heure, puisqu'à cet instant le mouvement en hauteur est le plus rapide.

Comme on ne connaît généralement pas l'angle de position ϖ, on met de préférence la correction sous la forme

$$(2) \qquad p = d\left(\cot\delta\cot\mathrm{P} - \frac{\cot\lambda}{\sin\mathrm{P}}\right),$$

que l'on calcule avec une précision suffisante avec des logarithmes

à quatre décimales : la latitude est toujours connue avec l'approximation nécessaire; d étant exprimé en secondes d'arc, la valeur obtenue pour p doit être divisée par 15, pour avoir des secondes de temps. Si la marche est faible, on peut négliger le produit $\frac{p}{2} m'$ et prendre

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Si le premier passage a été observé dans l'Ouest du méridien, et le deuxième dans l'Est, la moyenne des heures correspond au passage inférieur au méridien : dans ce cas, la correction change de signe, en ayant soin de prendre toujours pour P l'angle horaire occidental, qu'il soit observé avant ou après.

La correction est appelée *équation des hauteurs correspondantes;* celle qu'on applique au passage inférieur du Soleil porte le nom de *correction du minuit*.

Le niveau de l'instrument peut varier entre les deux observations, et la réfraction peut avoir subi une altération par un changement de température et de pression : la distance zénithale n'est donc pas toujours constante pour les deux observations.

Dans ce cas encore, les variations sont assez petites pour qu'on puisse les traiter comme des différentielles.

Pour évaluer la variation de niveau, il est inutile d'effectuer le nivellement complet avec retournement du théodolite : il suffit d'observer le niveau dans la même position de l'instrument. Supposons, pour fixer les idées, que la graduation du cercle vertical et celle du niveau soient de même sens; soit L la lecture restée la même, soient n et n' les lectures du niveau, ζ et ζ' les distances zénithales, on voit facilement que, pour la position directe,

$$\zeta' - \zeta = \tfrac{1}{2}(n - n')$$

et pour la position inverse, $\frac{1}{2}(n' - n)$.

En différentiant la formule qui donne $\cos\zeta$ et remplaçant $d\zeta$ par $\zeta' - \zeta$, on aura

$$(3) \qquad dP = \frac{(\zeta' - \zeta)\sin\zeta}{\sin\delta \sin\lambda \sin P} = \frac{\zeta' - \zeta}{\sin\lambda \sin A}.$$

Le calcul de la correction exige que l'on connaisse la hauteur

absolue, mais une approximation grossière suffit. La connaissance de l'azimut dispense d'ailleurs d'avoir la distance zénithale.

Cette correction s'ajoute algébriquement à la précédente. La seconde forme de l'expression de dP montre que $\frac{d\zeta}{dP} = \sin\lambda \sin A$ est maximum pour $A = 90^\circ$, c'est-à-dire pour l'observation au premier vertical, ou d'une façon générale, quand la distance de l'astre au méridien est aussi voisine que possible d'un angle droit. C'est à ce moment qu'une petite erreur sur ζ a la moindre influence sur l'angle horaire et que le mouvement en hauteur dans un temps donné est le plus rapide, que par conséquent l'instant du passage par la hauteur donnée est déterminé avec le plus de précision. Cette remarque est générale; elle s'applique aux observations de distances zénithales simples aussi bien qu'aux hauteurs correspondantes. Les *circonstances favorables* à la détermination de l'heure par l'observation de distances zénithales se trouvent en calculant soit la hauteur, soit l'angle horaire correspondant à ce maximum de l'azimut.

Pour une circompolaire, l'angle parallactique ϖ est droit, et l'on a

$$(4) \qquad \cos\zeta = \frac{\cos\lambda}{\cos\delta}, \qquad \cos P = \cot\lambda \tan\delta.$$

Pour les autres étoiles, c'est l'azimut qui est égal à 90° et

$$(5) \qquad \cos\zeta = \frac{\cos\delta}{\cos\lambda}, \qquad \cos P = \cot\delta \tan\lambda.$$

On peut ainsi calculer pour l'instant favorable la distance zénithale et l'angle horaire. Si $\lambda < 90^\circ$ et $\delta > 90^\circ$, ou si $\lambda > 90^\circ$ et $\delta < 90^\circ$, le passage au premier vertical a lieu sous l'horizon. On doit alors observer les hauteurs les plus faibles, en évitant pourtant en général celles qui sont inférieures à 10°, à cause des anomalies de la réfraction.

L'application de la méthode des hauteurs correspondantes est sujette à des difficultés provenant de ce qu'un espace de temps assez long s'écoule entre les deux passages; le ciel peut se couvrir pendant l'intervalle, le chronomètre peut varier; enfin, il y a tout avantage à diminuer l'intervalle des deux observations, afin de gagner du temps. On réalise cette condition en observant des

étoiles qui culminent près du zénith, c'est-à-dire dont la distance polaire diffère peu de la colatitude du lieu. On peut aussi observer deux étoiles différentes. Mais alors la différence des distances polaires n'est plus en général une très petite quantité; on perd donc les avantages de simplicité du calcul. Malgré cela, il arrive souvent qu'on dispose d'instruments dont les pointés sont plus exacts que les lectures, les petits théodolites, par exemple, dont le limbe donne la minute, tandis que la lunette grossissant dix à quinze fois permet une approximation des pointés à 4″ ou 6″, et dont le niveau permet aussi d'apprécier les 10″. Dans ce cas, on a avantage à employer la méthode que nous allons donner, mais qui exige la connaissance de la colatitude.

107. — Hauteurs égales de deux étoiles.

On observe successivement deux étoiles à la même hauteur des deux côtés du méridien. Soient, pour la première étoile, h l'heure du chronomètre à l'instant où la distance zénithale est ζ, P l'angle horaire, α l'ascension droite, δ la distance polaire, S l'heure sidérale. Les mêmes lettres accentuées se rapporteront à la deuxième étoile, sauf ζ qui reste le même.

On a

$$S = P + \alpha, \qquad S' = P' + \alpha'.$$

Soient m le retard diurne du chronomètre et $m' = \frac{m}{86\,400}$. On a

$$\frac{h' - h}{1 - m'} = S' - S;$$

(si c'est le retard sur le temps moyen, il faut convertir l'intervalle trouvé en temps sidéral); on voit que

$$P' - P = \frac{h' - h}{1 - m'} - (\alpha' - \alpha)$$

est une quantité connue, que nous désignerons par 2φ.

Si donc on pose

$$P' = \psi + \varphi, \qquad P = \psi - \varphi, \tag{6}$$

il suffira de calculer ψ pour trouver P et P′, ce qui résoudra le problème.

Nous avons les relations

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos(\psi - \varphi),$$
$$\cos\zeta = \cos\delta'\cos\lambda + \sin\delta'\sin\lambda\cos(\psi + \varphi).$$

Développons $\cos(\psi - \varphi)$ et $\cos(\psi + \varphi)$ et retranchons la deuxième équation de la première, il vient

$$(7)\quad 0 = \cos\lambda(\cos\delta - \cos\delta') + \sin\lambda[\cos\psi\cos\varphi(\sin\delta - \sin\delta') + \sin\psi\sin\varphi(\sin\delta + \sin\delta')].$$

Posons maintenant

$$(8)\quad \cos\varphi(\sin\delta - \sin\delta') = a\sin x.$$
$$(9)\quad \sin\varphi(\sin\delta + \sin\delta') = a\cos x.$$

d'où l'on tire

$$(10)\quad \operatorname{tang} x = \cot\varphi\,\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta - \delta')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta + \delta')}$$

et

$$(11)\quad a = \frac{\cos\varphi(\sin\delta - \sin\delta')}{\sin x} = \frac{\sin\varphi(\sin\delta + \sin\delta')}{\cos x}.$$

L'équation (7) donne, en y substituant les valeurs (8) et (9),

$$\sin(\psi + x) = -\cot\lambda\,\frac{\cos\delta - \cos\delta'}{a}$$

et par substitution à a des valeurs (11)

$$(12)\quad \sin(\psi + x) = \frac{\cot\lambda\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos x}{\sin\varphi} = \frac{\cot\lambda\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta + \delta')\sin x}{\cos\varphi}.$$

Ayant calculé φ, on calcule x par l'équation (10), $(\psi + x)$ par (12) avec vérification : on connaîtra ainsi ψ qui, substitué dans (6), fera connaître les inconnues P et P′.

$\psi + x$ est déterminé par son sinus, mais il n'y a pas d'incertitude : des deux valeurs supplémentaires entre elles de $\psi + x$ on choisira celle qui donne des valeurs de P et P′ satisfaisant à la condition $P' - P = 2\varphi$.

Cette méthode exige la connaissance de la colatitude. On ne voit donc pas *a priori* l'avantage qu'elle peut avoir sur le calcul de l'angle horaire par la distance zénithale simple. Mais dans la pratique on connaît généralement λ avec une précision suffisante,

surtout si l'on se place dans les conditions favorables. Le mérite de la méthode est alors de ne pas exiger de cercle gradué exactement; on peut même l'appliquer sans cercle vertical : la précision de la détermination de l'angle horaire ne dépend que de celle du niveau et de la lunette. Les angles $\psi + x$ et x seront déterminés avec d'autant plus de certitude que $\tan x$ et $\sin(\psi + x)$ seront plus petits; les conditions les plus favorables sont $\delta - \delta'$ très petit et φ voisin d'un angle droit. Le maximum d'exactitude se trouverait pour deux étoiles équatoriales dans le premier vertical de part et d'autre du méridien : alors x et ψ seraient égaux à 0° et 180°, la connaissance de la colatitude serait inutile.

On tiendra compte du changement du niveau dans l'intervalle des observations. Pour cela, on cherchera la correction que ce changement apporte à la première distance zénithale pour en déduire la deuxième, et une fois le calcul fait, on applique au premier angle horaire la correction correspondant à ce changement, calculée au moyen de la formule (3).

Calcul d'heure par les hauteurs égales de deux étoiles.

Le 13 décembre 1877, à Poulo-Condore, on a observé le passage à la même hauteur d'Aldébaran à l'Est, de Vénus à l'Ouest. L'observation a été faite avec un compteur temps moyen. La lecture du niveau était la même aux deux observations. La colatitude du lieu est 18°19'. La marche du compteur est $m = 3^s,0$ retard diurne. Nous écrivons à la suite des heures d'observation les données extraites des éphémérides.

	h m s	° ′ ″	h m
Aldébaran.....	$t = 10.57.\ 6,6$	$\delta = 73.44.\ 5$	$\alpha = 4.28.5$
Vénus.....	$t' = 11.29.54,8$	$\delta' = 110.\ 9.\ 2$	$\alpha' = 20.47.5$
Différence.....	32.48,2	$\frac{1}{2}(\delta - \delta') = -18.12.28$	$\alpha' - \alpha = 16.18.5$
Correction pour la marche.	+ 0,07	$\frac{1}{2}(\delta + \delta') = +91.56.33$	$h' - h = 32.5$
Réduction en temps sidéral.	+ 5,40		$2\varphi = -15.46.$
Intervalle sidéral $h' - h =$	+ 32.53,67		$\varphi = -118°15'$

Calcul de x.

$\cot\varphi$	9,730278 (+)	$\cot\lambda$.....	9,183907 (+)
$\tan\frac{1}{2}(\delta - \delta')$	9,517108 (−)	$\tan\frac{1}{2}(\delta - \delta')$.	9,517108 (−)
$\cot\frac{1}{2}(\delta + \delta')$.	8,530405 (−)	$\sin x$.....	9,999992 (+)
$\tan x$	7,777791 (+)	colog sin φ ...	0,055088 (−)
$x = +0°20'36'',7$		$\sin(\psi + x)$..	8,756095 (+)

Calcul de $(\psi + x)$.

	9,183907
$\tan\frac{1}{2}(\delta + \delta')$	1,479595
cos x.....	7,777783
colog cos φ,.	0,324820
	8,756095

On a donc

$$\begin{aligned} \psi + x &= 176^\circ 43' 50'',5 \\ x &= 20\ 36\ ,5 \\ \psi &= 176\ 23\ 14 \\ \varphi &= -118\ 15\ 9 \\ \hline \psi - \varphi &= 294^\circ 38' 23'' = 19^h 38^m 33^s,5 \\ \psi + \varphi &= 58\ 8\ 5 = 3\ 52\ 32\ ,3 \end{aligned}$$

108. — Distances zénithales simples.

On peut déterminer la hauteur d'un astre à l'horizon de la mer et la corriger de la dépression, ou à l'horizon artificiel, qui donne le double de la hauteur. Avec un théodolite on peut encore trouver la distance zénithale simple, en observant le bain de mercure au nadir. On peut enfin, si l'observation est faite assez rapidement, prendre la distance zénithale double par l'observation croisée, et admettre que la moitié correspond à la moyenne des heures. Après avoir corrigé la distance zénithale de réfraction, parallaxe et, s'il y a lieu, demi-diamètre, on calcule la distance polaire et l'ascension droite pour l'instant de l'observation.

L'angle horaire se déduira de la formule

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\lambda\sin\delta\cos P$$

qui donne

$$\cos P = \frac{\cos\zeta - \cos\delta\cos\lambda}{\sin\lambda\sin\delta} \tag{13}$$

qui se calcule aisément au moyen des logarithmes d'addition et de soustraction. Cette formule est surtout avantageuse quand on doit réduire plusieurs séries d'observations du même astre. Les logarithmes de $\sin\lambda\sin\delta$ et de $\cos\delta\cos\lambda$ sont alors trouvés une fois pour toutes, et les opérations marchent rapidement.

Nous répéterons à ce propos une remarque déjà faite, à laquelle nous attachons beaucoup d'importance. On a proposé plusieurs méthodes pour calculer en bloc une série d'un certain nombre de distances zénithales, en cherchant la correction que l'angle horaire trouvé doit subir pour être égal à la moyenne des angles horaires qui répondent aux diverses observations. Ces méthodes abrègent incontestablement les calculs ; mais elles ont le tort grave de ne

pas donner de vérification, et nous ne saurions en conseiller l'emploi. Les observations qu'on aura faites doivent être groupées de telle sorte que pour chaque groupe on puisse considérer la variation de l'angle horaire comme proportionnelle à celle de la distance zénithale : la moyenne des distances zénithales de chaque groupe sera alors considérée comme correspondant à la moyenne des heures du chronomètre, et chaque groupe étant calculé à part, on calculera autant d'états absolus qu'on a de groupes. Le degré de concordance des résultats fournit la vérification nécessaire.

P sera d'autant mieux déterminé par son cosinus qu'il sera plus voisin de 6^h ou 18^h ; il l'est encore bien suffisamment pour 3^h et 21^h.

Si l'on ne dispose pas de Tables de logarithmes d'addition, il est plus simple et plus élégant de prendre les formules

$$\sin^2\tfrac{1}{2}P = \frac{\sin(S-\lambda)\sin(S-\delta)}{\sin\delta\sin\lambda}, \tag{14}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}P = \frac{\sin S\sin(S-\zeta)}{\sin\delta\sin\lambda}, \tag{15}$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}P = \frac{\sin(S-\lambda)\sin(S-\delta)}{\sin S\sin(S-\zeta)}, \tag{16}$$

dans lesquelles $2S = \zeta + \delta + \lambda$.

La dernière est celle qui donne le meilleur résultat dans tous les cas. La première doit être préférée pour les angles horaires de 0^h à 6^h, la deuxième pour ceux de 6^h à 12^h.

Les distances zénithales ne doivent généralement pas excéder 80° à cause des incertitudes des réfractions aux faibles hauteurs.

Exemples d'observations et de calculs d'angle horaire.

PREMIER EXEMPLE. — Formule de Borda.

Le 17 décembre 1877, au soir, dans le jardin du consulat de France à Bangkok, on a observé la double distance zénithale de Pollux, à l'Est.

Position de la lunette.	Heure au compteur.	Lecture	Microscope droit.	Microscope gauche.	Niveau.	
G	$2^h\,55^m\,37^s,8$	352° 0′	8′ 24″	0′ 19″	7p,4	20p,3
D	3. 0. 12 ,2	96. 35	4. 58	6. 14	5 ,9	19 ,3

Les divisions du niveau valent 10″,4 ; elles croissent en sens inverse de la graduation.

Le compteur est une montre temps moyen.

On a donc à calculer $2z = D - G + (d - g) \times 10'',4$.

$$d = \frac{5,9 + 19,3}{2}, \qquad g = \frac{7,4 + 20,3}{2}, \qquad d - g = -1,25.$$

Latitude	13° 44′ 0″ N.
Longitude approchée	6h 32m 36s E.
Temps sidéral, à midi, Paris	17h 44m 50s,83
Correction pour la Longitude	— 1 4,50
Temps sidéral, à midi, Bangkok	17h 43m 46s,33
Ascension droite de Pollux	7h 37m 52s,94
Déclinaison	28° 19′ 10″ N.

	° ′ ″		
D =	456.35 36	Moyenne des heures	2h 57m 55s,0
G =	351.59.21,5		
	104.36.14,5		
$(d-g)\times 10'',4$	—.13,0		
$2z$	104.36. 1,5		
z	52.18. 0,7		
Réfraction	+ 1.10,1		
ζ	52.19.11		
δ	61.40.50	colog sin	0,055361
λ	76.16. 0	colog sin	0,012597
2S	190.16. 1		
S	95. 8. 1	log sin	9,998255
S − ζ	42.48.50	log sin	9,832266
		log $\cos^2 \frac{1}{2}$ P	9,898479
		log $\cos \frac{1}{2}$ P	9,949239
		$\frac{1}{2}$ P	27° 9′ 56″
		P	—54 19 52 = 3o5 40 8

et en temps	20h 22m 40s,5
Ascension droite	7 37 52,94
Temps sidéral	28h 0m 33s,44
Temps sidéral à midi	17 43 46,33
Intervalle sidéral	10h 16m 47s,11
Réduct. en temps moyen.	— 1 41,05
Temps moyen	10h 15m 6s,1
Heure du compteur	2 57 55,0
Correction du compteur.	7h 17m 11s,1

DEUXIÈME EXEMPLE. — Emploi des logarithmes d'addition.

Haï-Phong, 11 mai 1878, au matin :

Heure au compteur	$7^h\,51^m\,56^s,6$	$\lambda = 69°\,8'\,4''$
Distance zénithale ⊖	$58°\,42'\,43''$	$G = 6^h\,57^m\,16^s$ E.
Correction approchée du compteur..	$11^h\,54^m\,23^s$	
Heure de l'observation au compteur.	$7\ 51\ 46$	
Heure, temps moyen, approchée	$19^h\,46^m\ 9^s$	
Longitude	$6\ 57\ 16$	
Heure de Paris	$12^h\,48^m\,53^s$ le 10 mai.	

Déclinaison à midi, à Paris....	$17°\,39''\,41',3$ B.
Correction pour $12^h,81$.....	$+\ 8.18,9$
Déclinaison	$17°\,48''\ 0',2$
δ.....	$72.12.\ 0$
Équation du temps à midi, Paris	$3^m\,45^s,86$
Correction pour $12^h,81$.....	$1,12$
Équation du temps à l'instant de l'observation	$3^m\,46^s,98$

log cos δ.....	9,485289	log sin δ	9,978696
log cos λ.....	9,551665	log sin λ.....	9,970541
Somme.....	9,036954	Somme.....	9,949237

log cos ζ.....	9,715453
log cos ζ — somme ..	0,678499
log de soustraction..	0,576317
log cos δ cos λ.....	9,036954
log $\frac{1}{\sin\delta \sin\lambda}$	0,050763
log cos P	9,664034

P.....	$297°\,28'\,28'',0$	ou	$19^h\,49^m\,53^s,67$
Équation du temps.....			$-\ 3.46,98$
Temps moyen = angle horaire ⊙ moyen.			$19^h\,46^m\ 6^s,69$
Heure au compteur.....			$7\ 51\ 45,6$
Correction du compteur			$11^h\,54^m\,21^s,09$

Quand on a plusieurs observations à calculer, les parties du calcul entre crochets [ ] sont communes à toutes.

Les conditions favorables de l'observation se déduisent facilement des formules différentielles. Elles sont les mêmes que pour les hauteurs correspondantes et se rapportent au maximum du sinus de l'azimut; il faut donc observer au premier vertical ou, pour une étoile circompolaire, à l'instant de la digression. Il y a encore une autre condition à examiner ici. La distance polaire est toujours connue assez exactement, mais la latitude peut être mal déterminée. Voyons les conditions pour qu'une erreur donnée sur la latitude produise une erreur aussi faible que possible sur l'angle horaire.

En différentiant la formule fondamentale dans laquelle on fait varier P et λ, on a

$$dP = d\lambda \frac{(\cos\delta \sin\lambda - \sin\delta \cos\lambda \cos P)}{\sin\delta \sin\lambda \sin P} = d\lambda \frac{\sin\zeta \cos A}{\sin\delta \sin\lambda \sin P}$$

ou, en vertu de l'analogie des sinus,

$$dP = d\lambda \frac{\cot A}{\sin\lambda}.$$

Les observations les plus précises se font donc dans le voisinage de l'équateur. La condition de précision maximum est celle du minimum de cot A; c'est la même (premier vertical ou digression) que nous avons déjà trouvée relativement aux erreurs sur la distance zénithale. Ces circonstances sont donc doublement favorables.

Il est aisé de s'en rendre compte géométriquement. La discussion de ces sortes de problèmes se fait très aisément au moyen des propriétés des courbes ou droites de hauteur. Si l'on connaît l'heure du premier méridien, l'angle horaire détermine la longitude. Sur une carte, la longitude d'un point se trouve le mieux déterminée par le tracé d'un méridien, et comme le cercle de hauteur d'un astre (§ 29) est normal à son vertical défini par l'azimut, ce cercle est tangent au méridien quand l'astre est dans le premier vertical. Si l'astre ne passe pas dans ce plan, la meilleure détermination résulte de l'inclinaison la plus faible du lieu géométrique sur le méridien; il est facile de voir qu'elle correspond au cas de la digression pour une circompolaire. On remarquera que ζ n'intervient pas dans l'expression de ces erreurs; la valeur absolue de la

distance zénithale n'a donc d'importance qu'au point de vue de l'erreur due à la réfraction.

A ce point de vue, on ne doit pas observer de distances zénithales supérieures à 80°; plus près de l'horizon, on aurait à craindre l'effet des anomalies de la réfraction. Comme ces anomalies résultent précisément du manque de symétrie de l'atmosphère de part et d'autre du méridien, on voit qu'elles ne s'élimineraient pas entièrement, lors même qu'on combinerait des observations d'étoiles à l'Est avec des observations d'étoiles à l'Ouest. Mais cette combinaison, en vertu du principe des hauteurs correspondantes, élimine les erreurs constantes de l'instrument; ainsi, lors même qu'on observe des distances zénithales absolues en vue du calcul de l'heure, il y a toujours avantage à combiner des observations symétriques par rapport au méridien ou à l'horizon, soit du même astre, soit d'astres différents. C'est la condition nécessaire pour avoir de bons états absolus. La *marche* du chronomètre se déduit au contraire très bien de la comparaison d'états observés du même côté du méridien, et quand on a des observations du matin et du soir, il y a tout avantage à les grouper séparément pour cette recherche; cela fournit des vérifications. On reviendra sur ce point important en traitant de la longitude.

109. — Distances zénithales doubles.

En réalité, quand on opère avec le théodolite, la seule donnée qui résulte directement de l'observation, c'est la somme des distances zénithales. La moitié de cette somme ne serait, en toute rigueur, la distance zénithale correspondante à l'instant moyen, que si le mouvement de l'astre en distance zénithale était exactement proportionnel au temps. Cette condition n'est remplie complètement que par une étoile équatoriale observée à l'équateur.

Quand les deux observations sont faites loin du méridien et que l'intervalle de temps entre les deux ne dépasse pas 1^m ou 2^m de temps, l'erreur résultant de cette hypothèse est négligeable: mais il n'en est plus de même quand on veut utiliser pour le calcul de l'heure la somme de deux distances zénithales séparées par un intervalle de temps plus long. On peut, ou évaluer l'erreur, ou

employer une méthode de calcul de l'angle horaire qui la fasse disparaître.

Pour évaluer l'erreur, soient ζ' et ζ'' les distances zénithales correspondant aux angles horaires P′ et P″ : on a calculé un angle horaire correspondant à $\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')$ et on l'a supposé égal à $\frac{1}{2}(P' + P'')$ quand, en réalité, il est égal à $\frac{1}{2}(P' + P'') + \varepsilon$, ε étant la correction qu'il s'agit de trouver.

On a donc

$$\cos\zeta' = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P', \tag{18}$$

$$\cos\zeta'' = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P'', \tag{19}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta'') = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos[\tfrac{1}{2}(P' + P'') + \varepsilon].$$

On ajoute entre elles les deux premières équations et l'on retranche la somme de la troisième, il vient, en négligeant les termes du deuxième ordre en ε,

$$\sin\varepsilon = 2\cot\tfrac{1}{2}(P' + P'')\sin^2\tfrac{1}{4}(P' - P'') - 2\frac{\cos\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')\sin^2\frac{1}{4}(\zeta' - \zeta'')}{\sin\delta\sin\lambda\sin\frac{1}{2}(P' + P'')}. \tag{20}$$

Pour le calcul de cette expression, on peut prendre pour $\frac{1}{2}(P' + P'')$ la valeur trouvée par le premier calcul, pour $P' - P''$ la différence des heures d'observation évaluée en temps sidéral et convertie en arc : $\zeta' - \zeta''$ peut se calculer avec une approximation suffisante par la formule (3) où l'on fait $dP = P' - P''$ et $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta' + \zeta)$.

Mais cette formule, bonne pour évaluer l'erreur et la réduire au besoin en Tables, est d'un calcul trop compliqué.

Il est beaucoup plus élégant de chercher directement les angles horaires. Nous voyons déjà par ce qui précède que l'erreur ε est du deuxième ordre par rapport à $P' - P''$ et à $\zeta' - \zeta''$, d'où il suit qu'il suffira de connaître une valeur approchée de ces deux différences pour le calcul de la correction.

Additionnons les formules (18) et (19), il vient

$$\cos\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')\cos\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta'') = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos\tfrac{1}{2}(P' + P'')\cos\tfrac{1}{2}(P' - P''). \tag{21}$$

nous connaissons $\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')$ et, d'après ce qui précède, $\frac{1}{2}(P' - P'')$. $\frac{1}{2}(\zeta' - \zeta'')$ est un petit angle qui intervient dans la formule par son

cosinus ; il n'a donc pas besoin d'être connu avec une grande précision. Si par exemple $\zeta' - \zeta'' = 2^\circ$, il faut une erreur de $30''$ sur sa valeur pour produire une erreur d'une unité sur la sixième décimale du logarithme de ce cosinus.

On peut donc calculer $\zeta' - \zeta''$, soit par la formule (3), soit en déduisant des observations elles-mêmes la valeur de la vitesse du mouvement en distance zénithale, quand, comme cela arrive ordinairement, on a observé plusieurs paires de distances zénithales.

Posons en conséquence

$$\cos\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')\cos\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta'') = \cos z,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(P' + P'')\cos\tfrac{1}{2}(P' - P'') = \cos\psi.$$

Tirons de la première équation la valeur de l'angle inconnu z, la formule déduite de (21)

$$\cos z = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos\psi$$

nous montre que ψ est l'angle horaire correspondant à la distance zénithale z. Nous calculerons donc ψ par une quelconque des formules (13), (14), (15) ou (16) et nous trouverons $\frac{1}{2}(P' + P'')$ par la relation

$$\cos\tfrac{1}{2}(P' + P'') = \frac{\cos\psi}{\cos\tfrac{1}{2}(P' - P'')}, \tag{22}$$

ce qui revient à calculer

$$\cos\tfrac{1}{2}(P' + P'') = \frac{\cos z - \cos\delta\cos\lambda}{\sin\delta\sin\lambda\cos\tfrac{1}{2}(P' - P'')}.$$

Cette méthode est beaucoup plus simple et tout aussi exacte que celle donnée par M. Liais : si $P' - P''$ était grand, on pourrait procéder par approximations successives, mais ce sera inutile dans la presque totalité des cas.

Connaissant la demi-somme et la demi-différence des angles horaires, ceux-ci se calculeront par addition et soustraction. On trouvera un exemple d'application au Paragraphe 137. (Longitude par les hauteurs de Lune).

110. — Heure par les distances zénithales circcommériдiennes.

Quand, aux environs du passage au méridien, le mouvement en hauteur est rapide, on peut obtenir de très bons résultats par l'observation de distances zénithales circcommériдiennes. Le calcul pourrait se faire par les formules ordinaires, mais il est préférable d'appliquer une formule spéciale à ce cas particulier, qui est une sorte de combinaison de la méthode des hauteurs correspondantes avec celle des hauteurs absolues, en ce sens que les différences des heures et des distances zénithales y jouent le rôle le plus important comme précision.

M. de Littrow retranche l'une de l'autre les équations (18) et (19) et en déduit la formule

$$\begin{aligned}(23)\qquad &\sin\tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta'')\sin\tfrac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')\\ &= \sin\delta\sin\lambda\sin\tfrac{1}{2}(P' + P'')\sin\tfrac{1}{2}(P' - P''),\end{aligned}$$

dans laquelle ζ' et ζ'' sont observés; le chronomètre donne $P' - P''$ et $\sin\frac{1}{2}(P' + P'')$ se calcule ainsi par une formule logarithmique. P' et P'' étant petits, l'angle donné par son sinus est déterminé avec beaucoup de précision, pourvu que $\zeta' - \zeta''$ soit bien exact. On remarquera que ce problème est au fond exactement le même que celui que nous venons de résoudre, et les deux formules doivent donner les mêmes résultats. En réalité, on trouve avantage à employer la marche du calcul des formules (21) et (22) quand $\frac{1}{2}(P' + P'')$ est plus grand que 3^h, c'est-à-dire pour les hauteurs horaires; la formule (23) convient plus particulièrement aux hauteurs circcommériдiennes, soit aux angles horaires inférieurs à 3^h, puisque la demi-somme est donnée par son sinus.

Nous avons supposé dans le premier problème la distance polaire invariable; on prend pour δ la moyenne des distances qui correspondent aux observations. Pour évaluer l'erreur commise il faut différentier l'équation fondamentale en P et δ; on en tire

$$\begin{aligned}(24)\qquad \frac{dP}{d\delta} &= -\frac{\sin\delta\cos\lambda - \cos\delta\sin\lambda\cos P}{\sin\delta\sin\lambda\sin P} = -\frac{\cos\varpi\sin\zeta}{\sin\delta\sin\lambda\sin P}\\ &= -\frac{\cos\varpi}{\sin A\sin\lambda}.\end{aligned}$$

Si ϖ et A sont voisins d'un droit, l'erreur est petite. C'est le cas des hauteurs horaires. Mais pour les circonméridiennes $\cos\varpi$ est grand et $\sin A$ petit en valeur absolue. Il faut donc, pour ce cas, tenir compte de la variation en déclinaison.

De plus, la méthode étant recommandée principalement pour faire le point en mer, il y a lieu aussi de tenir compte du déplacement du navire, en vertu duquel $P' - P''$ et λ varient.

Ce dernier point se résout en ramenant une des hauteurs observées à l'horizon auquel on a observé la deuxième et en corrigeant $P' - P''$ du changement en longitude. Nous traiterons ce problème à propos du point en mer (§ 153).

Pour tenir compte de la variation en distance polaire qui est toujours une petite quantité, on calculera le changement $d\zeta$ de distance zénithale produit par un changement $d\delta$ de la distance polaire. Il suffit d'appliquer la formule différentielle

$$d\zeta = \cos\varpi\, d\delta \ (^1)$$

Si $d\delta$ est l'accroissement de la distance polaire en passant de la première observation à la deuxième, on ajoutera $-d\zeta$ à la deuxième distance zénithale, et l'on prendra pour le calcul la distance polaire qui correspond à la première. On peut aussi ajouter $\frac{1}{2}d\zeta$ à la première distance et le retrancher de la deuxième, en prenant pour δ la distance polaire qui correspond à l'intervalle moyen : $\zeta' - \zeta''$ et $\zeta' + \zeta''$ garderont les mêmes valeurs.

On peut encore se dispenser d'effectuer cette correction en se rappelant que pour calculer les circonméridiennes dans les mêmes circonstances de déclinaison variable, il suffit de compter les angles horaires à partir de l'instant du maximum de hauteur, au lieu de les compter du méridien. Cela revient à dire que dans ces conditions les distances zénithales de l'astre sont symétriques de part et d'autre de ce point. Si donc on calcule les angles horaires en supposant la déclinaison constante, cela reviendra à trouver pour le midi l'instant où la hauteur est la plus grande. L'opération conduite de cette manière donne alors pour le calcul ultérieur de la colatitude le

(1) M. Faye remarque que ϖ est toujours petit, et qu'on peut prendre sensiblement $d\zeta = d\delta$.

point de départ des angles horaires : quant à l'heure vraie, elle s'obtient en appliquant aux angles horaires déduits de la formule la correction de l'angle horaire du maximum de hauteur, correction qu'on a appris à chercher (§ 94).

Rappelons encore que la formule (24) est identique à celle qui donne l'équation des hauteurs correspondantes : si l'on suppose dans cette dernière P assez petit pour que son cosinus soit sensiblement égal à l'unité, on trouve

$$dP = d\delta \frac{\sin(\lambda - \delta)}{\sin\delta \sin\lambda \sin P}$$

et l'on reconnaît ici le coefficient $\frac{1}{a}$ des circonméridiennes.

Si l'on opère à terre avec un théodolite, et qu'au lieu de distances zénithales simples on observe des sommes de deux distances, on peut encore prendre les instants moyens comme correspondant à la moitié de l'arc mesuré, à la condition toutefois de faire subir à cette moitié d'arc une correction facile à calculer. Soient pour le premier groupe, aux heures t_1 et t_2 du chronomètre, ζ'_1 et ζ'_2 les distances zénithales : on a mesuré $2z = \zeta'_1 + \zeta'_2$. Soit maintenant ζ' la distance zénithale inconnue à l'instant $T = \frac{t_1 + t_2}{2}$, soient enfin P'_1 et P'_2 les angles horaires. On peut développer ζ'_1 et ζ'_2 par la formule de Taylor, et comme $dP = dt$,

$$\zeta'_1 = \zeta' + \frac{d\zeta'}{dP}(T - t_1) + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta'}{dP^2}(T - t_1)^2 + \dots,$$

$$\zeta'_2 = \zeta' + \frac{d\zeta'}{dP}(T - t_2) + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta'}{dP^2}(T - t_2)^2 + \dots.$$

Ajoutons et remarquons que $T - t_1 + T - t_2 = 0$, il vient

$$\zeta'_1 + \zeta'_2 = 2\zeta' + \frac{d^2\zeta'}{dP^2}\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^2 \frac{1}{\sin 1''}. \tag{25}$$

Pour déterminer $\frac{d^2\zeta'}{dP^2}$ on a, en vertu de l'équation (3) de ce Chapitre,

$$\frac{d\zeta'}{dP} = \sin\lambda \sin A, \qquad \frac{d^2\zeta'}{dP^2} = \sin\lambda \cos A \frac{dA}{dP},$$

et comme

$$\sin\zeta' d\mathrm{A} = -\sin\delta\cos\varpi\, d\mathrm{P},$$

on aura

$$\frac{d^2\zeta'}{d\mathrm{P}^2} = -\frac{\sin\lambda\sin\delta\cos\mathrm{A}\cos\varpi}{\sin\zeta'}; \tag{26}$$

on calculera A et ϖ par les analogies des sinus, en prenant pour ζ' la valeur z,

$$\sin\mathrm{A} = \frac{\sin\mathrm{P}}{\sin z}\sin\delta, \qquad \sin\varpi = \frac{\sin\mathrm{P}}{\sin z}\sin\lambda;$$

des valeurs approchées de P suffisent.

On peut remplacer $\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^2$ par $\sin^2\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ et l'on aura par suite pour le calcul numérique

$$\zeta' = z - \frac{1}{4}\frac{\sin\delta\sin\lambda\cos\mathrm{A}\cos\varpi}{\sin z}\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(t_2 - t_1)}{\sin 1''}.$$

C'est ce ζ' qui devra être introduit dans la formule (23); le ζ'' de la même formule se calculera de même.

Les angles A et ϖ étant calculés par leurs sinus, les signes de leurs cosinus ne sont pas déterminés. Pour les trouver, considérons d'abord le triangle de position dans le cas où l'observateur se trouve dans l'hémisphère nord. L'angle ϖ est plus grand qu'un droit pour les circompolaires, définies comme culminant entre le pôle et le zénith, moindre qu'un droit pour les astres qui culminent au sud du zénith. Pour les circompolaires, l'azimut est toujours un angle obtus : il est aigu pour les étoiles dont la distance polaire surpasse 90°. Pour celles qui culminent entre l'équateur et le zénith, il faut se reporter à l'équation

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda - \sin\delta\sin\lambda\cos\mathrm{A},$$

d'où

$$\cos\mathrm{A} = \frac{\cos\delta\cos\lambda - \cos\zeta}{\sin\delta\sin\lambda}.$$

Si $\cos\zeta < \cos\delta\cos\lambda$, $\cos\mathrm{A}$ est positif; il est négatif si $\cos\zeta > \cos\delta\cos\lambda$.

Pour l'observateur placé dans l'hémisphère sud et qui continue à compter les colatitudes et les distances polaires du pôle nord, ainsi

que cela doit se faire afin de rester dans la généralité des conventions, on verra que l'angle ϖ est obtus quand l'étoile culmine au nord du zénith, et aigu pour les circompolaires culminant au sud du zénith. L'azimut compté du Sud vers l'Ouest a un cosinus positif pour les étoiles culminant au sud du zénith, négatif pour celles qui culminent au nord de l'équateur : pour celles qui culminent entre l'équateur et le zénith, le signe est encore donné par la formule ci-dessus d'où l'on aurait d'ailleurs pu tirer toute la discussion en y joignant celle-ci :

$$\cos\varpi = \frac{\cos\lambda - \cos\delta\cos\zeta}{\sin\delta\sin\zeta};$$

un graphique donnerait avec une exactitude suffisante les valeurs numériques et les signes des cosinus des angles A et ϖ.

Lorsque le passage méridien n'a pas lieu très près du zénith, et si les observations sont faites près du méridien, cos A et cos ϖ diffèrent peu de l'unité en valeur absolue, et l'on a sensiblement

$$\frac{d^2\zeta}{dP^2} = \frac{\sin\lambda\sin\delta}{\sin\zeta}.$$

Dans la pratique, et sauf des cas très spéciaux, on peut considérer cette quantité comme constante pour une série d'observations, et y faire $\zeta = \delta - \lambda$.

Si $t'' - t'$ est lui-même constant, il est inutile de tenir compte de cette correction, puisqu'elle affecte tous les ζ de la même manière, et qu'ainsi son influence sur l'angle horaire s'élimine d'après le principe des hauteurs égales, à condition de ne combiner entre elles que des distances zénithales sensiblement correspondantes. On réalise assez facilement la constance de $t'' - t'$ en observant d'une façon bien régulière, à intervalles sensiblement égaux. Mais la correction ne doit pas être négligée dans les autres cas : la formule telle que nous l'avons établie ne suppose nullement qu'on observe des deux côtés du méridien : le seul avantage des observations symétriques est d'éliminer plus complètement l'influence des erreurs de distance zénithale sur l'angle horaire.

Afin de bien faire comprendre cette importante méthode, nous allons développer les calculs d'un exemple complet d'observations du Soleil.

Le 31 mars 1879, à l'île du Milieu de la baie de Van-Phong, on a fait aux environs de midi une série d'observations des bords alternatifs du Soleil. La correction approchée du compteur sur le temps vrai était $12^m 46^s$. Baromètre $757^{mm},5$. Thermomètre $+ 30°,0$. Colatitude approchée $77°30'$. Longitude Est : $7^h 8^m$.

Lunette	Bords	Heures	Niveaux		Lecture moyenne	$2z$
		h m s	p	p	° ′ ″	
D	Inf^r	11.36.54,8	12,9	22,0	219.16. 4 ,5	° ′ ″
G	Sup^r	39.20,8	12,7	21,8	201.42.34 ,5	17.33.30
G	Inf^r	41. 7,6	11,7	21,0	201.15.37	
D	Sup^r	43.16,8	9,2	18,3	218.24.56	17. 9.19
D	Inf^r	45.22,4	9,2	18,3	218.54.37	
G	Sup^r	47.22,4	11,7	21,0	201.55.32 ,5	16.59. 4,5
G	Inf^r	49. 4,0	11,6	20,9	201.22.30	
D	Sup^r	51.13,2	12,5	21,8	218.25.17	17. 2.47
D	Inf^r	53.16,4	12,7	22,0	219. 2.0	
G	Sup^r	55.38,4	13,0	22,0	201.40.8	17.21.52
G	Inf^r	58.33,6	13,1	22,0	200.55.47	
D	Sup^r	60.28,0	12,8	21,5	218.58.45	18. 2.58

En comparant la première lecture du niveau à la dernière, on voit que le nivellement du théodolite a peu varié. On sait d'autre part qu'il n'a pas été opéré de rectification au cours des observations. Au lieu donc de corriger chaque observation à part, on peut corriger la moyenne avec la moyenne des niveaux. Les observations 4 et 5 montrent d'ailleurs à quel point il faut se défier de l'inertie de la bulle. La formule à appliquer est ici

$$2\zeta = (D - G) + 10'',4\,(d - g).$$

La moyenne des lectures d est $16^p,10$, celles des lectures g est $16^p,87$ et $10'',4\ (d-g) = -8'',0$. Nous pouvons aussi prendre pour correction de réfraction et parallaxe celle qui répond au ζ moyen, et dont le double est $+14'',2$; la correction totale de $2z$ est donc $+6'',2$. Avec l'état approché et la longitude, nous calculons la déclinaison du ☉ pour midi local vrai, et nous trouvons $D = +4°0'30''$, d'où

$$\delta = 85°59'30''$$

La dist. zénith. minim. nous donne sans réduction. 8 29 25

D'où la valeur approchée..... $\lambda = 77°30'5''$

Nous adoptons pour le calcul $77°30'10''$	log sin.....	9,9896		
	log sin δ	9,9989		
	log sin δ sin λ.	9,9885		
D'ailleurs $(\delta - \lambda) = 8°29'20''$.....	colog sin....	0,8309	log cot	0,8261
	log a	0,8194	log a^2	1,6388
			log a^2 cot $(\delta - \lambda)$	2,4649

Calcul de l'heure.

Ne prenons que les deux premières et les deux dernières paires de distances zénithales. Écrivons les heures des observations d'après le chronomètre.

t_1.....	$11^h36^m54^s,8$	$11^h41^m\ 7^s,6$	$11^h53^m16^s,4$	$11^h58^m33^s,6$
t_2.....	39 20 ,8	43 16 ,8	55 38 ,4	60 28 ,0
différence.	$2^m26^s,0$	$2^m\ 9^s,2$	$2^m22^s,0$	$1^m54^s,4$ $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$
$\frac{1}{2}$ somme..	$11^h38\ 7^s,8$	$11^h42\ 12^s,2$	$11^h54\ 27^s,4$	$11^h59\ 30^s,8$ $\frac{1}{2}(t_2 + t_1)$

En appliquant à ces moyennes la correction approchée 12^m46^s du chronomètre, on trouve les angles horaires

$23^h50^m53^s,8$	$23^h54^m58^s,1$	$0^h7^m13^s,4$	$0^h12^m16^s,8$
ou $-9^m\ 6^s,2$	ou $-5^m\ 1^s,8$		

et en arc

$-2°16'33''$	$-1°15'27''$	$1°48'21''$	$3°4'12''$

Les doubles distances zénithales corrigées de $+6'',2$ sont respectivement

$17°33'36'',2$	$17°9'25'',2$	$17°21'58'',2$	$18°3'4'',2$

Pour en déduire les ζ correspondant à l'instant moyen, nous calculons A et ϖ.

	A			
log sin P....	8,5989 (—)	8,3414 (—)	8,4985	8,7288
log sin z.....	9,1836	9,1737	9,1789	9,1956
$\log \frac{\sin P}{\sin z}$....	9,4153	9,1677	9,3196	9,5332
log sin δ	9,9989	9,9989	9,9989	9,9989
log sin A.....	9,4142 (—)	9,1666 (—)	9,1385	9,5321
A.....	$-15°2'40''$	$-8°26'20''$	$12°1'0''$	$19°54'20''$

		ϖ		
	9,4153	9,1677	9,3196	9,5332
$\log \sin \lambda$	9,9896	9,9896	9,9896	9,9896
$\log \sin \varpi$	9,4049	9,1573	9,3092	9,5228
ϖ	14°43′	8°15′30″	11°15′30″	19°28′10″

Avec ces données, nous calculons la correction de z.

$\log \sin \delta \sin \lambda$	9,9885	9,9885	9,9885	9,9885
$\log \cos A$	9,9848	9,9953	9,9904	9,9732
$\log \cos \varpi$	9,9855	9,9955	9,9908	9,9744
$\log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} (t_2 - t_1)}{\sin 1''}$.	1,0654	0,9592	1,0413	0,8535
colog sin z	0,8164	0,8263	0,8211	0,8044
somme	1,8406	1,7648	1,8321	1,5940
$\log 4$	0,6021	0,6021	0,6021	0,6021
log correction.....	1,2385	1,1627	1,2300	0,9919
correction.....	— 17″,3	— 14″,5	— 17″,0	— 9″,8
z	8°46′48″,1	8°34′42″,6	8°40′59″,1	9°1′32, 1
ζ.....	8°46′30″,8	8°34′28″,1	8°30′42″,1	9°1′22″,3

Combinant le premier ζ avec le quatrième, le deuxième avec le troisième et de même le premier P avec le quatrième, le deuxième P avec le troisième, nous allons calculer les valeurs $\frac{1}{2}(\zeta' - \zeta'')$, $\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')$ et $\frac{1}{2}(P' - P'')$; pour le calcul de ce dernier nous prenons les angles horaires tous positifs.

ζ'.....	9° 1′22″,3	8°40′42″,1	P'.....	363° 4′12″	361°48′21″
ζ''.....	8 46 30 ,8	8 34 28 ,1	P''.....	357 43 27	358 44 33
$\frac{1}{2}(\zeta' - \zeta'')$.	+ 7′25″,7	+ 3′ 7″,0	$\frac{1}{2}(P' - P'')$.	+ 2°40′22″,5	+ 1°31′54″
$\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')$.	8°53 56,5	8°37 35 ,1			

Voici le calcul de la formule (23) pour trouver $\frac{1}{2}(P' + P'')$:

$\log \sin \delta \sin \lambda$	9,988522	9,988522
$\log \sin \frac{1}{2}(P' - P'')$. .	8,668705	8,426990
Somme.....	8,657227	8,415512
Complément.....	1,342773	1,584488
$\log \sin \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta'')$...	7,334665	6,957416
$\log \sin \frac{1}{2}(\zeta' + \zeta'')$...	9,189473	9,176066
$\log \sin \frac{1}{2}(P' + P'')$..	7,866891	7,717970
$\frac{1}{2}(P' + P'')$.....	25′18″,2	17′57″,5

on a déjà

$\frac{1}{2}(P'-P'')$.....	$2^{\circ}40'22'',5$	$1^{\circ}31'54'',0$

donc

P'.....	$+ 3^{\circ}\ 5'40'',7$	$+ 1^{\circ}49'51'',5$
P''.....	$- 2^{\circ}15'\ 4'',3$	$- 1^{\circ}13'56'',5$

Convertissant en temps et remplaçant les angles horaires négatifs par leurs compléments à 12^{h}, nous prenons la différence avec les moyennes des heures $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$.

	h m s	h m s	h m s	h m s
$\frac{1}{2}(t_1+t_2)$.....	11.38. 7,8	11.41.12,2	11.54.27,4	11.59.30,8
P.....	11.50.59,7	11.55. 4,2	12. 7.19,4	12.12.22,7
Corr. du chron.	12.51,9	12.52,0	12.52,0	12.51,9

L'état $12^{m}51^{s},95$ sur le temps vrai va servir au calcul de la colatitude, avant de lui appliquer la correction résultant de la variation de δ.

Nous ne donnerons le calcul que pour la première paire de distances zénithales.

	h m s	h m s		
Heures t.....	11.36.55,8	11.39.20,8		
Correction.....	12.52,0	12.52,0		
Temps vrai.....	11.49.46,8	11.52.12,8		
Angle horaire P.	— 10.13,2	— 7.47,2		
$\log a$.....	0,8194	0,8194	(calculé plus haut)	
$\log \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$....	2,3119	2,0757	(Table III)	
	3,1313 ...	1353″,0	2,8951 ... 785″,5	Somme 2138″,5
$\log a^2\cot(\delta-\lambda)$.	2,46	2,46		
$\log \frac{2\sin^4\frac{1}{2}P}{\sin 1''}$....	9,01	8,55		
	1,47 ...	29″,5	1,01 ... 10″,2	Somme 39″,7
				Réduct. 2098″,7

D'ailleurs

	° ′ ″
$\zeta+\zeta'$ corrigé.....	17.33.36,2
Réduction.....	— 34.58,7
Double distance réduite .	16.58.37,5
Moitié	8.29.18,7
δ	85.59.30,6
λ	77.30.11,9

En appliquant le même calcul aux autres distances zénithales, nous avons les résultats ci-dessous :

Double dist.	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
corrigée.	17. 9.25,2	16.59.10,7	17. 2.53,2	17.21.58,2	18. 2.57,9
Réduction..	10.55,8	40,8	4.24,0	23.28,0	1. 4.20,9
$\zeta' + \zeta$.....	16.58.29,4	16.58.29,9	16.58.29,2	16.58.30,2	16.58.37,8
λ	77.30.15,9	77.30.15,7	77.30.16,5	77.30.15,5	77.30.11,7

Il reste encore à calculer l'heure vraie, c'est-à-dire à chercher l'angle horaire du maximum de hauteur.

$$y = \text{variation horaire} \times \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta \sin\lambda}.$$

Var. horaire de $\delta = -58'',09$ $\quad \log = 1,7641\,(-)$

$$\log \frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta \sin\lambda} = \operatorname{colog} a = 9,1806\,(+)$$

$$\log y = 0,9447\,(-) \quad \text{en parties du rayon.}$$

$$\log 206265 = 5,3144$$

$$\operatorname{colog} 54000 = 5,2676$$

$$\log y \text{ (en arc)} = 1,5267\,(-)$$

$$y = -33'',6 = -2^s,23$$

Le vrai P compté du méridien est égal à celui qu'on a calculé, moins y. Donc, la vraie correction du chronomètre sur le temps vrai est

$$12^m 51^s,95 + 2^s,23 = 12^m 54^s,28.$$

On a maintenant

	m s
Équation du temps à midi vrai de Paris ..	4.18,94
Correction pour longitude $7^h 8^m$.....	+ 5,40
Temps moyen à midi vrai du lieu	4.24,34
Correction du compteur, temps vrai	12.54,28
Correction du compteur, temps moyen....	17.18,62

Bien que nous n'ayons pas encore abordé le problème des longitudes, nous allons en donner ici le calcul. Les chronomètres ont été réglés sur Saïgon les 22 mars et 28 avril. On a déduit des comparaisons pour mars 31, à midi, leurs retards sur le compteur, et l'on a calculé, avec la marche supposée constante, leurs états sur Saïgon.

	529 Winnerl.	834 Bréguet.	534 Winnerl.	
	h m s	h m s	h m s	
Retard sur le compt^{r}.	6.54.22,1	9.43.38,8	11.58.16,0	
Correction du compt^{r}.	17.18,6	17.18,6	17.18,6	
Correction des chron.	7.11.40,7	1.00.57,4	0.15.34,6	sur Van-Phong.
	7. 1. 7,8	9.50.25,9	0. 5. 4,0	sur Saïgon.
Longitude à l'Est de Saïgon	10.32,9	10 31,5	10 30,6	

dont la moyenne $10^{m}31^{s},7$ ne diffère que de $1^{s},9$ du résultat qui a été adopté d'après plusieurs séries de transports de temps, combinées avec une triangulation expéditive, et qui est de $10^{m}29^{s},8$.

On voit donc qu'il est possible d'employer cette méthode pour obtenir par une observation très rapidement faite des différences de longitude suffisamment exactes.

111. — Heure par les circonméridiennes. Méthode indirecte.

Si l'on a calculé les circonméridiennes pour la latitude avec un état absolu erroné, la comparaison des observations entr'elles fournira une correction de l'angle horaire.

Pour cela, rappelons que la formule des circonméridiennes est

$$\zeta = \delta - \lambda + a.2\sin^{2}\tfrac{1}{2}P,$$

a est considéré comme une constante pour l'astre donné, le jour et le lieu de l'observation. Admettons qu'on ait observé un certain nombre de distances zénithales circonméridiennes : avec un état absolu approché du chronomètre nous calculerons les valeurs de $\delta - \lambda$ et par suite de λ qui se déduisent de ces observations, et nous en ferons le tableau en regard des heures d'observations rangées par ordre croissant; puis nous en prendrons la moyenne et nous écrirons à côté de chaque observation l'écart avec cette moyenne. Si la suite de ces écarts n'obéit à aucune loi de signes ou de grandeurs, et si leurs valeurs absolues ne dépassent pas les limites des erreurs que comportent l'instrument, le mode d'observation, etc., on doit en conclure que l'hypothèse faite sur la correction du chronomètre était exacte dans la limite où cette exactitude peut être vérifiée par les circonméridiennes. Si l'on a commis au contraire une erreur dP sur la correction, les réductions au méridien auraient dû être

calculées avec les valeurs $P_i + dP$ au lieu des P_i que nous avons employés.

Comme on a calculé

$$\lambda = \delta - \zeta + \frac{2a}{\sin 1''} \sin^2 \tfrac{1}{2} P$$

et qu'on aurait dû calculer

$$\lambda_1 = \delta - \zeta + \frac{2a}{\sin 1''} \sin^2 \tfrac{1}{2} (P + dP),$$

la correction de λ serait $\lambda_1 - \lambda$ ou

$$\frac{2a}{\sin 1''} [\sin^2 \tfrac{1}{2} (P + dP) - \sin^2 \tfrac{1}{2} P] = \frac{2a}{\sin 1''} \sin P \sin \tfrac{1}{2} dP = \varepsilon.$$

On voit que sa valeur change de signe avec $\sin P$, et qu'ainsi elle a des signes contraires de part et d'autre du méridien : de plus elle décroît avec P.

Si les erreurs calculées forment une série croissante ou décroissante, avec un changement de signe vers le milieu, on pourra donc admettre que ce résultat est dû à une fausse valeur de la correction du chronomètre. On supposera alors que la moyenne des valeurs trouvées est la vraie valeur de la colatitude, on en fera les différences avec les résultats partiels, et l'on obtiendra ainsi les corrections ε ci-dessus. Chacune de ces corrections supposée connue peut servir à calculer la valeur de dP : on a en effet

$$\sin \tfrac{1}{2} dP = \frac{\varepsilon \sin 1''}{2a \sin P} \qquad \text{ou} \qquad dP = \frac{\varepsilon}{a \sin P}.$$

On aura autant de valeurs de dP que l'on a d'observations. Pour les combiner de la manière la plus avantageuse, on écrit les équations

$$dP\, a \sin P = \varepsilon$$

et l'on en fait la somme en donnant dans toutes le même signe à $\frac{\varepsilon}{a \sin P}$; il en résulte la valeur finale

$$dP = \frac{S\varepsilon}{Sa \sin P},$$

S étant le symbole de *Somme*.

C'est une application de la méthode de Mayer que nous étudierons plus loin (§ 171).

Cette méthode s'applique surtout bien quand les observations sont à peu près également distribuées des deux côtés du méridien. La valeur approchée de la colatitude se déduira comme toujours d'une réduction à vue des observations les plus voisines du méridien, dont la correction est la moins affectée par l'erreur sur l'angle horaire. Pour calculer numériquement $S a \sin P_2$ il faudra diviser par $15 \sin 1''$, dP sera ainsi exprimé en secondes de temps.

Nous n'avons pas tenu compte du second terme de la réduction au méridien : ce terme fort petit n'est pas sensiblement affecté par l'erreur sur l'heure, si celle-ci n'est pas trop forte. On voit ici l'intérêt qu'il y a, quand on calcule une série de circonméridiennes, à réduire chaque distance zénithale à part : on vérifie par là la correction du chronomètre.

Il n'est pas besoin d'une discussion spéciale pour montrer que la précision de la détermination de dP dépend des mêmes conditions qui permettent un calcul exact de l'angle horaire quand on y procède directement.

Il est évidemment inutile de recommencer le calcul complet avec la nouvelle valeur des $P_i + dP$: il suffit de calculer les corrections $a \sin P\, dP$.

Nous donnons ici un exemple d'application de cette méthode.

Étant à Cua-Dong-hoï, le 23 mai 1878, par longitude approchée $7^h 2^m$ Est, on a observé quatre doubles distances zénithales du Soleil qui culminait au Nord. La correction approchée du compteur sur le temps vrai local était de $11^h 58^m 25^s$, et la colatitude approchée déduite d'un calcul sommaire, $72°31'30''$.

On a, d'après la *Connaissance des Temps*, $\delta\odot = 69°38'25''$.

Les distances zénithales ont été corrigées de niveau, réfraction et parallaxe, on a calculé par la méthode de Delambre les réductions au méridien en se servant de l'état et de la colatitude approchés, et l'on a obtenu les résultats suivants :

ζ	3° 8′30″,6	2°54′18″,6	2°54′48″,3	3° 5′ 6″,5
Réduction au méridien..	16.28 ,3	1.52 ,0	1.57 ,3	12.56 ,2
$\delta - \lambda$	— 2°52′ 2″,3	2°52′26″,6	2°52′51″,0	2°53′10″,3

Les distances zénithales réduites croissent régulièrement en valeur absolue : il y a donc lieu de corriger l'état.

La moyenne des $(\delta - \lambda)$ calculés est

$$\begin{array}{rr} & -\ 2^{\circ}52'37'',5 \\ \delta = & 69\ 38\ 25 \\ \hline \lambda \text{ approché} = & 72^{\circ}31'\ 2'',5 \end{array}$$

Avec cela on recalcule une nouvelle valeur de a :

$\log \sin \delta$	9,9720
$\log \sin \lambda$	9,9795
$\operatorname{colog} \sin (\delta - \lambda)$	1,2994 (—)
$\log a$	1,2509 (—)

Le premier angle horaire était $P = -6^{m}22^{s},6$; on calcule

$\log a$	1,2509	
$\log \sin P$	8,4442	
$\log a \sin P$	9,6951	$a \sin P = 0,4957.$

On trouve ainsi la série des valeurs absolues de $a \sin P$ correspondant aux huit observations,

	0,496
	0,339
	0,193
	0,043
	0,050
	0,196
	0,285
	0,424
Somme.....	$2,026 = S a \sin P.$

La moyenne des distances zénithales réduites est $2^{\circ}52'37'',5$ et ses différences avec les résultats partiels sont, abstraction faite du signe,

$35'',2$
$10'',9$
$13'',5$
$32'',8$
$92'',4$

somme qu'il faut doubler, chaque distance étant la moyenne de deux obser-

vations. Il vient.

$$\frac{S\varepsilon}{S\, a \sin P} = \frac{184'',8}{2,026} = 91'',2 = 6^s,08 = dP.$$

Pour avoir le signe de la correction, reportons-nous à la dernière observation.

$$\lambda = 69°38'25'' - (-2°53'10'') = 72°31'35''$$
$$\lambda_1 = 69\ 38\ 25 - (-2\ 53\ 37) = 72\ 31\ 2$$

$$\lambda_1 - \lambda = 33''$$

En se référant à la formule

$$\lambda_1 - \lambda = \varepsilon = \frac{2a}{\sin 1''} \sin P \sin \tfrac{1}{2} dP,$$

on voit que $\lambda_1 - \lambda$ a le signe $-$; P a ici le signe $+$ et a le signe $-$, donc $\sin \frac{1}{2} dP$ est positif; d'où

$P = 5^m27^s,4 + 6^s08 =$	$5^m33^s,48$
Heure du compteur..	7 2 ,40
Corr. du compt^r....	$11^h58^m31^s,08$

Refaisant les calculs de réduction au méridien avec cette valeur, on trouvera pour $\delta - \lambda$

	$-2.52.38,4$
	34,9
	41,5
	25,7
moyenne	$-2.52.35$
δ.....	69.38.25
λ.....	72.31. 0

Pour compléter le calcul, il faudrait réduire à l'instant du maximum de hauteur. Nous en avons donné un exemple; d'ailleurs, dans le cas actuel, δ varie très lentement, et la correction serait petite. On voit que, dans des conditions très défavorables de culmination à $2°52'$ seulement du zénith, on peut encore obtenir des résultats acceptables.

112. — Angle horaire par des observations d'azimut.

Si l'on peut mesurer l'azimut d'un astre, on peut en déduire l'angle horaire en se servant de la formule des cotangentes

$$\sin P \cot A = \cot \delta \sin \lambda - \cos \lambda \cos P$$

qui se résout en posant

$$a \cos x = \cot A,$$
$$a \sin x = \cos \lambda,$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \cos \lambda \operatorname{tang} A \tag{28}$$

et

$$\sin (P + x) = \frac{\cot \delta \sin \lambda}{a} = \cos x \cot \delta \sin \lambda \operatorname{tang} A = \sin x \cot \delta \operatorname{tang} \lambda. \tag{29}$$

Nous nous bornons à cette indication : il est rare qu'on connaisse les azimuts avec assez de précision pour en déduire l'angle horaire, l'inverse est le cas le plus ordinaire.

On peut pourtant se rappeler que précisément les circonstances dans lesquelles la hauteur varie lentement, sont celles où l'azimut varie rapidement et qui peuvent par suite être mises à profit pour la détermination de l'heure par la mesure de l'azimut. L'observation des passages à la lunette méridienne est l'application la plus simple de cette méthode. Le grand mérite des observations d'azimut est de donner des résultats à peu près indépendants de la réfraction; mais cet avantage, très appréciable dans les observatoires, est de peu d'importance en voyage, car alors l'azimut est imparfaitement connu. On trouvera dans l'*Astronomie* de Liais des développements complets relatifs à ce sujet sur lequel il paraît inutile de s'étendre.

CHAPITRE VIII.

DÉTERMINATION DE L'AZIMUT.

113. — Généralités. Azimut par la lunette méridienne.

Avec le théodolite, on peut mesurer directement la différence des azimuts d'un objet terrestre et d'un astre. Avec le théodolite simple, on aura ainsi les lectures qui correspondent au pointé de l'objet et à celui de l'astre. Plus généralement, si l'on a pointé un astre dont l'azimut est connu, on déduira de là l'azimut qui correspond au zéro de la graduation, et l'on calculera aisément celui qui correspond à toute autre division. Il n'y aura rien à changer à cela pour les instruments réitérateurs, sauf que l'azimut du zéro varie d'une réitération à l'autre. Avec un théodolite répétiteur, on peut répéter l'angle entre l'astre et l'objet terrestre. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les azimuts successifs de l'astre aux instants des pointés, et si L est l'arc total parcouru en n répétitions, l'azimut de l'objet sera

$$A_0 = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n + L}{n}.$$

Si l'on opère avec un instrument à réflexion ou avec un cercle répétiteur, on mesure directement l'angle soit simple, soit répété, dans le plan de l'astre et de l'objet terrestre. Pour avoir la différence d'azimut, il faut réduire cet angle à l'horizon, ce qui exige qu'on connaisse les distances zénithales de l'astre et du signal. L'angle réduit se traite comme celui qu'on aurait observé au théodolite. Le premier problème à résoudre dans les deux cas est donc de trouver l'azimut d'un astre.

Nous comptons, comme on l'a vu, les azimuts de 0° à 360° en partant du Sud et allant vers l'Ouest, dans le sens du mouvement diurne apparent. On emploie souvent d'autres conventions. Ainsi, on peut considérer l'azimut comme l'angle au zénith du

triangle de position ; il est alors le supplément à 180° de celui que nous considérons. Dans ce cas, on le compte de 0° à 180°, du Nord vers l'Est et vers l'Ouest, en l'affectant du signe + dans ce dernier cas, du signe — vers l'Est.

Dans la régulation des compas, on est convenu de compter l'azimut de 0° à 360° en partant du Nord et allant vers l'Est.

Dans la pratique habituelle de la navigation, l'azimut est l'angle inférieur à 90° compté à partir du méridien : il se compte donc du Nord vers l'Est et l'Ouest et du Sud vers l'Est et l'Ouest.

Nord 25° Ouest équivaut pour nous à $A = 155°$.

Nous serons amenés à considérer quelquefois l'angle du triangle de position, notamment quand nous ferons usage des analogies de Néper pour les calculs : il ne faut donc pas perdre de vue ces conventions : les formules de Trigonométrie sphérique donnent l'azimut à partir du pôle élevé ; celles de la transformation des coordonnées le comptent à partir du point sud de l'horizon.

Une *lunette méridienne* munie d'un micromètre à fil mobile donne directement l'azimut de tout point visible dans son champ, c'est-à-dire voisin du méridien. On pointe ce point au moyen du fil mobile : la différence entre la lecture ainsi faite et celle qui correspond au fil moyen, réduite en arc, donnera l'angle entre la mire et le fil moyen. Connaissant les corrections instrumentales, l'azimut du fil moyen se calcule par l'expression

$$c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin(\delta - \lambda) \qquad (\S\ 49),$$

dans laquelle $\delta - \lambda$ est remplacé par la distance zénithale apparente de l'objet terrestre (positive vers le Sud, négative vers le Nord) ; c, i, a doivent être exprimés en arc. Pointant au Sud, le fil sera à l'Est du méridien, si la correction est positive, à l'Ouest, si elle est négative ; l'inverse a lieu si l'on pointe au Nord.

La différence d'azimut du fil moyen et de la mire est égale à l'angle mesuré au micromètre, divisé par le sinus de la distance zénithale apparente de la mire. L'azimut de celle-ci se trouve ainsi déterminé, et en substituant un théodolite à la lunette méridienne, on aura par là l'azimut d'un point quelconque.

Ce procédé est susceptible d'une grande précision.

Il peut s'appliquer avec un théodolite à lunette centrée, lorsqu'on n'a pas de lunette méridienne. On installe la lunette dans le méri-

dien comme lunette méridienne : on détermine ses corrections comme celles de la lunette méridienne par des observations de passages, nivellement, retournement. On calcule l'expression $c + a$ et l'on fait la lecture L du limbe qui correspond à cette position de la lunette.

Si les divisions vont en croissant à droite, la lecture du méridien vrai sera $L + c + a$; elle sera $L - c - a$ si les divisions croissent de droite à gauche.

Cette méthode est à recommander pour la Géodésie ; en voyage, elle est d'une application rare parce qu'il n'arrive presque jamais qu'on dispose d'un signal terrestre visible la nuit.

114. — Azimut par les hauteurs correspondantes.

La méthode des hauteurs correspondantes peut aussi donner la direction du méridien, mais l'observation est assez délicate si l'on cherche l'exactitude. Il faut en effet observer l'astre aux instants précis où il est pointé par les deux fils du réticule : et ce double pointé n'est pas aussi facile à exécuter qu'un pointé simple, surtout avec un astre à grand diamètre apparent. Il faut maintenir la tangence ou la bissection avec le fil vertical pendant qu'on suit le déplacement en hauteur, et arrêter le mouvement à l'instant précis où l'astre passe au fil horizontal. La moyenne des lectures du cercle azimutal qui correspondent aux pointés avant et après le passage au méridien donne la lecture correspondante au méridien. Cette méthode a les inconvénients de la même méthode appliquée à la détermination de l'heure : elle a de plus celui de partager l'attention entre deux phénomènes distincts. Mais comme d'autre part elle offre l'avantage de ne pas exiger l'emploi d'un chronomètre et d'être indépendante de la latitude, il est bon de la mentionner. Elle revient en principe, au tracé de la méridienne par le *gnomon*.

Voici comment on peut observer le Soleil. Avant midi, la lunette étant calée en hauteur, on suit le mouvement de cet astre en azimut ; à l'instant où le bord supérieur touche le fil horizontal et le bord Ouest le fil vertical, on fait la lecture ; puis, à l'aide du mouvement azimutal, on suit l'astre jusqu'au moment où son bord inférieur quitte le fil horizontal et son bord Est le fil vertical, et l'on fait une nouvelle lecture. La moyenne de ces deux lectures ne

correspond pas exactement à l'azimut du centre qui répond à la hauteur du centre : car la différence d'azimut entre le centre et le bord varie avec la hauteur. Mais si l'on fait les mêmes observations après midi en permutant les noms des bords, en d'autres termes si l'on observe successivement les bords qui mordent et ceux qui démordent, on sera dans des conditions parfaitement symétriques de celles du matin ; la moyenne des lectures extrêmes doit être égale à celle des lectures intermédiaires et donner la direction du méridien.

Il n'y a pas grand intérêt à tenir compte pour le Soleil et les planètes de la variation de distance polaire, eu égard au degré de précision que comporte la méthode. Il n'y aurait à s'en préoccuper que pour la Lune. Dans ce cas, on peut négliger la parallaxe d'azimut ; mais il est nécessaire de connaître approximativement la hauteur du centre, afin de calculer la parallaxe en hauteur et la distance azimutale du centre au bord observé ; comme un seul bord de l'astre est généralement observable, la méthode perd tous ses avantages de simplicité.

En effet, la hauteur du centre aux deux instants n'est plus la même, le demi-diamètre apparent et la parallaxe sont différents aussi : toute symétrie a donc disparu, et il est nécessaire de calculer tous ces éléments et de traiter le cas comme celui d'une variation de hauteur, avec cette circonstance qu'ici la variation dépasse un demi-degré et que l'application des formules différentielles cesse d'être légitime.

On calculerait la variation d'azimut correspondant à la variation de distance polaire par la formule différentielle

$$dA = d\delta \frac{\sin\delta}{\sin\lambda \sin\zeta \sin A} = \frac{d\delta}{\sin\lambda \sin P}. \tag{30}$$

Pour en finir avec cette question des hauteurs correspondantes, nous ferons encore remarquer que deux hauteurs correspondantes d'une étoile, avec mesure des hauteurs, détermination de l'heure au compteur et lectures d'azimut, permettent théoriquement de déterminer, à la fois, la correction du compteur, l'azimut et la colatitude : cette dernière par la formule des cotangentes

$$\sin A \cot P = \cot\zeta \sin\lambda - \cos\lambda \cos A.$$

Il y a une double solution : les deux solutions sont égales quand

$A = 90^\circ$ (instrument des passages au premier vertical). Il serait facile de discuter les conditions de précision et de possibilité : nous n'y insisterons pas, cette observation n'étant pas très facile.

En dehors de ces méthodes, on peut déterminer l'azimut d'un astre en fonction de son angle horaire ou en fonction de sa distance zénithale, quand la colatitude est connue.

115. — Azimut par l'angle horaire.

Le chronomètre étant supposé réglé sur le temps du lieu, il suffit de noter l'heure à laquelle on pointe un astre en azimut pour connaître l'angle horaire de l'astre à cet instant.

1° On peut employer les formules

$$-\sin\zeta\cos A = \cos\delta\sin\lambda - \sin\delta\cos\lambda\cos P, \qquad \sin\zeta\sin A = \sin\delta\sin P,$$

d'où l'on déduit

$$(31)\qquad -\cot A = \frac{\cot\delta\sin\lambda - \cos\lambda\cos P}{\sin P} = \frac{\cot\delta\sin\lambda}{\sin P}\left(1 - \frac{\cot\lambda\cos P}{\cot\delta}\right),$$

formule appropriée au calcul logarithmique, si l'on se sert des Tables de logarithmes d'addition. L'angle est donné par sa cotangente, la formule est donc d'application générale ; il n'y a pas de doute possible sur le signe, puisqu'on sait toujours si l'astre est à l'est ou à l'ouest du méridien.

2° La formule ci-dessus peut être appropriée à l'usage des logarithmes ordinaires en calculant un angle auxiliaire x déterminé par la relation

$$(32)\qquad \operatorname{tang} x = \cos P\operatorname{tang}\delta \quad \text{équivalente à} \quad \frac{\cos P}{\sin x} = \frac{\cot\delta}{\cos x},$$

et l'on trouve d'après cela

$$(33)\qquad -\cot A = \cot\delta\,\frac{\sin(\lambda - x)}{\cos x\sin P} = \frac{\cot P\sin(\lambda - x)}{\sin x}.$$

3° Le calcul le plus élégant et le plus facile repose sur l'emploi des analogies de Néper :

$$(34)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A_1 + \varpi) = \cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta - \lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \lambda)},$$

$$(35)\qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A_1 - \varpi) = \cot\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta - \lambda)}{\sin\frac{1}{2}(\delta + \lambda)},$$

et l'on a l'avantage de calculer par la même occasion l'angle à l'astre ϖ. Ces formules s'appliquent au triangle de position : on trouvera toujours pour A_1 un angle compris entre 0° et 180°. L'azimut A, compté d'après nos conventions, sera donné par les formules

$$A = 180° - A_1, \quad \text{si l'astre est à l'Ouest,}$$

$$A = 360° - A_1, \quad \text{si l'astre est à l'Est.}$$

Pour la facilité du calcul, on prendra P tel quel dans le premier cas, et dans le deuxième, son supplément à 360° avec le signe —.

Pour l'observation du Soleil au théodolite, on pointe au bord de l'astre en azimut à l'instant où son centre est *sensiblement* sur le fil horizontal : on arrête le mouvement azimutal un peu avant cet instant, et l'on suit le mouvement en notant les battements du chronomètre et appréciant l'heure du contact.

La lecture correspondante au centre se déduit de celle du bord en ajoutant ou retranchant, selon le cas, la correction x déterminée par la relation

$$\sin x = \frac{\sin \frac{1}{2} D}{\sin \zeta} \tag{36}$$

ou sensiblement

$$x = \frac{\frac{1}{2} D}{\sin \zeta}$$

tant que ζ n'est pas petit. Le principe des observations croisées ne peut plus s'appliquer aussi simplement que dans le cas des hauteurs, parce que la correction n'est pas constante : l'angle horaire moyen des deux pointés ne correspond plus, en effet, à l'azimut moyen. On peut pourtant arriver à éliminer sensiblement cette cause d'erreur en observant comme suit.

Pour fixer les idées, admettons qu'on fasse l'observation après midi : on commence par observer le bord Ouest dans la position directe, le bord Est dans la position inverse ; puis on observera le bord Est dans la position directe et le bord Ouest dans la position inverse. Les observations croisées ainsi éliminent à peu près les erreurs instrumentales. Les lectures qui correspondent aux bords observés étant L, L′, L″, L‴, celles du centre seront

$$L - \frac{\frac{1}{2} D}{\sin \zeta}, \qquad L' + \frac{1}{2} \frac{D}{\sin \zeta'}, \qquad L'' + \frac{\frac{1}{2} D}{\sin \zeta''}, \qquad L''' - \frac{\frac{1}{2} D}{\sin \zeta'''}.$$

La somme des deux premières sera

$$L + L' + \frac{D \cos\frac{1}{2}(\zeta + \zeta') \sin\frac{1}{2}(\zeta - \zeta')}{\sin\zeta \sin\zeta'};$$

elle diffère de la moyenne $L + L'$ d'une quantité où $\sin\frac{1}{2}(\zeta - \zeta')$ entre en facteur, et qui est, par conséquent, négative le soir.

La moyenne des troisième et quatrième lectures réduites

$$L'' + L''' + D \frac{\cos\frac{1}{2}(\zeta'' + \zeta''') \sin\frac{1}{2}(\zeta''' - \zeta'')}{\sin\zeta'' \sin\zeta'''}$$

diffère de $L'' + L'''$ d'une quantité où $\sin\frac{1}{2}(\zeta''' - \zeta'')$ entre en facteur et qui est positive le soir. Ces quantités ne sont pas grandes si les observations sont rapidement faites, mais elles ne sont pas négligeables. Mais si l'on prend la somme des quatre lectures corrigées, groupant la première et la quatrième, la deuxième et la troisième, on voit qu'elle diffère de la somme $L + L' + L'' + L'''$ de

$$\frac{D \cos\frac{1}{4}(\zeta + \zeta' + \zeta'' + \zeta''') \sin\frac{1}{4}(\zeta - \zeta' - \zeta'' + \zeta''')}{\sin\frac{\zeta' + \zeta''}{2} \sin\frac{\zeta + \zeta'''}{2}}$$

et qu'on peut annuler le deuxième facteur $\sin\frac{1}{4}(\zeta - \zeta' - \zeta'' + \zeta''')$ si les distances zénithales sont en progression arithmétique, ce qui arrivera en espaçant également les observations. L'erreur commise en prenant la moyenne des quatre lectures pour la lecture du centre sera donc incomparablement plus petite que si l'on ne groupe que deux observations. On remarquera que si l'on observait alternativement les deux bords, cette compensation ne s'établirait pas. Un groupe complet doit se composer de deux observations consécutives du même bord, encadrées entre deux observations du bord opposé.

Si l'on avait à calculer des observations faites en négligeant cette précaution, il faudrait calculer pour chaque pointé la correction (36).

Il n'est pas nécessaire d'avoir observé ζ. On peut calculer une valeur suffisamment approchée de sin ζ par la formule

$$\sin\zeta = \sin P \frac{\sin\delta}{\sin A}$$

dans laquelle on prend pour A une valeur approchée résultant du calcul déjà fait : de sorte que la correction est

$$(36\,bis) \qquad \sin x = \frac{\sin A \sin \frac{1}{2} D}{\sin P \sin \delta} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\frac{1}{2} D \sin A}{\sin P \sin \delta}.$$

On peut éviter d'avoir égard à ces considérations, si l'on pratique la méthode du pointé au centre, en interceptant par le fil horizontal un très petit segment que l'on bissecte par le fil vertical. Nous avons déjà parlé de cette méthode d'observation, elle donne de bons résultats, surtout quand le mouvement en azimut est lent. Il est nécessaire de vérifier avec soin la verticalité du fil; pour mieux faire disparaître les erreurs dues à ce défaut de rectification, on fera quatre observations, deux dans la position directe et deux dans la position inverse : les deux observations relatives à chaque position se feront en bissectant d'abord un segment sur le bord qui mord, puis un segment sur le bord qui démord.

Exemple. — Le 28 mai 1878, au matin, on a observé à Tourane (Ilot de l'Observatoire).

POSITION de la lunette.	HEURE au compteur.	LECTURE azimutale moyenne.	POINT OBSERVÉ.
		° ′ ″	
G	»	168.25.42	Culao Cham, grand sommet.
G	$8^h\ 6^m\ 12^s,0$	213.20.22	⊙|
G	7 15	212.39.35	|⊙
D	»	348.24.50	Culao Cham, grand sommet.
D	10 57 ,2	33.15. 4	⊙|
D	12 57 ,2	32.32.47	|⊙
D	»	348.24.57	Culao Cham, grand sommet.

La correction du compteur obtenue au moyen de distances zénithales du Soleil observées immédiatement avant l'azimut est de $4^m\,50^s,0$ sur le temps vrai local. Longitude $7^h\,3^m\,42^s$ E.

$$\lambda = 73^\circ\,53'\,30''$$
$$\delta = 68\ 35\ 0$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta - \lambda) = -\ 2\ 39\ 15$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta + \lambda) = \quad 71\ 14\ 15$$

Moyenne des heures.	G...	$8^h\ 6^m 43^s,5$	D...	$8^h\ 11^m 57^s,2$	
Correction.....		$4\ 50$		$4\ 50$	
Heure vraie.....		$8^h\ 11^m 33^s,5$		$8^h\ 16^m 47^s,2$	matin.
ou.....		$-3\ 48\ 26,5$		$3\ 43\ 12,8$	
P.....		$-57°\ 6'\ 38''$		$55°\ 48'\ 12''$	
$\frac{1}{2}$P.....		$-28\ 33\ 19$		$27\ 54\ 6$	

Cela fait, on dispose ainsi le calcul :

$\frac{1}{2}(\delta-\lambda)$.....	log cos 9,99953	log sin 8,66565			
$\frac{1}{2}(\delta+\lambda)$.....	log cos 9,50738	log sin 9,97629			
Différence.....	0,49215	8,68936	0,49215	8,68936	
log cot $\frac{1}{2}$P.....	0,26423	0,26423	0,27612	0,27612	
	0,75638	8,95359	0,76827	8,96548	
$\frac{1}{2}(A_1+\varpi)$...	$80°\ 3'39''$		$80°\ 19'27''$		
$\frac{1}{2}(A_1-\varpi)$..... ...	$-5\ 8\ 7$		$-5\ 16\ 37$		
A_1	$74\ 55\ 32$		$75\ 2\ 50$		
Lecture moyenne...	$212\ 59\ 58$		$32\ 53\ 55$		
Lecture du Nord...	$287\ 55\ 30$ G		$107\ 56\ 45$ D		
Culao Cham.....	$168\ 25\ 42$		$348\ 24\ 53$		
Azim.de Culao Cham.	$119\ 29\ 48$ du N. vers l'E.		$119\ 31\ 52$		
A.....	$299\ 29\ 48$		$299\ 31\ 52$		

On n'a pas pris pour les observations les précautions indiquées plus haut. Il faut donc les corriger. On calcule pour cela les valeurs des quatre angles horaires correspondant aux quatre observations : par exemple

$$\begin{array}{r} 8^h\ 6^m 12^s \\ 4\ 50 \\ \hline 8^h\ 11^m\ 2^s \end{array} = -3^h 48^m 58 = -57°\,14'\,30''$$

On trouve pour les trois suivants

$$56°\,58'\,45'',\quad 56°\,3'\,12'',\quad 55°\,33'\,12'',$$

les Tables donnent $\frac{1}{2}D = 15'\,49'' = 949''$. On prend $A = 74°\,59'$ pour la série :

log $\frac{1}{2}$D....	= 2,9773	
log sin A..	= 9,9848	
colog sin δ.	= 0,0311	
Somme ...	2,9932	log constant qui sert pour les quatre calculs.
log sin P..	9,9247	
log x.....	3,0685	
	$x = 1171'' = 19'\,31''$	

Les autres x sont

$$19'34'', \quad 19'47'', \quad 19'54'';$$

on a donc les lectures réduites au centre du Soleil

213°20′ 22″	212°39′35″	33°15′ 4″	32°32′47″
— 19.31	+ 19.34	— 19.47	+ 19.54
213.00.51	212.59. 9	32.55.17	32.52.41
Moyennes....	213°0′0″		32°53′59″

On voit que l'erreur est de peu d'importance.

Voici le calcul des preuves de ces azimuts par les formules (32) et (33) :

δ... 68°35′ 0″	log tang... 0,40646		
P... 57 6 38	log cos.... 9,73482		log cot.. 9,81067
	log tang x 0,14128	$x = 54^{\circ}\ 9'30''$	cologsin. 0,09117
		$\lambda = 73.53.30$	
		$\lambda - x = 19.44.0$	log sin.. 9,52845
			log (— cot A). 9,43029

d'où $A = 254°55'35''$.

Le reste du calcul s'achève comme ci-dessus.

116. — Azimut par la distance zénithale.

L'observation simultanée de l'azimut et de la distance zénithale ne comporte pas une très grande précision. La méthode s'applique pourtant assez bien avec le petit théodolite. Lors même qu'il s'agit du Soleil, l'observation peut se faire avec une exactitude suffisante pour les besoins de la Topographie, pourvu que la lunette ait un champ étendu et un assez faible grossissement, de manière que l'œil puisse embrasser simultanément les contacts des deux bords avec les deux fils croisés. On peut faire ajouter dans ce but aux deux fils du petit théodolite quatre autres fils formant un carré dont le centre est occupé par la croisée des fils (1) et dont les distances

(1) Cette addition est avantageuse à certains égards; par ce moyen la lunette est transformée en stadia. A d'autres points de vue et notamment pour les observations de nuit, le trop grand nombre de fils pourrait occasionner des méprises.

angulaires aux fils primitifs sont à peu près égales à la valeur moyenne du demi-diamètre du Soleil. On arrive ainsi à encadrer assez bien l'astre, et son centre se trouve alors pointé simultanément en hauteur et en azimut.

M. Marié-Davy a fait adapter cette disposition à son petit théodolite-boussole. A défaut d'un appareil de ce genre, on croisera les observations en prenant soin de faire les groupes de quatre d'après la règle indiquée plus haut. Si le grossissement est trop fort pour permettre cette marche, on observera les hauteurs avant et après les azimuts; il est nécessaire alors de noter les heures, afin d'interpoler la distance zénithale pour l'instant de l'observation d'azimut.

C'est encore ce procédé qu'il convient d'employer quand on opère avec des instruments à réflexion ou avec le cercle répétiteur. Quand on est assisté d'un aide et qu'on dispose de deux instruments, on peut éviter l'usage du chronomètre en faisant faire l'observation de hauteur pendant qu'on prend la distance azimutale: on indique alors par un top l'instant du contact que l'on observe, et c'est au même instant que l'aide doit noter la hauteur.

Un observateur exercé, disposant de deux instruments, peut arriver encore à un résultat acceptable dans bien des cas, en opérant comme suit. Avec le premier instrument on prépare l'observation d'azimut en amenant l'astre et le point terrestre dans le champ. On prend alors avec le deuxième sextant la hauteur du Soleil et l'on fait la lecture. On reprend l'instrument n° 1; le contact est déjà presque établi: un temps très court suffit pour le rendre exact; on établit donc le contact d'un des bords, on fait la lecture; ensuite le contact du deuxième bord, on fait encore la lecture; puis revenant au sextant n° 2, on reprend la hauteur de l'astre, qui est encore dans le champ. Si l'on opère dans les circonstances favorables et si l'on est bien exercé, il est permis d'admettre qu'on emploie le même temps pour chaque opération, et que la moyenne des hauteurs correspond bien à la moyenne des pointés azimutaux.

La distance zénithale une fois connue, on peut la faire servir au calcul de l'angle horaire, et trouver l'azimut par les méthodes indiquées ci-dessus.

On peut aussi le calculer directement.

1° La formule

$$\cos\delta = \cos\lambda\cos\zeta - \sin\lambda\sin\zeta\cos A$$

donne

$$\cos A = -\frac{\cos\delta}{\sin\lambda\sin\zeta}\left(1 - \frac{\cot\zeta\cot\lambda}{\cos\delta}\right), \tag{37}$$

et l'on peut employer les logarithmes d'addition. On peut encore recourir à un angle auxiliaire.

2° Les formules (14), (15), (16) s'appliquent en y permutant A et P, δ et ζ: elles deviennent

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(S-\lambda)\sin(S-\zeta)}{\sin\zeta\sin\lambda}, \tag{38}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin S\sin(S-\delta)}{\sin\zeta\sin\lambda}, \tag{39}$$

$$\tang^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(S-\lambda)\sin(S-\zeta)}{\sin S\sin(S-\delta)}. \tag{40}$$

La distance zénithale doit être corrigée de réfraction et parallaxe.

Azimut en mer près d'Obock. — Le 6 février 1885, étant en vue d'Obock, par longitude $2^h 43^m 44^s$ E. $\lambda = 78°4'$, à $7^h 35^m$ du matin, temps vrai approché, on a observé la distance du Soleil à la tour Godin.

Élévation de l'œil $8^m,45$ $\theta = 30°$ Baromètre $= 762^{mm}$.

Heure temps vrai	$19^h 35^m$ (le 5 février).
Longitude	2 44
Temps vrai Paris	$16^h 51^m$
Déclinaison à midi, le 5	$-15°52'3'',9$ Sud.
Var. hor^e p^r $8^h 25^m = 45'',96$	
$45,96 \times 16^h,85$	+ 12 54,4
Déclinaison	$-15°39'9'',5$
Tour Godin départ. — A droite,	
centre du Soleil	87.50
Hauteur du bord inférieur	18.11
Dépression	— 5 21″
	18° 5′39″
Réfraction — parallaxe	— 2 34

	18° 3′ 5″		
½ diamètre	+ 16 15	λ	78° 4′ 0″
Hauteur ⊖	18° 19′ 20″	ζ	71.40.40
		δ	105.39.10
		2 S	255.23.50
log sin...	9,89831	S	127.41.55
log sin....	9,57444	S — δ	22. 2.45
colog sin λ	0,00949		
colog sin δ	0,01641		
log cos² ½ A...	9,49865		
moitié	9,74932		55°50′35″
		double.	111 41 10

L'emploi de la formule suppose qu'on considère l'angle du triangle au lieu de l'angle extérieur.

L'azimut est donc en réalité

$$A \oplus = 291\ 41\ 10 \quad \text{ou} \quad -68°18'50''.$$

Nous allons compléter cet exemple par une application anticipée des formules du Paragraphe 121, afin de donner le calcul dans son ensemble.

Pour le calcul de la distance angulaire azimutale, on a observé la hauteur de la tour égale à 0°30′, et corrigée de la dépression 0°24′40″ la hauteur apparente du centre du Soleil 18°21′50″ s'obtient en faisant en sens inverse la correction de la réfraction,

			° ′ ″
		ζ′	89.35.20
		ζ	71.38.10
		Δ	87.50. 0
		2 S	249.03.30
log sin	9,91584	S	124.31.55
log sin	9,77639	S — Δ	36.41.45
colog sin z′.	0,00001		
colog sin z.	0,02270		
	9,71494		
½	9,85747	log cos	43 55 35
		double	87 51 10

angle compté du Soleil, vers la gauche,

Azimut ⊕	291 41 10
Azimut de la tour..	203 50 00

ce qui équivaut au N. 23°50′ E.

Une construction graphique, faite avec un rapporteur ordinaire, avait donné N. 23° 40′ E. erreur, 10′.

Il y aurait à faire sur la détermination des azimuts des remarques du même genre que sur la détermination de l'angle horaire, relativement aux erreurs introduites dans le calcul des observations en série quand on suppose le mouvement en azimut proportionnel à celui en angle horaire ou à celui en hauteur. La marche à suivre serait identiquement la même, surtout pour ce dernier cas, en permutant toujours P et A, ζ et δ.

Mais cette discussion facile n'aurait pas grand intérêt au point de vue des observations faites en voyage.

Une erreur de 1′ sur l'angle horaire donne une erreur de 1′ sur la longitude, soit une erreur itinéraire de 1855 mètres à l'équateur. Une erreur égale sur l'azimut d'un point éloigné de 50 kilomètres, distance déjà grande pour la Géodésie, ne déplace le point que de 15^m dans la direction perpendiculaire à son azimut. Cette erreur est du même ordre que celles qui résultent de la forme imparfaite des signaux visés dans les voyages d'exploration; on voit combien on a besoin d'une plus grande précision pour les longitudes et latitudes que pour les azimuts.

Alors même qu'on détermine l'azimut par la hauteur et qu'on le calcule par les formules que nous venons de donner, il est bon de se servir de la hauteur pour calculer l'angle horaire, et de recalculer l'azimut en fonction de celui-ci. Les vérifications de calcul sont toujours utiles, nous dirons volontiers indispensables. Une observation isolée, un calcul sans vérification n'ont pour ainsi dire aucune valeur; c'est là un point sur lequel on ne saurait trop insister. Nous pourrions citer nombre d'erreurs commises par de très bons observateurs ou calculateurs, uniquement parce qu'ils avaient perdu de vue cette règle fondamentale des Sciences d'observation.

Les vérifications peuvent se faire d'ailleurs par les méthodes graphiques que nous avons indiquées, et dont la précision est suffisante, notamment en ce qui concerne les azimuts. Ces méthodes permettent de se rendre compte à vue du degré d'exactitude qu'on peut espérer atteindre.

117. — Formules approchées pour les petites hauteurs et les basses latitudes.

On peut abréger le calcul dans certains cas et substituer aux formules rigoureuses des formules approchées.

Supposons d'abord la hauteur à l'instant de l'observation petite et substituons-la à la distance zénithale dans le calcul

$$h = 90^\circ - \zeta.$$

La formule

$$\cos\delta = \cos\lambda \sin h - \sin\lambda \cos h \cos A$$

dans laquelle on fait $h = 0$, donne une valeur approchée A_1,

$$\cos A_1 = -\frac{\cos\delta}{\sin\lambda}. \tag{41}$$

Supposons maintenant que h, sans être nul, soit assez petit pour que son carré soit négligeable, l'azimut, au lieu d'être égal à A_1, sera égal à $A_1 + \varepsilon$, et l'on aura

$$\cos\delta = h\cos\lambda - \sin\lambda \cos(A_1 + \varepsilon). \tag{42}$$

Retranchons (41) de (42), il vient

$$0 = h\cos\lambda + \sin\lambda\left(\cos A_1 \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\sin A_1\right),$$

ce qui montre que ε est du même ordre que h; négligeant son carré,

$$\varepsilon = -h\,\frac{\cot\lambda}{\sin A_1}. \tag{43}$$

Les formules (41) et (43) résolvent le problème en y joignant $A = A_1 + \varepsilon$.

La forme de la valeur de ε montre que ce calcul est surtout applicable sous les basses latitudes, où le mouvement en azimut est presque vertical pour les faibles hauteurs, et pour des azimuts assez voisins de 90°. On voit, en effet, que l'erreur commise sur ε est sensiblement $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 1'' \cot A_1$, et puisque ε est d'autant plus petit que λ s'approche davantage d'être droit, son carré, ou l'erreur commise sur sa détermination, sera négligeable aux basses latitudes.

Si, par exemple, on s'impose 1′ comme limite de l'erreur tolérée, on trouve, pour $\delta = 90° \pm 23°$ et $\lambda = 45°$,

$$\varepsilon < 1°40'40'' \text{ et } h < 1°23'20''.$$

Pour $\lambda = 70°$, au contraire, et dans les mêmes limites de δ (qui comprennent toutes les distances polaires du Soleil), on peut aller jusqu'à $h = 5°$ ce qui fait $\varepsilon = 2°$. Les limites s'étendent à mesure que δ et λ se rapprochent de 90°.

118. — Amplitudes ortive et occase.

L'amplitude d'un astre est l'angle que son vertical fait avec le premier vertical à l'instant du lever ou du coucher. On trouve dans certains Traités de Navigation des Tables d'amplitudes du Soleil toutes calculées. Mais généralement ces Tables sont construites d'après la formule des triangles rectilatères

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\sin \lambda}$$

en posant $A = 90° \pm a$. Or, la distance zénithale, à l'instant du lever ou du coucher, est altérée par la réfraction ; elle est de 90°34′ pour le centre, et à l'instant où le bord inférieur du Soleil touche l'horizon, la distance zénithale du centre est 90°18′. Les formules approchées que nous venons de donner se prêtent au calcul de la correction qu'il faut faire aux amplitudes des Tables. On calculera ε pour $h = -0°18'$ si c'est le bord inférieur qui touche l'horizon, et $h = -0°50'$ si c'est la disparition de l'astre ; enfin $h = -0°34'$ si l'horizon coupe le Soleil par moitié. La méthode, comme on l'a vu, s'applique toujours à ces cas, sauf pour les hautes latitudes, où l'observation elle-même donne peu de précision.

119. — Azimut par les digressions.

On a vu plus haut (§ 100) comment l'observation des digressions des circompolaires donne la colatitude. L'azimut entre dans ce calcul comme donnée d'observation. La moyenne des lectures faites aux deux digressions d'une même étoile donne la lecture correspondante au pôle élevé. Pour préparer l'observation, on calcule l'angle

horaire par la formule des triangles rectangles

$$\cos P = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\lambda}$$

et l'azimut de la digression satisfait à la condition

$$\sin A = \frac{\sin\delta}{\sin\lambda}.$$

Il sera calculé avec d'autant plus de précision qu'il sera plus petit, c'est-à-dire que δ sera plus voisin de zéro. Il convient donc de choisir les étoiles les plus voisines du pôle, d'autant mieux qu'à leur digression elles sont plus distantes du zénith que les étoiles plus éloignées, et que les grandes distances zénithales sont favorables à l'exactitude de la mesure des azimuts. Cette condition est inverse de celle qui favorise l'observation de la colatitude. Les digressions, en effet, donnent particulièrement bien l'azimut sous les basses latitudes, elles donnent mieux la colatitude dans les régions plus voisines du pôle. Nous renvoyons au Paragraphe 101 pour la formule qui permet de réduire les observations faites dans le voisinage de la digression à l'instant de celle-ci.

On déduira aisément aussi des développements que nous avons donnés à ce propos le moyen de calculer l'azimut par les digressions de deux étoiles. Le seul avantage de cette méthode est de dispenser de la connaissance de la colatitude, mais elle n'est pas d'un usage très répandu.

Si l'on observe les deux digressions d'un astre circompolaire à déclinaison variable, on ramène l'un des azimuts à la même distance polaire que l'autre par la formule

$$dA = -d\delta\,\frac{\cot\delta}{\cot A}$$

que nous laissons au lecteur le soin de discuter.

120. — Azimut par la Polaire.

La lenteur du mouvement de la Polaire rend l'observation de cet astre aussi précieuse pour l'azimut que pour la colatitude. Le calcul se ferait comme pour toute autre étoile. On pourrait aussi profiter

de la petitesse de δ pour développer l'azimut en série; mais il n'y a pas lieu de donner ici de méthodes pour cela. Le calcul est tout fait dans la *Connaissance des Temps,* qui renferme des Tables d'azimuts de la Polaire, calculées pour diverses latitudes et diverses heures.

121. — Azimut des points terrestres.

Si l'observation est faite au théodolite, l'angle entre l'astre et la mire est réduit à l'horizon, et, en le combinant avec l'azimut de l'astre que nous venons de calculer, on en déduit immédiatement l'azimut de la mire.

Si l'on se sert d'instruments à réflexion ou du cercle répétiteur, on mesure l'angle dans le plan de l'astre et de la mire. Il faut alors le réduire à l'horizon. Pour cela, il est nécessaire de connaître les distances zénithales *apparentes* de l'astre et de la mire, ζ et ζ'.

Si D est la distance angulaire mesurée entre le centre de l'astre et la mire, on en déduit la distance Δ réduite à l'horizon, au moyen des formules

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sin(S-\zeta)\sin(S-\zeta')}{\sin\zeta\sin\zeta'},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sin S\sin(S-D)}{\sin\zeta\sin\zeta'},$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sin(S-\zeta)\sin(S-\zeta')}{\sin S\sin(S-D)},$$

dans lesquelles $2S = \zeta + \zeta' + D$ (Δ est l'angle opposé au coté D).

Quand ζ et ζ' sont voisins de 90°, on peut employer des formules approchées. Celle qui est recommandée dans le *Traité de Géodésie* de Bégat, et que nous nous dispenserons de démontrer, est

$$\Delta = D + \left(90^\circ - \frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D\sin 1'' - \left(\frac{\zeta-\zeta'}{2}\right)^2 \cot\tfrac{1}{2}D\sin 1'';$$

elle s'applique aux hauteurs inférieures à 3°. Les angles $90^\circ - \left(\frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)$ et $\frac{\zeta-\zeta'}{2}$ sont exprimés, bien entendu, en secondes.

La formule fondamentale

$$\cos D = \cos\zeta \cos\zeta' + \sin\zeta \sin\zeta' \cos\Delta$$

nous montre que si l'une des distances zénithales est égale à 90°, ζ' par exemple, et si D lui-même est égal à 90° sans que ζ le soit, Δ est aussi un angle droit. Dans ce cas, la réduction à l'horizon est nulle.

Si l'une des hauteurs est petite, celle de l'objet terrestre par exemple, on se servira avec avantage d'une formule tout à fait analogue à celle que nous donnons plus haut pour le calcul approximatif de l'azimut, et dont la démonstration est identiquement la même.

On calculera un angle Δ_1 par la formule

$$\cos\Delta_1 = \frac{\cos D}{\sin\zeta}$$

et en posant $h' = 90° - \zeta'$

$$\Delta = \Delta_1 + h' \frac{\cot\zeta}{\sin\Delta_1}.$$

Pour le succès de la méthode, il ne faut pas que Δ_1 soit trop petit.

Il va sans dire que cette formule s'applique *a fortiori* quand l'astre et la mire ont de faibles hauteurs.

Si la mire est à l'horizon de la mer, sa hauteur est négative et égale en valeur absolue à la dépression apparente.

Quand on observe la distance d'un bord du Soleil à la mire, on y ajoute ou l'on en retranche le demi-diamètre, selon que le contact est établi avec le bord voisin ou le bord opposé. On peut se dispenser de cette correction en observant successivement le contact des deux bords. Nous avons donné au Paragraphe 116 un exemple de calcul numérique.

122. — Discussion des observations d'azimut.

La formule différentielle (7) du Paragraphe 3 nous donne dans le cas actuel

$$\sin\zeta\, dA = -\sin\varpi\, d\delta + \cos\zeta \sin A\, d\lambda + \sin\delta \cos\varpi\, dP.$$

On voit tout d'abord que $\sin\zeta$ entrant au dénominateur dans les valeurs de dA, il est avantageux de le rendre aussi grand que possible, ce qui conduit à observer l'azimut à de faibles hauteurs. On est conduit à la même conclusion si l'on cherche les circonstances les plus favorables pour observer au théodolite. Il n'y a guère d'intérêt à se préoccuper de l'influence de l'erreur commise sur la distance polaire. Elle s'élimine au reste en observant symétriquement des deux côtés du méridien.

L'erreur commise sur la colatitude a pour facteur $\cot\zeta \sin A$.

Elle est nulle quand on observe dans le méridien : mais alors l'erreur provenant de dP est maximum. Elle est nulle aussi pour $\zeta = 90^\circ$, ce qui conduit encore à observer près de l'horizon. Elle est infinie pour $\zeta = 0$, ce qui veut dire que dans ces conditions il n'y a plus d'azimut.

Dans la pratique pourtant il y a souvent avantage à ne pas laisser passer l'occasion d'observer dans le voisinage du méridien, ne fût-ce que parce que c'est aux environs de midi qu'on a généralement plus de chances d'apercevoir le Soleil.

L'erreur sur l'angle horaire a une influence d'autant moindre que δ est plus petit, ce qui a lieu pour les circompolaires. Elle est nulle aussi quand l'angle de position ϖ est droit, c'est-à-dire aux digressions : alors, en effet, le mouvement en azimut est nul.

En transformant la formule d'après les analogies des sinus,

$$dA = dP \frac{\sin\delta}{\sin\zeta}\cos\varpi = dP \frac{\sin A}{\sin P}\cos\varpi,$$

on voit que $\sin P = 1$ est une condition favorable.

Quand on observe l'azimut par le Soleil, il convient d'opérer le matin avant l'observation d'angle horaire, et le soir, après.

Si, au lieu de déterminer l'azimut par l'heure, on le détermine par la distance zénithale, on arrive à des conclusions analogues.

Différentions la formule

$$\cos\delta = \cos\zeta\cos\lambda - \sin\zeta\sin\lambda\cos A,$$

en n'y faisant varier que ζ et A, on a

$$dA = d\zeta \frac{\sin\lambda\cos\zeta\cos A + \cos\lambda\sin\zeta}{\sin\lambda\sin\zeta\sin A},$$

ce qui donne les deux relations

$$dA = d\zeta \frac{\cot \varpi}{\sin \zeta},$$

$$dA = d\zeta \frac{\cos \varpi}{\sin \lambda \sin P},$$

par où l'on reconnaît l'avantage des petites hauteurs, des angles horaires voisins de 6^h, et de l'angle de position droit.

L'angle de position est maximum dans le premier vertical : il convient donc d'observer dans ce plan quand l'astre y passe.

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION DE LA LONGITUDE GÉOGRAPHIQUE.

123. — Généralités.

La latitude, l'angle horaire et l'azimut peuvent se déterminer en un lieu quelconque au moyen d'instruments de mesure, sans qu'il y ait à se préoccuper de la position du méridien du lieu à la surface de la Terre : ce sont, à proprement parler, des déterminations absolues ; la verticale et le méridien d'un lieu sont des données primordiales. La longitude, au contraire, n'a de sens qu'autant qu'on la rapporte à un premier méridien, d'ailleurs arbitraire. Les méridiens initiaux les plus usités sont ceux de Paris, de Greenwich, de l'île de Fer (méridien conventionnel à 20° à l'ouest de celui de Paris), de San-Fernando, etc. On trouvera dans la *Connaissance des Temps* les longitudes des principaux Observatoires rapportées à Paris.

Le choix du premier méridien est sans intérêt pour le géographe. Il convient d'adopter celui pour lequel sont calculées les éphémérides dont on se sert. Pour la détermination des points d'une même contrée, il y a tout avantage à choisir un méridien local, auquel on rapportera les lieux voisins.

Puisqu'on sait déterminer l'heure locale, le problème des longitudes revient uniquement à connaître l'heure du premier méridien, dont la différence avec l'heure locale donne la différence de longitude. On peut prendre à volonté la différence des heures sidérales ou des heures temps moyen, pourvu qu'elles correspondent au même instant physique.

Tout phénomène qui se produit à un instant déterminé et qui peut être observé de deux lieux différents est propre à donner la différence de longitude de ces lieux. La lumière parcourant une longueur égale au rayon terrestre dans l'intervalle de $\frac{1}{50}$ de seconde

environ, tout phénomène lumineux peut être considéré comme instantané pour toute la Terre. Tels sont : les signaux de feu, les observations d'étoiles filantes, les éclipses de la Lune ou des satellites de Jupiter. Telle est aussi, mais à un moindre degré et avec des incertitudes plus grandes en ce qui concerne l'instantanéité, la transmission d'un signal électrique.

Si l'on dispose d'une horloge dont on connaît exactement à une époque donnée l'état absolu sur le premier méridien et la marche diurne ou variation d'état, on peut en conclure l'heure du méridien de départ pour un autre instant.

On peut enfin déduire l'heure du premier méridien de l'observation des coordonnées d'un astre dont la position varie avec le temps, et plus spécialement de la Lune.

Tels sont, en résumé, les principes des méthodes que l'on peut employer et que nous allons étudier successivement. Nous renvoyons au Paragraphe 22 pour les conventions relatives à la numération des longitudes et à leurs signes.

124. — Phénomènes instantanés. Signaux optiques.

Un signal optique peut se faire de jour au moyen d'un héliostat qu'on installe à l'une des stations et qu'on observe de l'autre à l'aide d'une lunette. A des instants convenus d'avance, l'observateur placé près de l'héliostat démasque celui ci dans la direction du deuxième observateur; chacun d'eux note à son chronomètre l'instant correspondant; on en déduit les heures locales et la différence des deux heures donne la différence de longitude. Il est bon de faire plusieurs signaux à des intervalles réguliers, correspondant à des nombres ronds de secondes du chronomètre de la station qui envoie le signal. Les différents systèmes de Télégraphie optique sont parfaitement appropriés à cet usage.

Cette méthode exige qu'on voie l'une des stations de l'autre (¹). Elle n'est sujette à d'autres erreurs que celles provenant de la détermination de l'état absolu et de l'appréciation de l'instant du phénomène. On réduit la première à fort peu de chose si l'on

(¹) Il est assez facile de la modifier et de faire les signaux en un point situé entre les deux observateurs, visible des deux, sans qu'ils se voient réciproquement.

observe l'heure avec soin, avec un bon instrument, avant et après les signaux. Les équations personnelles peuvent s'éliminer en permutant les observateurs, mais laissant à chacun le même rôle.

Soient en A l'heure t, appréciée $t + x$, par le premier observateur, en B, ce même instant t', apprécié $t' + x'$, par le deuxième observateur, la différence de longitude est $t' - t$; tandis qu'on trouve

$$l = t' - t + x' - x.$$

Après permutation, le premier observateur note en B l'instant T', apprécié $T' + x$; le deuxième en A, l'instant T, apprécié comme $T + x'$: la vraie différence est $T' - T$, on trouve

$$L = T' - T + x - x'.$$

Les différences $t' - t$ et $T' - T$ sont égales par hypothèse : on voit donc que si λ est la différence de longitude,

$$\lambda = T' - T = t' - t = l + x - x' = L + x' - x;$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{L + l}{2}.$$

L'équation personnelle peut varier pour la même personne, selon qu'elle produit le signal ou qu'elle l'observe; c'est pour cela qu'il faut que chacune fasse le même genre d'observations aux deux stations. Si l'on a deux héliostats, on peut alterner les deux opérations à chaque station.

Ce mode de procéder ne s'applique que de jour; on ne peut donc guère régler le chronomètre que par des observations du Soleil. Pourtant, avec une lunette méridienne du grossissement de 60 diamètres, on peut voir en plein jour les étoiles de première et de deuxième grandeur; on va jusqu'à la troisième grandeur par un ciel pur et quand le Soleil est bas et éloigné du méridien.

Les signaux de nuit sont plus faciles à faire et à observer. Les meilleurs sont : l'explosion de quelques grammes de poudre ou celle d'une fusée. Il n'est pas nécessaire que le signal soit fait à l'une des stations; il est même préférable de le faire au milieu de la distance qui les sépare; on double ainsi l'étendue de l'arc de parallèle qu'on peut mesurer. La station qui produit le signal n'a pas besoin dans ce cas de noter l'heure avec précision; elle ne sert que

d'intermédiaire (¹). L'éclair de l'explosion se voit à une grande distance; la fusée peut être observée dans une lunette. Ici encore la permutation des observateurs élimine les erreurs personnelles. Ces erreurs peuvent aussi se déterminer directement; on en corrige les heures observées.

Nous ferons rentrer dans la même catégorie les observations d'étoiles filantes : on a obtenu par ce moyen une différence de longitude très exacte entre Rome et Naples. Cette indication de principe doit suffire : ce genre de recherches ne concerne que les grands observatoires.

125. — Éclipses.

Les éclipses de Lune sont des phénomènes instantanés; mais la difficulté de saisir bien exactement la limite de l'ombre et de la pénombre empêche de faire servir ces observations, d'ailleurs assez rares, à des déterminations très précises. L'observation de l'éclipse du 3 août 1887, faite au Conquet, à l'aide d'une jumelle, nous a pourtant donné la longitude de ce point à une demi-minute de temps près.

Les éclipses des satellites de Jupiter sont également des phénomènes célestes instantanés, suffisamment fréquents, et dont on peut tirer une première approximation de la longitude. L'heure du phénomène est calculée dans les éphémérides pour le premier méridien; la différence avec l'heure du lieu donne la longitude.

Ici encore la précision de l'observation est très limitée. L'appréciation de l'instant de l'éclipse varie avec la finesse de vue de l'observateur et avec le grossissement de la lunette. Les Tables des éclipses ne sont d'ailleurs pas calculées avec une certitude absolue, et l'on ne peut compter sur le résultat que si l'on possède les observations correspondantes faites en un lieu de longitude connue. La méthode ne doit donc guère être conseillée pour l'observation précise de longitudes absolues. Elle peut pourtant servir à déterminer la différence de longitude de deux observateurs munis d'instruments de même pouvoir optique, en s'astreignant à certaines précautions : 1° ne comparer que les observations faites aux deux

(¹) Il y a à cela un autre avantage : c'est de supprimer l'effet de la différence d'équation personnelle entre la transmission et la réception du signal.

stations; 2° déterminer l'équation personnelle des observateurs pour les immersions et les émersions, et en tenir compte; 3° observer autant d'immersions que d'émersions : la moyenne est alors plus indépendante des différences de grossissement. On se servira d'une lunette astronomique d'environ 1^m de longueur.

La nécessité de ces précautions enlève à l'usage de la méthode beaucoup de ses avantages de commodité et ne lui laisse que celui de la simplicité des calculs. Or, c'est celui qui en dernière analyse a le moins de prix; on dispose de plus de temps et de facilités pour le calcul que pour l'observation, et le voyageur qui rapporte de bons matériaux ne sera généralement pas embarrassé de trouver un calculateur.

Lacaille a pourtant obtenu ainsi de bonnes différences de longitude. On peut aussi prévoir un perfectionnement important de la méthode, par l'application des procédés photométriques de M. Cornu.

Les éclipses de Soleil ne sont pas des phénomènes instantanés : il en sera question plus loin (§ 139).

126. — Télégraphe électrique.

Le principe de cette méthode est des plus simples. Deux observateurs postés aux deux extrémités d'un fil télégraphique échangent des signaux électriques et notent les heures qui y correspondent, leurs chronomètres étant supposés bien réglés sur le temps local. On obtient ainsi sans trop de peine une bonne approximation; mais, quand on poursuit les dernières limites de l'exactitude, on est conduit à prendre des précautions minutieuses.

Dans les recherches de précision, on a généralement recours au chronographe électrique. Cet instrument se compose essentiellement d'une bande de papier mue par un mouvement d'horlogerie. Une plume placée en regard de ce papier est sous la dépendance d'un électro-aimant traversé par le courant d'une pile locale, indépendante de la pile du télégraphe; chaque interruption du courant produit un mouvement de la plume qui s'enregistre sur le papier. Cette interruption peut être produite automatiquement par les battements d'un chronomètre ou d'une pendule; elle peut être provoquée à volonté par l'observateur au moyen d'une clef. On

peut se servir d'un cylindre de papier, à condition que la plume se déplace lentement dans la direction d'une génératrice, de façon à décrire une hélice dont le développement donne une droite. On emploie plus ordinairement une bande de papier télégraphique. Les appareils les plus usités ont deux plumes dont l'une enregistre les battements de la pendule et l'autre les signaux faits par l'observateur : la première peut aussi être actionnée simultanément avec la seconde, afin de déterminer ce qu'on appelle la *parallaxe des plumes,* c'est-à-dire la position respective des signaux marqués au même instant physique. On voit facilement comment ce mode d'enregistrement permet de déterminer avec une grande précision les heures de la pendule qui correspondent à des signaux donnés faits par l'observateur. Le chronographe sert à enregistrer les instants où une étoile passe derrière un fil de la lunette méridienne; il remplace l'observation à l'oreille. Si la transmission des signaux électriques était instantanée, il suffirait d'avoir à l'une des stations une pendule et un chronographe, et une lunette méridienne à chacune. L'observateur le plus Est enregistrerait sur son chronographe les instants du passage d'une étoile donnée derrière les fils; puis le deuxième observateur, agissant sur une clef traversée par le même courant, enregistrerait pareillement sur le même chronographe les passages de la même étoile; la différence des heures ainsi obtenues et corrigées de la marche de la pendule dans l'intervalle, des erreurs instrumentales et des équations personnelles, donnerait la différence de longitude. Si le courant transmis par la ligne est trop affaibli pour actionner directement la plume, on l'emploie à faire battre un relais qui ouvre ou ferme le courant d'une pile locale.

La transmission n'étant pas instantanée, on établit un chronographe et une pendule à chaque station, et l'on enregistre sur chacun des chronographes les battements de la pendule locale et les signaux des deux observateurs. La moyenne des différences relevées sur les deux chronographes est indépendante de la durée de la transmission.

Soient en effet deux stations E et W, E étant la plus orientale des deux. Soit L leur différence de longitude, soit x le temps que le signal met à se transmettre de l'une à l'autre; on suppose, sans preuves suffisantes d'ailleurs, que cette durée est la même

pour les signaux envoyés d'E à W et pour ceux transmis de W en E.

L'observateur E enregistre son observation à l'instant t et le signal arrive en W à l'instant $t + x$. L'observateur W enregistre le même passage à l'instant $t + L$ sur son chronographe, et à l'instant $t + L + x$ sur celui de la station E. La différence des signaux relevée en E est donc $(t + L + x) - t = L + x$, et en W elle est $t + L - (t + x) = L - x$; la moyenne est égale à L, indépendante de x.

Cette méthode exige qu'on dispose de la ligne pendant un temps assez long; elle est complètement abandonnée aujourd'hui. Son seul avantage était de donner des résultats indépendants de l'erreur qui peut exister sur l'ascension droite de l'astre observé. Or, il est facile de connaître les positions des étoiles avec une grande précision.

La méthode généralement recommandée aujourd'hui consiste à régler en chaque lieu la pendule sur le temps sidéral, par l'observation d'étoiles équatoriales, en déterminant les corrections de la lunette par l'observation de quelques circompolaires; à en calculer bien exactement la marche, et à faire entre les deux stations un échange de signaux pour effectuer la comparaison des deux pendules. A chaque station, la pendule et le chronographe sont actionnés par une pile locale; on fait une série d'observations avant l'échange des signaux, et une autre après, pour être assuré de la régularité de marche des garde-temps.

L'échange de signaux se fait soit directement, c'est-à-dire au moyen du courant de la ligne, soit au moyen de relais actionnés par ce courant. A des instants connus, chaque observateur envoie successivement des signaux à l'autre, et ces signaux, enregistrés sur les chronographes, équivalent à la comparaison des deux pendules.

Si le courant de la ligne est trop faible pour faire mouvoir les électro-aimants des relais, ce qui est le cas des câbles sous-marins, on se contente de produire, par l'envoi de signaux, les déviations d'un galvanomètre Thomson, que la station réceptrice observe comme elle observerait un phénomène astronomique et qu'elle enregistre alors elle-même sur son chronographe. Mais ceci introduit une nouvelle espèce d'équation personnelle, et il est encore plus nécessaire de permuter les observateurs pour avoir de bons résultats.

Il semble inutile de développer davantage ce qui a trait aux observations de grande précision. On peut consulter là-dessus le *Mémorial de la Guerre* (t. XI), le Rapport sur le *Coast Survey Americain* (1856 et 1857), les *Annales de l'Observatoire de Paris* (t. VIII).

On obtiendra encore des résultats très suffisamment bons en opérant de la manière simple que nous allons indiquer.

Deux observateurs placés aux extrémités d'une ligne télégraphique règlent chacun son chronomètre, avant et après l'échange des signaux, par les observations horaires les plus précises possible; ils en déduisent son état sur le temps local pour l'instant de l'échange des signaux. L'observateur E annonce qu'il est prêt, et, lorsque son chronomètre marque, par exemple, 50^s, il prévient qu'il va commencer. L'observateur W se tient prêt et commence à compter sur son chronomètre. A la seconde o de son chronomètre, E envoie un signal, puis continue de 5^s en 5^s. Ces signaux sont perçus en W, soit par l'oreille, si ce sont les battements d'un relais, soit par l'œil, si ce sont les déviations d'un galvanomètre; l'observateur W note les heures correspondantes à son chronomètre en s'efforçant de bien estimer les fractions de seconde. On peut ainsi envoyer et recevoir treize signaux dans une minute, ce qui fournit une comparaison très exacte.

Cela fait, W procède de même à l'égard de E.

Après élimination de l'erreur personnelle, la moyenne des comparaisons donnera la différence de longitude indépendamment de la durée de transmission, et de ce qu'on appelle le temps d'armature : la démonstration donnée plus haut s'applique directement à ce cas.

La différence d'équation personnelle se détermine par la différence des états absolus obtenus pour un même chronomètre et un même lieu par les deux observateurs. A la lunette méridienne, par exemple, le premier observateur observe le passage d'une étoile aux premiers fils, le deuxième aux derniers : la différence des heures réduites au fil moyen donne la différence des équations personnelles. Il va sans dire que cette observation doit être répétée et variée, en changeant l'ordre des observateurs, en observant des étoiles de déclinaisons différentes, etc. Avec des instruments autres que la lunette méridienne, deux théodolites par exemple, chaque observateur se

servant de son instrument, règle le même chronomètre à la même heure par le même astre; ici encore il faut varier les astres et les conditions de l'observation. La différence des équations personnelles est facile à trouver quand on emploie le mode d'observation du Soleil qui consiste à produire en arrière de l'oculaire une image réelle de l'astre : les passages au fil sont alors notés simultanément par les deux opérateurs.

Il ne faut pas perdre de vue que l'équation personnelle dépend essentiellement de l'instrument de mesure, du chronomètre employé et de la méthode d'observation. Elle doit donc être déterminée pour le genre d'observations qui servent à régler les chronomètres.

Pour s'assurer que la permutation des observateurs fait disparaître le résultat de l'erreur personnelle sur la moyenne des différences de longitude, il suffit de remarquer que l'effet de l'équation personnelle d'un des observateurs, celle de l'autre étant supposée nulle, est de reporter *son* méridien d'une quantité égale à cette équation soit à l'Est, soit à l'Ouest, *mais toujours dans le même sens*. La différence des méridiens se trouve ainsi augmentée de cette équation dans une position donnée des observateurs, et diminuée de la même quantité après leur permutation. Les erreurs personnelles n'étant que des quantités relatives, il est toujours permis de les traiter comme de simples différences, et de prendre arbitrairement l'une des deux égale à zéro.

On voit par là que la méthode télégraphique est susceptible d'une grande précision : résumons encore les conditions nécessaires pour obtenir de très bons résultats.

1° Réciprocité des signaux, pour éliminer la vitesse de propagation qui n'est pas négligeable : on a trouvé que la durée de transmission est sensiblement proportionnelle au carré de la longueur de la ligne.

2° Permutation des observateurs ou, à son défaut, détermination rigoureuse de leurs équations personnelles, en se servant des instruments mêmes, lunettes et chronomètres, qui servent à trouver l'heure en chaque station, et variant suffisamment les observations faites pour cela.

3° Evaluation très exacte de l'état et de la marche du chronomètre, par des observations convenablement variées, faites avant et après l'échange des signaux.

On a trouvé par le télégraphe électrique des différences de longitude très précises. Mais la méthode, malgré son apparente simplicité, est d'une application très délicate. Nous rappellerons seulement qu'on a obtenu pour la différence des méridiens de Paris et de Greenwich des nombres qui diffèrent entre eux de $0^s,4$; que la longitude télégraphique d'Aden a été récemment augmentée de 2^s de temps, et que ce même écart de 2^s se retrouve sur les longitudes de plusieurs points d'Asie et d'Amérique déterminées par de bons observateurs.

127. — Longitude par les chronomètres. — Préliminaires.

Si la marche d'un chronomètre était invariable, ou si elle était une fonction parfaitement connue de quantités données, le problème de la détermination des longitudes par le transport du temps serait d'une simplicité élémentaire, et les erreurs des résultats se réduiraient à celles qui proviennent des observations d'état absolu et de marche. Il est clair que, dans ce cas, il serait parfaitement superflu d'avoir plus d'une montre, puisqu'en tenant compte des comparaisons les autres donneraient toutes des résultats identiques.

En réalité, la marche d'un chronomètre est variable sous l'influence d'actions diverses : parmi les perturbations qu'éprouve cette marche, les unes se rapportent à des forces bien connues et peuvent être mises en équation : les autres, lors même qu'on connaît leurs causes (et on ne les connaît pas toutes), ne peuvent pas, dans l'état présent de nos connaissances, être prévues et calculées avec certitude. Les variations de température sont, parmi ces causes, les plus régulières dans leur action ; le terme de la marche qui dépend du temps l'est déjà moins, le coefficient d'accélération n'est pas constant ; il peut même changer de signe. L'influence de l'électricité et du magnétisme est aussi mal connue et difficile à déterminer qu'elle paraît incontestable. La différence des marches à la mer et en rade, ou, en d'autres termes : l'influence des mouvements de transport et autres sur la marche, est plus importante à bord des navires à hélice, soumis à de fortes trépidations, qu'elle ne l'était sur les navires à voiles ; mais en tout cas, lorsqu'on

ne se contente pas d'une approximation grossière, il n'est pas permis de négliger l'effet des mouvements de roulis et de tangage. L'expérience prouve en effet que, dans les déterminations de longitude, on est généralement forcé d'admettre que la marche à la mer diffère de ce qu'elle serait en rade, toutes choses égales d'ailleurs. L'amiral Fitz-Roy a combattu cette opinion, non comme fait, mais comme interprétation : il attribuait ces différences aux conditions différentes de température ; mais comme il n'éliminait pas par le calcul ce dernier genre de perturbations, cette opinion, toute de sentiment, ne saurait prévaloir contre les observations anciennes et récentes qui tendent à prouver le contraire.

Quand on aura dépouillé les marches chronométriques de toutes les causes systématiques de variation *qui peuvent être calculées,* on sera amené à considérer les perturbations résiduelles comme des erreurs accidentelles, et à tenter d'éliminer les erreurs qui en résultent sur les longitudes par l'emploi d'un grand nombre de chronomètres. Mais il est utile de redire que, seules, notre ignorance de la manière d'agir de certaines causes perturbatrices, ou encore la difficulté de les mettre en équation, nous conduisent à en classer un certain nombre dans les sources d'erreurs accidentelles.

Nous rappellerons d'abord, pour les préciser, les définitions dont nous avons à faire usage. Nous réservons le mot d'*état absolu* pour désigner la quantité qu'il faut ajouter à l'heure marquée par le chronomètre, pour avoir l'heure du premier méridien auquel on rapporte les longitudes. Ce premier méridien n'est pas nécessairement celui des éphémérides : il peut être celui d'un lieu plus ou moins bien déterminé par rapport à celui-là, auquel on rattache les longitudes d'une région circonscrite. La *correction* du chronomètre est la quantité qu'il faut ajouter à l'heure chronométrique pour avoir l'heure du lieu où l'on se trouve. Quand il s'agit généralement d'état absolu et de correction, on dira simplement l'*état* de la montre. La *marche diurne* est l'accroissement, en 24 heures, de la correction, qui est aussi l'accroissement d'état absolu. Elle s'ajoute avec son signe à la correction correspondante à un instant donné pour avoir la correction 24 heures après. D'après cela, la correction et la marche positives sont toutes deux des retards. Un chronomètre est *réglé* lorsqu'on connaît sa correction et sa marche.

Une même montre peut donc être réglée indifféremment sur toute espèce de temps : temps vrai, temps moyen, temps sidéral. Rappelons que la distinction de ces espèces de temps n'a pas d'importance, et que la seule chose nécessaire est de ne comparer pour la recherche des longitudes que des temps de même espèce : le temps est un angle horaire, et la différence des angles horaires simultanés d'un même point du ciel en deux lieux différents est la différence de longitude de ces lieux.

Étant donnée la variabilité de marche d'une montre, il faut poser en principe que la détermination de la longitude par le transport du temps est un problème essentiellement indéterminé : à quoi l'on doit ajouter immédiatement, à titre de correctif important résultant de l'expérience, que cette indétermination est resserrée dans des limites fort étroites, en pratique, avec de bons instruments bien étudiés.

La marche à la mer n'est pas donnée en général par l'observation : elle est une des inconnues du problème, puisqu'elle dépend de la différence, inconnue par hypothèse, des longitudes. Ces marches peuvent être, dans certains cas, engagées dans des relations nécessaires avec l'inconnue cherchée, mais ces relations, quel qu'en soit le nombre, ne permettent pas le calcul séparé de la marche et de la longitude. Les équations peuvent même, en toute rigueur, être incompatibles, et cela arrive le plus ordinairement quand on a plusieurs chronomètres : mais l'indétermination n'est jamais levée.

Cela est de toute évidence en ce qui concerne les relations établies entre les états de plusieurs garde-temps par les comparaisons de ces instruments entre eux : car ces comparaisons donnent uniquement les différences d'état des divers chronomètres, et font par conséquent double emploi avec le tableau de ces états. Il s'ensuit que la multiplicité des montres offre bien un moyen de vérifier la probabilité des résultats, mais ne fournit aucune relation nécessaire : deux chronomètres différents donneront deux longitudes différentes, mais on ne sera pas guidé pour le choix entre les deux valeurs.

Admettons maintenant qu'avec un seul chronomètre on parte d'un lieu dont on suppose la longitude donnée ; qu'on visite successivement divers points à déterminer, et qu'on arrive finalement en un lieu dont la différence de longitude avec le point de départ

soit bien connue. On calculera facilement la somme des variations d'état, mais on n'aura pas de données pour distribuer ces variations sur la traversée. Soient $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$ les corrections observées, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ les longitudes à l'Ouest du méridien d'origine : les états absolus sont $C_0, C_1 + x_1, C_2 + x_2 \ldots, C_m + x_m$; x_m est supposé connu et peut être nul par retour au point de départ.

Considérons le cas le plus facile et le mieux déterminé en apparence. Partant de O, on visite les points dont les longitudes sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'on revient par les mêmes points en ordre inverse au point O. Admettons, pour la facilité de la démonstration, que le nombre total de points soit de quatre. On aura la suite des états absolus

C_0 à l'époque t_0,
$C_1 + x_1$ . . . . . t_1,
$C_2 + x_2$ . . . . . t_2,
$C_3 + x_3$ . . . . . t_3,
$C_4 + x_3$ . . . . . t_4,
$C_5 + x_2$ . . . . . t_5,
$C_6 + x_1$ . . . . . t_6,
C_7 . . . . . t_7.

On connaît ainsi un certain nombre de valeurs de la marche m_0 données par

$$\frac{C_7 - C_0}{t_7 - t_0}, \qquad \frac{C_6 - C_1}{t_6 - t_1}, \qquad \frac{C_5 - C_2}{t_5 - t_2}, \qquad \frac{C_4 - C_3}{t_4 - t_3},$$

et ces valeurs, contrairement à l'hypothèse, seront d'ordinaire inégales. Mais ce sont généralement les seules marches qu'on puisse calculer, et l'on voit qu'elles sont indépendantes des x; on ne peut donc pas les rendre égales en faisant varier les x, de sorte que l'indétermination subsiste. On ne dispose d'aucun élément pour connaître la marche vraie entre C_0 et C_1 par exemple; car les constantes de la formule des marches sont elles-mêmes tirées des observations en question. Prenons le cas encore plus simple de deux stations.

C_0
$C_1 + x_1$
$C_2 + x_1$
C_3

La marche de C_0 à $C_1 + x_1$ est

$$\frac{C_1 + x_1 - C_0}{t_1 - t_0};$$

celle de C_1 à C_2,

$$\frac{C_2 - C_1}{t_2 - t_1},$$

celle de $C_2 + x_1$ à C_3,

$$\frac{C_3 - C_2 - x_1}{t_3 - t_2},$$

et quelle que soit la valeur adoptée pour x_1, on trouvera trois marches qui satisferont à la condition de faire progresser l'état de C_0 à C_3 en passant par $C_1 + x_1$ et $C_2 + x_1$. On se trouve donc conduit à imposer aux marches une condition arbitraire pour lever cette indétermination. C'est dans le choix rationnel de cette hypothèse que gît toute la difficulté du problème.

128. — Comparaisons.

Quand on possède plusieurs chronomètres, il importe avant tout de connaître leurs marches relatives. Pour cela, il faut les comparer entre eux au moins une fois par jour. On se trouvera bien d'effectuer cette opération tous les jours à la même heure, et de choisir pour cela l'heure du remontage. Les méthodes à employer pour faire la comparaison sont assez nombreuses. Nous ne citons que pour mémoire l'ancienne méthode qui se faisait exclusivement à l'œil et qui n'est pas à recommander.

Nous empruntons à M. de Magnac la description d'une méthode assez simple.

« Soit à comparer entre eux les chronomètres A, B, C et le compteur M. On place M de manière à pouvoir entendre distinctement ses battements et faire avec facilité la lecture du chronomètre à comparer; on fixe à l'avance l'heure et la minute du compteur M à laquelle on se propose de faire la comparaison et l'on inscrit cette heure sur le cahier d'observations, soit, par exemple, $M = 3^h 27^m 0^s$; cela fait, on s'approche du compteur, et, lorsque son aiguille des secondes arrive entre 45^s et 50^s, on la suit des yeux, en écoutant les battements de l'instrument de manière à bien suivre sa cadence; quand l'aiguille des secondes arrive sur

55^s, on compte 0; puis aux battements suivants, 1, 2, 3, ..., au sixième ou au septième battement, on porte les yeux sur le chronomètre, et, quand on arrive à compter 10, on remarque si l'aiguille des secondes est stationnaire soit sur le trait qui marque la seconde, soit au milieu de l'intervalle entre deux traits, ou si elle est en mouvement pour passer d'une de ces positions à l'autre; dans le cas où l'aiguille était stationnaire, c'était la fraction $0^s,0$ ou $0^s,5$; dans celui où elle était en mouvement, on écrit la fraction $0^s,2$ ou $0^s,3$ lorsqu'elle a passé d'une seconde entière à une demi-seconde, et $0^s,7$ ou $0^s,8$ lorsqu'elle a passé d'une demi-seconde à une seconde entière. On écrit alors l'heure de A, soit $A = 9^h17^m32^s,3$. (Si le compteur battait les $\frac{2}{5}$ de seconde, on compterait à partir de 56^s au lieu de 55^s et l'on s'arrêterait pareillement au nombre 10.)

» A la minute suivante de M, on compare B de la même manière. Supposons qu'il marque $7^h23^m9^s,7$, on retranche une minute et l'on écrit $7^h22^m9^s,7$. A la minute suivante, on compare C et l'on retranche deux minutes. De cette manière, l'heure du compteur reste la même pour tous les chronomètres. »

Lorsque deux observateurs concourent à la comparaison, l'un d'eux observe le chronomètre choisi pour étalon; il suit des yeux l'aiguille et, au moment où elle se trouve sur 55^s, il dit *attention;* puis, au moment où elle arrive à 0, il dit très brièvement *top*. L'autre observateur compte pendant ce temps les battements du chronomètre qu'il veut comparer, en s'aidant de l'œil et de l'oreille, et tâche d'estimer la fraction de seconde qui correspond au top.

Quand les chronomètres battent la demi-seconde, si l'on dispose d'un compteur battant les $\frac{2}{5}$ de seconde, on peut atteindre une précision supérieure par la méthode des coïncidences. Cette méthode repose sur ce que le compteur exécute 5 battements pendant que le chronomètre en exécute 4. On isole le chronomètre à comparer en laissant sa boîte ouverte, les autres boîtes étant fermées. On en approche l'oreille, de façon à saisir nettement le bruit de ses battements; en même temps, on tient le compteur près de l'autre oreille. Il arrivera alors que sur 5 battements du compteur, un battement paraîtra coïncider exactement avec un battement du chronomètre. Les battements du compteur étant notés à partir des secondes paires par 0, 1, 2, 3, 4, le 5 correspondra à la seconde paire suivante. On prendra le rythme du compteur et l'on se

mettra à écouter ses battements, tout en écoutant ceux du chronomètre et suivant des yeux l'aiguille de celui-ci.

Supposons que la seconde de rang pair du compteur prise pour origine soit 24, que la coïncidence avec le chronomètre soit notée au troisième battement, et qu'à ce moment l'œil voie l'aiguille du chronomètre sur $38^s,5$, on inscrira en tête les secondes, minutes et heures du chronomètre, soit $4^h\ 7^m 38^s,5$

et en-dessous celles du compteur, $3\ 18\ 24\quad 3^b$

$3^b = 1^s,2$, ce qui fait $25^s,2$; l'avance du chronomètre sur le compteur est donc $0^h 49^m 13^s,3$.

Si la coïncidence n'est pas parfaite, il y aura deux battements consécutifs pour lesquels elle sera la meilleure, par exemple 3 et 4.

Le premier correspondant à $38^s,5$ du chronomètre, le deuxième correspondra à $39^s,0$, et les secondes du compteur seront $25^s,2$ et $25^s,6$, respectivement; la comparaison vraie sera comprise entre $13^s,3$ et $13^s,4$, on prendra $13^s,35$. Cette méthode, on le voit, donne les comparaisons à $\frac{1}{2}$ dixième de seconde près sans ambiguïté. On obtient une précision encore plus grande avec un chronomètre sidéral, et l'on arrive alors sans trop de peine, avec un peu d'habitude, à être sûr du centième de seconde. Nous ne développons pas le détail de cette opération dont le principe est, en somme, exactement le même que celui du vernier. L'expérience nous a montré qu'en général les bruits et les mouvements du navire n'empêchent pas l'application de cette méthode, de beaucoup la plus précise parmi celles qu'on peut employer.

Dans la navigation courante, les comparaisons servent à rapporter les états de tous les chronomètres à un seul d'entre eux dont on se sert comme étalon et qui est employé seul pour les calculs du point. Ce procédé abrège les calculs et simplifie les opérations.

Pour le calcul des longitudes, il est préférable de n'employer les comparaisons que pour suivre attentivement les variations de marche et constater les perturbations, et de faire les calculs de longitude pour chaque chronomètre pris individuellement. On se ménage par là des vérifications de calcul qui font défaut avec l'autre méthode, et le degré de concordance des résultats saute mieux aux yeux. Il faudra être très réservé dans l'élimination des perturbations, et ne pas se hâter de traiter comme telle tout changement des marches relatives. Très souvent des instruments de construction

analogue peuvent varier simultanément dans le même sens sous l'influence d'une cause donnée, et alors leur accord n'est pas plus une garantie de constance de la marche que le désaccord d'un autre instrument n'est une preuve d'erreur de celui-ci.

129. — Détermination des états et des marches.

Chaque observation d'état du compteur donne, au moyen des comparaisons prises avec ce compteur *avant et après* l'observation, les états des autres chronomètres. La marche diurne dans l'intervalle de deux observations est prise égale à la différence des états divisée par l'intervalle de temps qui les sépare, exprimé en jours et fractions de jour. Elle est donc par hypothèse constante dans cet intervalle. Cette hypothèse est d'autant plus vraisemblable que l'intervalle est plus court et que les conditions physiques extérieures ont moins varié pendant ce temps. En fait, cela n'est jamais rigoureusement vrai : la marche varie dans le courant d'une même journée ; dans la pratique, cela est suffisamment exact pour des chronomètres bons ou passables.

Les erreurs sur les marches dépendent des erreurs sur les états ; mais ces erreurs (ou plutôt leurs différences) se trouvent divisées par l'intervalle. Ceci conduit à augmenter cet intervalle, tandis que les remarques précédentes amèneraient à le réduire. Pour en déterminer la durée convenable, il faudra donc avoir égard aux circonstances des observations. Voici quelques indications à ce sujet. Si le chronomètre a une température de réglage correspondant à un maximum de marche, et si les températures moyennes diurnes entre les observations sont voisines de cette température de réglage, on a tout bénéfice à étendre la période. Supposons maintenant que la formule parabolique des marches soit applicable, que la température de réglage soit de 15° et que les écarts de marche à 0° et 30° soient de $2^s,25$, ce qui correspond à $c = 0^s,01$; on trouve qu'on peut prendre la moyenne des marches comme correspondant à la température moyenne à $0^s,1$ près si les températures moyennes extrêmes diffèrent de 6°,3, et à $0^s,05$ près si elles diffèrent de 4°,5. Ces conditions ne sont pas éloignées de celles que nous offre la moyenne de nos chronomètres. On peut donc poser en principe que dans l'ordre d'approximation dont le chronomètre est susceptible,

les variations de marche sont sensiblement proportionnelles aux variations de température *dans les limites de 4° de température.*

L'expérience a montré qu'il est essentiel de ne comparer entre elles que des observations de même nature. Quand on détermine l'heure par des distances zénithales du Soleil, il est toujours préférable de régler un chronomètre exclusivement, soit par des observations du matin, soit par des observations du soir, et de ne pas mêler les deux genres de hauteurs dans un même calcul. Ce n'est pas à dire qu'on ne doive pas faire les deux espèces d'observations, bien au contraire : on se ménage, en opérant ainsi, un moyen de contrôle précieux. En effet, opérant le plus souvent possible matin et soir, on distribuera tous les états en deux groupes. Le premier groupe, composé exclusivement d'observations du matin, donnera une suite d'états et de marches, à l'aide desquels on calculera une première série de longitudes. On en calculera une autre pour les mêmes points, dans laquelle n'interviendront que les états et marches déduits d'observations du soir. Si l'on a fait en outre des observations d'étoiles, on groupera les étoiles qu'on aura observées à l'Est du méridien avec les hauteurs du Soleil du matin, et celles observées à l'Ouest avec les hauteurs du soir. La comparaison de ces deux systèmes de résultats doit fournir des marches presque identiques. Les états différeront généralement d'une quantité à peu près constante, et les longitudes doivent être très peu différentes.

Il est bon aussi, malgré le surcroît de travail qui peut en résulter, de traiter dans ce calcul chaque chronomètre séparément : les vérifications du calcul et de l'observation que l'on rencontre ainsi paient largement la peine qu'on a prise, et cette méthode permet une discussion beaucoup plus serrée des résultats.

On n'oubliera pas qu'en principe une détermination de longitude est essentiellement une opération différentielle, et que la valeur absolue des observations importe moins que leur comparabilité. Aussi, pour ne pas perdre le bénéfice de ce mode d'opérer, lors même que dans le port de départ on pourrait régler les montres par des moyens plus précis que ceux qu'on emploiera pour la détermination des états ultérieurs, par exemple par comparaison avec une pendule réglée dans un observatoire ou avec un ballon d'heure, ou par des observations méridiennes, il est encore préférable de ne se

servir de ces données que comme d'un contrôle pour les observations qu'on fera soi-même, avec les mêmes intruments et par les mêmes méthodes qui devront servir ultérieurement.

130. — Préparation des calculs de longitude.

Admettons maintenant qu'on ait fait les observations et les calculs à l'aide desquels on se procurera les états et les marches des chronomètres. On aura ainsi les résultats bruts, à peu près comme la différence de deux lectures donne une distance zénithale, qu'il s'agit de corriger des erreurs instrumentales, de la réfraction, etc., avant qu'elle ne puisse être employée dans des calculs définitifs. Il faut avant tout calculer les erreurs du chronomètre. Nous avons exposé au Chapitre V la théorie de ces corrections et la manière de les déterminer. Nous allons la résumer ici en envisageant spécialement son application.

Nous pensons avoir établi que les coefficients de température sont les vraies constantes d'une montre. Les marches en rade sont les plus appropriées à leur détermination, l'expérience ayant prouvé qu'ils ne sont pas sensiblement affectés par les mouvements du navire. Ce caractère de permanence permet d'employer à cet effet toutes les marches dont on dispose, en les combinant entre elles de manière à éliminer le mieux qu'on pourra l'influence des autres causes. On se servira dans ce but soit des constructions de courbes, soit de la méthode des équations de condition, pour la résolution desquelles on suivra l'une ou l'autre des voies dont nous donnerons l'exposé plus loin. Parmi ces constantes, la température de réglage présente un intérêt tout particulier : c'est elle qui donne la meilleure caractéristique de la montre. On se gardera seulement de faire intervenir, dans cette recherche, des marches dans lesquelles se manifeste une interversion évidente de la loi des températures, notamment quand il s'agit de chronomètres neufs, sujets à prendre une accélération toute temporaire quand la température monte brusquement (1).

(1) Il n'y a pas à s'inquiéter outre mesure si les coefficients de température n'ont pas toute la précision apparente qu'on pourrait désirer. Cette circonstance tient généralement à ce qu'on n'a pas observé à des températures suffisamment

Le coefficient d'accélération ordinaire est loin de présenter la même certitude que ceux qui se rapportent à la température. On a de nombreux exemples qui autorisent à admettre la régularité de l'effet du temps pour des périodes allant à un an et plus; mais souvent aussi cette règle est en défaut. On sera déjà fixé à ce sujet par l'étude qu'on aura faite pour déterminer l'influence de la température, surtout si l'on a eu recours aux équations de condition, qui doivent donner la valeur du ou des coefficients d'accélération. La meilleure règle à suivre est de ne tirer la valeur de ce coefficient que des observations qui doivent concourir à la détermination du groupe de longitudes dont on s'occupe.

Ceci est encore beaucoup plus vrai du terme constant qui figure dans la formule des marches et qui est la marche à l'origine du temps, à une température supposée égale à celle du réglage. Ce terme constant est précisément celui qu'affectent les perturbations brusques désignées comme *sauts;* il ne doit être conclu que des marches observées pendant la période qui comprend le travail de longitudes.

Nous ne possédons pas encore de données assez précises pour affirmer la constance du coefficient qui représente l'effet des mouvements du navire, mais elle peut être présumée; nous engloberons cet effet avec les erreurs accidentelles dans un seul terme dont on tiendra compte par l'examen de l'erreur finale, ou par la méthode même de calcul.

Ayant donc obtenu les coefficients a, b et c de la formule, on commencera par vérifier que leur application aux marches dont on se sert est bien légitime. On calculera pour chaque jour du voyage la somme $+b\theta + c\theta^2$, ou, si l'on a calculé la température de réglage, le terme $c(\Theta - \theta)^2$; on prendra pour cela une origine arbitraire des temps, par exemple le jour de la première observation d'état dont on compte se servir. Pour un jour quelconque t, la somme $\Sigma_0^t c(\Theta - \theta)^2$ représentera la variation d'état due à la tem-

---

variées : mais, dans ce cas, les coefficients auront toute la précision nécessaire pour donner la marche dans les limites des températures observées. Or il arrivera rarement qu'on ait, pendant la traversée, des températures notablement en dehors de la série de celles qui ont été observées au mouillage : l'extrapolation ne s'étendra donc pas assez loin, pour qu'avec des montres passables, l'erreur soit de quelque importance.

pérature depuis l'origine. Appelons *état normal* du chronomètre celui qu'on aurait obtenu si la température était restée égale à la température du réglage, on aura

$$\text{État observé} = \text{État normal} + \Sigma c\,(\Theta - \theta)^2$$

ou

$$\text{État normal} = \text{État observé} - \Sigma c\,(\Theta - \theta)^2.$$

On commencera par calculer les états normaux (états absolus ou corrections, selon le cas) et dans ce qui suit on les substituera aux états observés; on n'aura donc plus besoin de se préoccuper de la température.

Si l'accélération est bien connue, on pourra comprendre le terme at dans ce calcul, c'est-à-dire retrancher $at^2 + \Sigma c\,(\Theta - \theta)^2$ de l'état observé et traiter cette différence comme marche normale. Quelquefois, il y aura intérêt à le laisser confondu avec les autres termes proportionnels au temps.

Le calcul de $\Sigma c\,(\Theta - \theta)^2$ peut être abrégé en partant de la remarque que, lorsque la température ne varie pas de plus de 4°, pendant une période de plusieurs jours, on peut prendre pour chacun de ces jours le terme $c\,(\Theta - \theta_m)^2$, θ_m étant la température moyenne, et remplacer alors $\Sigma c\,(\Theta - \theta)^2$ par $nc\,(\Theta - \theta_m)^2$, n étant la durée de cette période.

Si l'on ne veut pas avoir des valeurs trop considérables pour ces corrections, on peut encore remarquer que, lorsqu'on fait abstraction de l'accélération, la formule Lieussou peut s'écrire

$$m = m_0 + c\,(\Theta - \theta)^2 + c\,(\Theta - \mathfrak{T})^2 - c\,(\Theta - \mathfrak{T})^2,$$

$\mathfrak{T}$ représentant par exemple la température moyenne de la traversée; alors $m_1 = m_0 + c\,(\Theta - \mathfrak{T})^2$ serait la marche correspondante à la température moyenne, ce qu'on pourrait appeler la marche moyenne, et, pour avoir la marche vraie, il faudrait y ajouter $c\,(\Theta - \theta)^2 - c\,(\Theta - \mathfrak{T})^2 = 2c\left[\Theta - \frac{1}{2}(\theta + \mathfrak{T})\right](\mathfrak{T} - \theta)$ et calculer alors les états normaux par la formule

$$\text{État normal} = \text{État observé} - 2c\Sigma\left[\Theta - \tfrac{1}{2}(\theta + \mathfrak{T})\right](\mathfrak{T} - \theta)$$

qui donnerait des valeurs numériques plus faibles, tantôt positives, tantôt négatives.

Si les variations de température sont comprises dans d'étroites

limites et si la température moyenne diffère sensiblement de Θ, il est souvent permis en pratique de s'en tenir aux variations de marche proportionnelles à la température. Quoiqu'il en soit, nous supposerons les états ainsi préparés, c'est-à-dire ramenés à une température constante.

131. — Calcul des longitudes.

Le problème des longitudes se pose différemment, selon le nombre des observations faites et les données dont on dispose.

Premier cas. — A l'époque zéro, on part du point A où l'on a déterminé l'état absolu et la marche. A l'époque t, on arrive au point B et l'on y détermine la correction du chronomètre. La longitude s'obtient dans ce cas en calculant avec la marche primitive, supposée restée constante, l'état absolu pour la date t, et faisant sa différence avec la correction observée (corrigée de la température). Ce problème est celui qu'on rencontre dans la pratique de la navigation. Soient E l'état en A, m la marche observée, C la correction observée en B. La longitude de B à l'ouest de A sera

$$G = E + mt - [C - c\Sigma(\Theta - \theta)^2].$$

Deuxième cas. — Si en B, on a observé la marche m', on peut admettre comme deuxième approximation que la marche moyenne de la traversée est $\frac{1}{2}(m + m')$, et l'on remplacera m par cette quantité dans la formule précédente. Dans ces deux cas, on ne possède aucun élément pour déterminer la différence de marche en rade et à la mer. On manque donc de vérifications, quand on opère avec un seul chronomètre. Lorsqu'on en a plusieurs, la vérification résulte du degré de concordance des résultats donnés par chacun (1).

Troisième cas. — On visite successivement les points A, B, C, D; on y observe les états et les marches aux époques t, t', t'', t'''. On connaît la différence de longitude des points extrêmes A et D. Alors

(1) Les considérations développées plus loin (§ 132) s'appliquent plus spécialement au calcul de ce deuxième cas.

a, b, c, d étant les marches, on calcule la différence entre A et B, au moyen de la marche $\frac{1}{2}(a+b)$, celle entre B et C au moyen de la marche $\frac{1}{2}(b+c)$, celle entre C et D par la marche $\frac{1}{2}(c+d)$. La somme de ces différences (en ayant égard aux signes) doit donner la distance connue de A à D, qui peut être nulle si l'on est revenu au point de départ. L'excès du résultat du calcul sur cette quantité connue donne l'erreur résultant de l'hypothèse faite sur les marches. Il s'agit de reporter cette erreur sur les longitudes intermédiaires en cherchant la répartition la plus plausible. Nous avons vu plus haut que l'indétermination du problème force à faire une hypothèse de ce genre; c'est ici qu'interviendra par conséquent la recherche de cette hypothèse, qui caractérise les procédés divers proposés jusqu'à ce jour.

On trouvera un exposé très circonstancié des méthodes appropriées à cet usage dans les *Recherches chronométriques*, publiées en 1859-62 au Dépôt des Cartes et Plans de la Marine par MM. Delamarche et Ploix.

Bornons-nous à en exposer ici l'esprit.

La pratique la plus ancienne, et qui est encore souvent suivie, consiste à répartir l'erreur finale sur chaque différence de longitude, proportionnellement au temps écoulé depuis le départ.

Daussy admet que c'est la différence seconde des marches de la traversée qui est constante. Les marches deviennent ainsi des fonctions paraboliques du second degré du temps.

Vincendon-Dumoulin et Coupvent-Desbois déterminent la fonction inconnue qui représente l'état absolu en fonction du temps, en se servant de la formule d'interpolation de Lagrange; ils en déduisent les marches de la traversée, avec lesquelles ils calculent les longitudes.

M. Ch. Ploix prend le même point de départ; il représente la marche par un polynome entier ayant le nombre de termes qu'il est possible de déterminer par les diverses observations des marches; considérant ensuite la courbe qui a pour abscisses les temps et pour ordonnées les marches, et remarquant que l'aire de cette courbe représente la variation d'état, il arrive, comme Vincendon-Dumoulin, à l'emploi de la formule de Lagrange; mais le résultat définitif se distingue du précédent par un calcul plus simple et en même temps plus rigoureux. Soient $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ les

marches observées aux époques $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ en des lieux différents; la courbe des marches a pour équation

$$y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Représentons par $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ les dénominateurs connus. Soient :

α_0 la somme des produits un à un des x_i;

β_0 la somme des produits deux à deux;

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

θ_0 la somme des produits n à n.

La variation d'état à une époque x est donnée par

$$\varepsilon = \Sigma\left(\frac{y_0}{\delta_0}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \Sigma\left(\frac{y_0\alpha_0}{\delta_0}\right)\frac{x^n}{n} + \Sigma\left(\frac{y_0\beta_0}{\delta_0}\right)\frac{x^{n-1}}{n} - \ldots + \Sigma\left(\frac{y_0\theta_0}{\delta_0}\right)x.$$

Enfin l'erreur finale se répartit sur les états de la traversée proportionnellement au temps.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces méthodes qui conduisent généralement à des calculs assez longs, et nous allons en exposer une qui nous paraît plus simple et plus pratique.

Remarquons d'abord que dans le problème qui nous occupe, les marches et les états ne sont que des intermédiaires, et que la véritable inconnue est la longitude. Il est donc conforme aux usages de l'Astronomie de faire figurer explicitement cette inconnue ou la correction de sa valeur approchée dans les formules du problème.

Remarquons ensuite que la condition arbitraire à laquelle on assujettira les marches ne s'impose pas avec évidence; on peut se guider sur le sentiment de la continuité; mais on peut aussi, en considération de la nature supposée accidentelle des erreurs dont il s'agit, recourir aux considérations tirées de la théorie des erreurs. Ces considérations seront exposées plus loin; le détail en est inutile pour l'intelligence de ce qui va suivre.

Reportons-nous au Paragraphe 127. Supposons les x connus, et considérons la courbe qui a pour abscisses les temps et pour ordon-

nées les états absolus, c'est-à-dire les $C + x$. Si la marche était uniforme, cette courbe serait une droite. C'est le cas idéal, celui vers lequel on tend par le perfectionnement du chronomètre et des méthodes d'observation. Nous aurons donc un résultat *plausible* si nous obtenons des valeurs de x telles que la ligne brisée résultante diffère le moins possible d'une droite, tout en satisfaisant aux conditions qui résultent des observations mêmes.

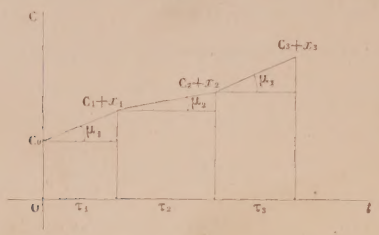
Soient :

a la longueur d'un des éléments rectilignes ;

μ l'inclinaison de cet élément sur l'axe des temps ;

τ l'intervalle en temps de deux observations consécutives ;

Fig. 56.



q la différence de deux états consécutifs, ramenés au temps du premier méridien : on aura

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{q}{\tau}, \qquad a\cos\mu = \tau ;$$

d'où

$$a^2 = \tau^2\left(1 + \frac{q^2}{\tau^2}\right).$$

Pour que la ligne brisée que nous considérons soit aussi voisine que possible d'une droite, sa longueur doit être la plus courte possible ; il faut donc rendre la somme Σa un minimum.

Faisons voir d'abord que dans le cas présent, cela revient au même que de chercher le minimum de Σa^2.

En effet, nous pouvons connaître des valeurs très approchées des longitudes des points intermédiaires, en calculant ces longitudes avec une valeur constante de la marche, déduite de la comparaison des états extrêmes observés en des points connus.

Dans ce cas, les x ne seront donc plus que de petites corrections, et la ligne brisée des états absolus vrais sera déjà assez voisine de la droite qui joint les points extrêmes. Cela étant, on peut considérer les inclinaisons ε de ces éléments sur la droite $C_0 C_m$ comme des quantités très petites du premier ordre. Soit b la longueur de cette droite, et supposons trouvé le minimum Σa correspondant aux conditions du problème. Ce minimum existe évidemment, il est déterminé; il diffèrera de b d'une quantité très petite β qui est également déterminée et peut être considérée comme une constante inconnue. On a donc les relations

$$\Sigma a = b + \beta, \qquad \Sigma a \cos\varepsilon = b,$$

puisque la droite b est la somme des projections des droites a.

Affectant les a et les ε d'indices $i\,j$ pour les distinguer les uns des autres, et élevant au carré Σa, nous tirons de là

$$\Sigma a_i^2 + \Sigma a_i a_j = b^2 + 2\,b\beta + \beta^2$$

et

$$\Sigma a_i^2 \cos^2\varepsilon_i + \Sigma a_i a_j \cos\varepsilon_i \cos\varepsilon_j = b^2,$$

et en faisant la différence,

$$\Sigma a_i^2 (1 - \cos^2\varepsilon_i) + \Sigma a_i a_j (1 - \cos\varepsilon_i \cos\varepsilon_j) = 2\,b\beta + \beta^2.$$

D'ailleurs, en faisant la différence des deux premières relations,

$$\Sigma a_i (1 - \cos\varepsilon_i) = \beta.$$

On voit que β est du deuxième ordre en ε. Négligeant alors les quantités en ε^4 et β^2, on aura

$$\Sigma a_i^2 = 2\,\beta\,\Sigma a_i,$$

et puisque β n'est pas variable, le minimum de Σa_i^2 correspond aux mêmes valeurs de a que celui de Σa_i, et réciproquement.

Cela posé

$$\Sigma a_i^2 = \Sigma \tau_i^2 \left(1 + \frac{q^2}{\tau^2}\right) = \Sigma (\tau_i^2 + q_i^2) = \Sigma \tau_i^2 + \Sigma q_i^2.$$

Comme $\Sigma \tau_i^2$ est une constante, le minimum de Σa_i^2 correspond à celui de Σq_i^2 qu'il s'agit de trouver.

Rappelons que

$$q_i = (C_i + x_i) - (C_{i-1} - x_{i-1}),$$

et par suite

$$\Sigma a_i^2 = \Sigma \tau_i^2 + \Sigma [(C_i - C_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]^2;$$

il s'agira en dernière analyse de chercher les valeurs de x qui rendent minimum le terme entre crochets.

Par hypothèse, les longitudes des points extrêmes sont connues, donc x_0 et x_m sont nuls. Si l'on pose

$$[(C_i - C_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]^2 = \varphi^2(u),$$

on a la différentielle totale

$$d\varphi^2(u) = 2\varphi(u)\,du$$

ou bien

$$\begin{aligned} &d[(C_i - C_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]^2 \\ &= 2[(C_i - C_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})](dx_i - dx_{i-1}). \end{aligned}$$

Effectuant les différentiations, la différentielle totale de Σa^2 sera

$$\begin{aligned} &2[(C_1 - C_0 + x_1) - (C_2 - C_1 + x_2 - x_1)]\,dx_1 \\ &+ 2[(C_2 - C_1 + x_2 - x_1) - (C_3 - C_2 + x_3 - x_2)]\,dx_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Egalant à zéro les coefficients des différentielles pour trouver la condition du minimum, on arrive aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 + C_2 - 2C_1 &= 2x_1 - x_2, \\ C_1 + C_3 - 2C_2 &= 2x_2 - x_1 - x_3, \\ C_2 + C_4 - 2C_3 &= 2x_3 - x_2 - x_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_{p-1} + C_{p+1} - 2C_p &= 2x_p - x_{p-1} - x_{p+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_{m-3} + C_{m-1} - 2C_{m-2} &= 2x_{m-2} - x_{m-3} - x_{m-1}, \\ C_{m-2} + C_m - 2C_{m-1} &= 2x_{m-1} - x_{m-2}. \end{aligned}$$

Malgré le grand nombre de ces équations, l'élimination des inconnues peut se faire très simplement en commençant par tirer de la première équation une valeur de x_1, de la dernière une valeur de x_{m-1} et substituant ces valeurs dans les deuxième et avant-dernière équations. De celles-ci on tire x_2 et x_{m-2}, que l'on substitue dans les équations immédiatement voisines, et ainsi de suite.

On arrive ainsi aux solutions, qu'on peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
mx_1 &= (m-1)\,C_0 - mC_1 + C_m,\\
mx_2 &= (m-2)\,C_0 - mC_2 + 2\,C_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
mx_p &= (m-p)\,C_0 - mC_p + pC_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
mx_{m-2} &= 2\,C_0 - mC_{m-2} + (m-2)\,C_m\\
mx_{m-1} &= \;\;C_0 - mC_{m-1} + (m-1)\,C_m,
\end{aligned}$$

et l'on vérifie aisément que ces valeurs satisfont en effet aux équations proposées.

On remarquera que c'est bien un minimum que nous avons obtenu : car on peut représenter les équations primitives du problème en donnant aux x_i des valeurs arbitraires positives ou négatives aussi grandes qu'on le veut, ce qui allonge sans limite la ligne brisée Σa : il n'y a donc pas de maximum, mais bien une valeur plus petite que toutes les autres, et c'est celle que donne la méthode.

Il est curieux d'observer que les intervalles τ de temps ont disparu de la solution et que celle-ci ne contient que les états absolus multipliés par des nombres entiers. De là une grande simplicité de calcul, relativement à toutes les autres méthodes qui font intervenir la considération des marches. On est dispensé du calcul des dates et de la réduction à des heures uniformes.

Nous allons considérer un cas particulier très intéressant. C'est celui où, partant d'un point A, on visite successivement les points B, C, . . . , E, F, G, puis on revient de G par F, E, . . . , C, B en A. C'est donc un cycle fermé d'observations qui impose aux marches de satisfaire à certaines conditions, car on connaît la marche de A en A, de B en B, etc., et celle observée en G.

On voit alors facilement, en combinant les valeurs symétriques, que

$$2\,x_p = 2\,x_{m-p} = C_0 - C_p - C_{m-p} + C_m.$$

Il peut aussi se faire qu'on connaisse une relation entre deux des x : en l'introduisant dans le calcul, on aura des simplifications analogues pour la détermination de ces valeurs.

En général, cette méthode donne des valeurs qui satisfont à toutes

les relations *obligées* qui existent entre les diverses observations : toutes les observations interviennent en effet dans le calcul.

Les longitudes dépendent bien uniquement des marches à la mer. La seule restriction, c'est que si l'on fait aux points extrêmes plusieurs observations pendant la relâche, on peut faire concourir les marches observées en rade à la détermination des coefficients d'accélération ; mais un seul état doit figurer dans les équations, celui qui est le plus voisin de la traversée : l'introduction des autres aurait pour résultat de mêler des marches en rade et des marches à la mer, et l'on perdrait l'homogénéité des données.

Pour la même raison, une série de calculs ne doit comprendre que les observations comparables entre elles, comme on l'a déjà fait observer.

Pour la recherche du minimum, nous avons dû supposer x petit, afin de pouvoir supposer Σa^2 minimum en même temps que Σa. Mais, dans le résultat définitif, la condition de petitesse imposée aux x_i disparaît.

En effet on a

$$x_p = \frac{m-p}{m} C_0 - C_p + \frac{p}{m} C_m.$$

Soit X la longitude admise pour ce point comme première approximation ; soit C'_p le retard réellement observé sur le temps local. On a, X désignant une longitude ouest,

$$C_p = C'_p + X.$$

D'ailleurs la vraie longitude est

$$X + x_p = G_p,$$

d'où

$$x_p = G_p - X.$$

Substituant dans la première équation, on a

$$G_p - X = \frac{m-p}{m} C_0 - C'_p - X + \frac{p}{m} C_m$$

ou

$$G_p = \frac{m-p}{m} C_0 - C'_p + \frac{p}{m} C_m.$$

On n'a donc pas besoin de calculer au préalable une valeur appro-

chée de la longitude : celle-ci se déduit directement des états observés.

C_m seul doit être réduit au même méridien que C_0, c'est-à-dire au méridien de départ qui est supposé, pour plus de simplicité, avoir été pris pour origine des longitudes. Les x représenteront donc les longitudes elles-mêmes, et les C seront les corrections observées.

Cette méthode joint à sa simplicité l'avantage de donner le résultat le plus plausible, et surtout de fournir une règle fixe, et de faire ainsi disparaître tout arbitraire dans la manière de combiner les données entre elles. On remarquera que les nombres figurant dans les calculs ont tous le même degré de précision ; ce qui n'arrive pas pour les *marches*.

Cela posé, voyons comment on utilisera un plus grand nombre de chronomètres.

On peut admettre que les erreurs de comparaison sont négligeables, surtout si l'on a recours à la méthode des coïncidences.

Les erreurs d'état affectent ainsi de la même manière tous les résultats obtenus en un point, et se reportent intégralement sur la longitude calculée. Les relations nécessaires résultant des comparaisons se trouvent satisfaites pour chaque valeur de C_p, et il n'y a plus à en tenir compte ultérieurement. Si les chronomètres marchaient complètement d'accord, les corrections x_p, x'_p, x''_p, ... déduites de différentes montres seraient égales entre elles. Il n'en est pas ainsi dans la réalité, mais chacune des valeurs différentes a la même probabilité, si l'on n'a pas constaté de perturbation indiscutable. La moyenne arithmétique des x_p, x'_p, x''_p, ... fournira donc la valeur la plus probable de la correction.

Nous donnons ici un exemple d'application de la méthode qui vient d'être exposée. En 1878, on a fait la série d'observations qui suit avec trois chronomètres et un compteur :

LOCALITÉS.	DATES.	ÉTATS ABSOLUS.				
		834 Bréguet.	339 Vissière	529 Winnerl.	223 Jacob.	
		9^h	10^h	7^h	11^h	
		m s	m s	m s	m s	
Saïgon.....	Avril 14	47.20,5	36. 3,8	7.41,0	52.38,6	C_0
Quinhone..	Avril 25	41,5	44,8	38,8	53.18,9	C_1
Tourane...	Avril 30	47.51,2	37. 5,7	38,9	38,5	C_2
Haï-Phong.	Mai 11	48. 9,5	58,4	39,5	54.30,3	C_3
Haï-Phong.	Mai 15	13,6	38.17,7	39,4	47,0	C_4
Tourane...	Mai 26,75	17,4	39.11,6	40,7	55.38,1	C_5
Quinhone..	Mai 30,5	17,2	30,7	41,3	54,0	C_6
Saïgon	Juin 12	48.17,1	40.37,2	7.43,0	56.34,6	C_7

Ces états sont ramenés au méridien de Saïgon, dont la longitude est $6^h57^m24^s$ Est $= +17^h2^m36^s$. Les longitudes admises pour les autres points, et dont il y a lieu de chercher la correction, sont dans cet exemple celles qui ont été adoptées après la discussion d'observations nombreuses et variées, dues à différents observateurs, reliées entre elles par des triangulations partielles, et qui ont servi de base à la Carte de l'Annam dressée à la suite de nos reconnaissances de 1878-79. On pourra donc considérer les corrections que nous trouverons comme étant, avec un signe contraire, les erreurs que l'on aurait commises sur les longitudes en ne les déduisant que de cette série. Les états sont la moyenne d'observations faites de part et d'autre du méridien avec un théodolite à microscopes de Brunner.

Les formules applicables ici sont

$$2x_1 = C_0 - C_1 - C_6 + C_7,$$
$$2x_2 = C_0 - C_2 - C_5 + C_7,$$
$$2x_3 = C_0 - C_3 - C_4 + C_7.$$

Négligeant, pour plus de simplicité, les heures entières qui restent les mêmes, nous disposons les calculs comme suit :

	m s	m s	m s	m s
C_0	47.20,5	36. 3,8	7.41,0	52.38,6
C_7	48.17,1	40.37,2	7.43,0	56.34,6
$C_0 + C_7$....	95.37,6	76.41,0	15.24,0	109.13,2

	m s	m s	m s	m s
C_1	47.41,5	36.44,8	7.38,8	53.18,9
C_6	48.17,2	39.30,7	7.41,3	55.54,0
$C_1 + C_6$....	95.58,7	76.15,5	15.20,1	109.12,9
$2x_1$	— 21,1	+ 25,5	+ 3,9	+ 0,3
x_1	— 10,55	+ 12,75	+ 1,95	+ 0,15
C_2	47.51,2	37 5,7	7.38,9	53.38,5
C_5	48.17,4	39.11,6	7.40,7	55.38,1
$C_2 + C_5$....	96. 8,6	76.17,3	15.19,6	109.16,6
$2x_2$	— 31,0	+ 23,7	+ 4,4	— 3,4
x_2	— 15,5	+ 11,85	+ 2,2	— 1,7
C_3	48. 9,5	37.58,4	7.39,5	54.30,3
C_4	48.13,6	38.17,7	7.39,4	54.47,0
$C_3 + C_4$....	96.23,1	76.16,1	15.18,9	109.17,3
$2x_3$	— 45,5	+ 24,9	+ 5,1	— 4,1
x_3	— 22,75	+ 12,45	+ 2,55	— 2,05

D'après cela, si nous prenons les moyennes, les corrections des longitudes adoptées seraient

Quinhone..... $x_1 = +1^s,075$
Tourane..... $x_2 = +0,06$
Haï-Phong..... $x_3 = -2,45$.

Telles sont donc les erreurs définitives de la méthode.

132. — Remarques sur les méthodes chronométriques.

Nous avons déjà fait observer que, tandis que les anciennes méthodes ont principalement en vue d'établir la continuité de la courbe des états, celle que nous venons d'exposer sacrifie ce principe, et le remplace par la condition d'avoir les erreurs les plus petites possibles. Les motifs de cette substitution sont tirés de la nature même des observations mises en œuvre. Toutes les méthodes de calcul de la marche en rade supposent essentiellement cette marche constante pendant la durée des opérations du réglage. Si donc nous considérons la *courbe* des états successifs d'un voyage complet, tous les éléments de cette courbe correspondant à plu-

sieurs observations faites en un même lieu sont rectilignes. D'autre part, les durées des traversées actuelles sont souvent inférieures aux durées des séjours; elles ne leur sont guère supérieures quand on poursuit des déterminations précises. Dans ce cas, le mot de *continuité*, entendu dans son sens pratique, signifierait que les différentes parties de la même courbe doivent être de même nature, et que si la moitié des éléments sont rectilignes par hypothèse, l'autre moitié doit satisfaire à la même condition.

Supposons qu'aux époques x_0 et x_1 en A, x_2 et x_3 en B on ait observé des états dont on ait déduit les états normaux y_0, y_1, y_2 et y_3.

Voici comment on procède quelquefois pour le calcul de la longitude :

On calcule les marches $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ aux lieux de régulation. Puis on déduit les marches de la traversée en admettant qu'à partir de l'observation y_1 jusqu'à l'observation y_2 la marche a varié d'une façon continue.

On arrive ainsi à représenter la marche de chaque jour x de la traversée par une formule de la forme

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{x - x_1}{x_3 - x_2}\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

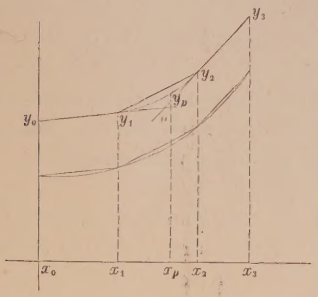
et cette marche varie avec x.

Considérons la courbe dont les ordonnées sont les états absolus, et les abscisses, les temps. La marche entre y_1 et y_2 étant une fonction du premier degré de l'intervalle $x_1 x_2$, la courbe des états sera une parabole ayant son axe parallèle aux y et assujettie à être tangente en y_1 et y_2 aux droites $y_0 y_1$ et $y_2 y_3$. Il est difficile de justifier cette manière arbitraire de procéder.

L'expérience montre qu'on représente assez bien la différence d'allure en mer et en rade en ajoutant à la marche en rade une quantité constante. Si donc on admet, comme on le fait effectivement, que les deux marches en rade sont constantes et peuvent être représentées par l'inclinaison des cordes de la courbe inconnue des états, il n'y a pas de motif pour procéder autrement pendant la traversée. Si l'on pensait que les chronomètres s'acclimatent progressivement au régime de la mer, il faudrait aussi

supposer qu'ils reviennent progressivement au régime de la rade. Mais les effets mécaniques qui produisent le changement de vitesse donnent tout leur effet dès le premier jour; le changement de marche doit donc avoir lieu brusquement. C'est pour cela qu'il nous paraît préférable de prendre pour marche de la traversée l'in-

Fig. 57.



clinaison de la corde $y_1 y_2$, qui est *sensiblement* la moyenne des deux marches de rade.

Si l'on voulait opérer en toute rigueur et admettre la continuité des variations, voici ce qu'il faudrait faire. Assimilant la courbe complète à une parabole, soit

$$(x - a)^2 = 2p\,(y - b)$$

son équation : y_0 et y_1 sont connus : y_2 et y_3 sont les inconnues du problème, dont on ne connaît que la différence. Les constantes de la formule se tirent de la relation

$$(x_0 - a)^2 = 2p\,(y_0 - b)$$

et de trois autres analogues où les indices 1, 2, 3 remplacent respectivement l'indice 0. Retranchant ces équations deux à deux, il vient

$$x_1^2 - x_0^2 = 2a\,(x_1 - x_0) + 2p\,(y_1 - y_0),$$
$$x_3^2 - x_2^2 = 2a\,(x_3 - x_2) + 2p\,(y_3 - y_2).$$

Les inconnues sont a et p, car les x et les différences des y sont

connus. Soit donc.

$$x_1 - x_0 = \tau_0, \qquad x_2 - x_1 = \tau_1, \qquad x_3 - x_2 = \tau_2,$$
$$x_1 + x_0 = 2t_0, \qquad x_2 + x_3 = 2t_2,$$
$$y - y_0 = \Delta_0, \qquad y_3 - y_2 = \Delta_2,$$

on aura

$$a = \frac{\Delta_0 \tau_0 t_2 - \Delta_2 \tau_0 t_0}{\Delta_0 \tau_2 - \Delta_2 \tau_0}$$

$$p = \frac{\tau_0 \tau_2 (t_0 - t_2)}{\Delta_0 \tau_2 - \Delta_2 \tau_0}$$

et en substituant dans une des deux premières équations, on trouvera b dont la substitution dans les deux dernières donnera y_2 et y_3 : le problème est donc complètement résolu. (Cas particulier de la méthode de M. Ploix.)

Mais il est facile de voir que ce calcul passablement compliqué ne donnera pas, en réalité, une précision beaucoup plus grande que celle qu'on obtient en remplaçant les trois arcs de courbe par leurs cordes respectives : c'est le procédé que nous avons recommandé. Les deux résultats concorderont d'autant mieux que les intervalles τ_0, τ_1, τ_2 seront plus voisins de l'égalité.

Tout cela revient à supposer que la meilleure manière de représenter une courbe dont on connaît deux points et la direction d'une corde entre deux abscisses déterminées, est de l'assimiler à une parabole à axe vertical.

En effet, si la marche est, pour l'époque x,

$$m = m_0 + ax + b\theta + c\theta^2,$$

la variation d'état de x_0 à x_p sera

$$\Delta y = \int_{x_0}^{x_p} (m_0 + ax)\, dx + \Sigma b\theta + \Sigma c\theta^2.$$

On a déjà éliminé les deux derniers termes, il ne reste plus que l'intégrale, dont la valeur est

$$\Delta y = m_0 (x_p - x_0) + \tfrac{1}{2} a (x_p^2 - x_0^2)$$

Le calcul conduit au même résultat que si l'on avait pris la formule complète des marches, et l'on s'est trouvé avoir considéré implicitement l'accélération comme constante.

133. — Règles pratiques.

Aux indications données, nous en joindrons quelques-unes qui n'ont pu trouver place plus haut.

On recommande généralement d'éviter le tir du canon quand on fait une campagne chronométrique. Cette recommandation est bonne : elle doit être suivie le plus rigoureusement possible. Nous avons pourtant constaté que dans un voyage durant lequel on avait été amené, par cas de force majeure, à tirer à boulets, les résultats n'étaient pas plus mauvais que ceux qu'on pouvait attendre de la durée de la campagne. Nous disons ceci, non pour écarter toute crainte, d'autres expériences, nous le savons, ont été moins heureuses, mais afin que l'on ne croie pas perdues de prime-abord des observations faites dans ces conditions.

Les erreurs que comporte une longitude chronométrique sont de deux sortes : d'une part, les erreurs d'état, qui affectent de la même manière les longitudes déduites des différents chronomètres, et, d'autre part, les erreurs sur la marche conclue, qui varient d'un chronomètre à l'autre.

Les premières dépendent de l'instrument employé pour la détermination de l'heure et des circonstances dans lesquelles cette observation a été faite. Quand on observe à terre avec un sextant, à l'horizon artificiel, des hauteurs doubles, on peut compter sur une erreur de 3^s à 4^s sur l'état : cette erreur provient des constantes du sextant, de la réfraction, d'une latitude inexacte, etc. Quand l'état est conclu de la combinaison de hauteurs à peu près correspondantes observées matin et soir, l'erreur peut être réduite de moitié et ne pas dépasser 2^s si les observations sont bien faites. Avec un bon théodolite, en opérant dans les mêmes conditions, les erreurs sont à peu près la moitié de celles qui correspondent aux instruments à réflexion. Elles peuvent être réduites à une valeur négligeable par l'emploi exclusif de la lunette méridienne.

Les erreurs dues aux chronomètres mêmes sont plus difficiles à évaluer : elles dépendent de la longueur de la traversée et des circonstances de celle-ci, de la précision avec laquelle les coefficients de température ont été déterminés, de l'exactitude d'évaluation des températures, etc. L'examen de nombreux transports de

temps, exécutés avec soin par différents officiers, nous a montré qu'en somme l'erreur moyenne d'une détermination de longitude chronométrique faite avec trois chronomètres, en observant à terre à l'horizon artificiel, ne dépasse guère 3^s à 4^s de temps. On arrive à doubler ces erreurs quand on observe à l'horizon de la mer : ce mode de procéder doit donc être rejeté. On peut, au contraire, prétendre à une approximation supérieure quand on opère à terre avec des instruments précis, en s'entourant de toutes les précautions nécessaires pour rendre les observations comparables, et en rapprochant beaucoup les observations. Dans ce dernier cas, lorsqu'il s'agit de la détermination d'une base astronomique, les différences de longitude peuvent être obtenues avec une précision comparable à celle qu'on obtient pour les différences de latitude.

Nous ne nous étendrons pas sur les méthodes employées pour faire le point en mer (1^er^ cas du § 131). Elles ne diffèrent par rien d'essentiel de celles que nous venons d'exposer ; il s'agit ici de déduire les marches probables des marches antérieures seules : l'emploi d'un seul chronomètre, dont on détermine par les comparaisons autant de marches qu'on a de chronomètres différents, et auquel on attribue la marche moyenne de celles ainsi obtenues, facilite les calculs et les rend plus rapides : mais si cette méthode est bonne pour l'usage journalier de la navigation, nous ne conseillons pas de procéder ainsi pour la détermination de longitudes géographiques : les vérifications de calcul font défaut, et la discussion des résultats est beaucoup moins aisée.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique aux voyages par terre aussi bien qu'à la navigation : mais les secousses que subissent alors les chronomètres sont plus irrégulières et les perturbations beaucoup plus grandes. Il est donc nécessaire de recourir à des vérifications bien plus fréquentes ; heureusement la nature des instruments dont on peut se servir à terre et la stabilité qu'on peut leur donner permettent des observations plus précises, et les méthodes de Géodésie expéditive fournissent le moyen, qui fait le plus souvent défaut en mer, de rattacher les points entre eux.

134. — Longitude par des observations de Lune.

Le mouvement propre de la Lune en ascension droite et en distance polaire fait que l'observation de cet astre est éminemment appropriée à la détermination des longitudes. Le principe commun de toutes les observations revient à déterminer à une heure locale connue les coordonnées de l'astre, et à trouver par interpolation dans les Tables l'heure du premier méridien qui correspond à ces coordonnées. L'ascension droite de la Lune varie d'environ 2^s par minute: si donc on peut déterminer cette ascension droite à $0^s,1$ près, on connaîtra l'heure du premier méridien à 3^s près. La simplicité apparente du principe ne se retrouve plus dans les applications. Il semble très facile de déterminer à $1''$ d'arc près la position de cet astre dans le ciel: en réalité, les incertitudes résultant de la parallaxe, du demi-diamètre, les erreurs instrumentales, les équations personnelles ont une influence très grande, et il nous suffira de rappeler que les corrections des Tables de Hansen, déterminées le même jour dans deux observatoires de premier ordre, peuvent différer entre elles d'une demi-seconde de temps. Les Tables actuelles de la Lune, même avec les corrections de M. Newcomb, sont encore loin de présenter la certitude des autres Tables astronomiques. La multiplication des observations est impuissante à lever entièrement ces difficultés: disons seulement que la longitude de Madras déterminée par 578 observations de culminations lunaires, calculées et discutées avec soin, diffère de 2^s de la valeur admise par M. Airy, d'après les déterminations télégraphiques, et que 600 distances lunaires, observées à bord de la *Thétis*, ont donné une longitude de Tourane qui est en erreur de 30^s de temps.

Ces observations donnent néanmoins une exactitude supérieure à celle que l'on peut atteindre avec les éclipses des satellites de Jupiter; et il arrive souvent en voyage qu'on n'a pas d'autres ressources à sa disposition. Il est donc nécessaire de bien connaître le parti qu'on peut tirer des observations de la Lune.

135. — Culminations lunaires.

On observe à la lunette méridienne le passage de la Lune au méridien: on observe aussi un certain nombre d'étoiles culminant avant

et après la Lune, et ayant à peu près même distance polaire. Les corrections instrumentales restant sensiblement les mêmes pour ces étoiles et pour la Lune, les différences d'ascension droite sont déterminées avec précision, et comme on connaît exactement les ascensions droites des étoiles, on en déduit celle de la Lune à l'instant de l'observation. On conclut de là, par interpolation dans les éphémérides, l'heure du premier méridien à laquelle correspond cette ascension droite: d'autre part, on connaît l'heure locale par les passages d'étoiles: la différence de ces heures donne la longitude cherchée.

Tel est le principe théorique de la méthode. Dans la pratique, il faut avoir égard à diverses circonstances :

1° On n'observe pas directement le centre de la Lune, mais son bord éclairé.

2° L'instrument n'est pas exactement dans le méridien.

3° Les Tables de la Lune sont affectées de petites erreurs.

Il résulte des deux premières circonstances que l'heure du passage observé a besoin de corrections; on peut suivre plusieurs marches différentes pour faire ces corrections et l'ensemble du calcul: nous nous bornerons à en indiquer deux afin de permettre la vérification des opérations numériques.

Première méthode. — On calculera d'abord la correction C_p du chronomètre à l'instant du passage observé. Pour cela, on se servira des observations des étoiles de culmination lunaire, corrigées comme il a été dit à propos de l'emploi de la lunette méridienne pour la détermination de l'heure: on trouvera plusieurs valeurs qui, réduites à l'instant de l'observation de la Lune, en corrigeant de la marche de la montre dans l'intervalle, doivent donner des résultats sensiblement égaux, dont on prend la moyenne. On aura directement la correction du chronomètre sidéral, et l'on peut calculer celle du chronomètre temps moyen par la méthode donnée Paragraphe 105. Admettons pour fixer les idées qu'on ait calculé la correction C_p pour le temps sidéral.

Soit maintenant t l'heure du passage du bord de la Lune au fil moyen, $t + C_p$ sera l'heure sidérale de l'observation. Soit P la somme des corrections instrumentales, calculées sans avoir égard au mouvement propre de la Lune en ascension droite:

P représentera l'angle horaire, exprimé en secondes de temps et compté *vers l'Est*, du bord de la Lune à l'instant $t + C_p$.

La différence P′ entre les angles horaires du centre et du bord est fournie par la relation des triangles rectangles

$$\sin P' = \frac{\sin \frac{1}{2} D}{\sin \delta},$$

en considérant le triangle formé par les cercles de déclinaison du centre et du bord et par le grand cercle représentant le demi-diamètre $\frac{1}{2}$ D, mené du centre perpendiculairement au grand cercle tangent au bord. On peut prendre avec une approximation suffisante

$$P' = \frac{\frac{1}{2} D}{15 \sin \delta},$$

$\frac{1}{2}$ D est pris dans les Tables en secondes d'arc, et P′ sera exprimé en secondes de temps.

L'ascension droite du centre de la Lune à l'heure sidérale $t + C_p$ est donc

$$\alpha = t + C_p + P \pm \frac{\frac{1}{2} D}{15 \sin \delta},$$

le signe + s'applique aux passages du premier bord, ou bord ouest, le signe — aux passages du deuxième bord.

On réduira maintenant l'heure sidérale de l'observation $t + C_p$ en temps moyen local : il ne reste plus qu'à connaître le temps moyen du premier méridien (mettons Paris) et à faire la différence des deux pour avoir la longitude.

Supposons que les éphémérides donnent les ascensions droites du centre de la Lune d'heure en d'heure (*Nautical Almanac* et *Connaissance des Temps*). On cherche les heures entre lesquelles est comprise l'ascension droite du centre telle qu'elle vient d'être calculée. On prend la différence première $\Delta \alpha_0$ des ascensions droites correspondantes, puis leur différence seconde $\Delta^2 \alpha_0$, en s'aidant des valeurs qui précèdent et qui suivent les deux valeurs considérées. On peut admettre qu'avec les Tables citées la différence troisième est négligeable, ce que l'on vérifie d'ailleurs en calculant deux différences secondes.

Soient maintenant

α l'ascension droite du centre de la Lune,
τ l'heure correspondante temps moyen de Paris,
α_0 la valeur tabulaire immédiatement inférieure à α,
τ_0 l'heure correspondante de Paris.

On sait qu'en appelant k l'intervalle de l'argument des Tables, on a

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\tau - \tau_0}{k}\Delta\alpha_0 + \left(\frac{\tau - \tau_0}{k}\right)\left(\frac{\tau - \tau_0}{k} - 1\right)\frac{\Delta^2\alpha_0}{2} + \dots$$

L'inconnue du problème est τ. L'intervalle k est égal à une heure; si nous prenons la seconde pour unité, $k = 3600$.

Cette équation du deuxième degré en τ se résout, comme on l'a vu (§ 10), par approximations successives. On calcule une première valeur de $\tau - \tau_0$, que nous appelons T, par la formule

$$T = 3600\frac{\alpha - \alpha_0}{\Delta\alpha_0},$$

la valeur exacte de l'heure de Paris cherchée sera

$$\tau = \tau_0 + T + \frac{T(3600 - T)}{3600\,\Delta\alpha_0}\frac{\Delta^2\alpha_0}{2},$$

Comme $\Delta^2\alpha_0$ peut atteindre la valeur $0^s,32$, l'application de la formule simplifiée

$$\tau - \tau_0 = 3600\,\frac{\alpha - \alpha_0}{\Delta\alpha_0 - \frac{1}{8}\Delta^2\alpha_0}$$

peut entraîner une erreur de $0^s,023$, ce qui correspond à environ $0^s,7$ sur la longitude. Au lieu de réduire le temps sidéral local en temps moyen local, on peut aussi réduire le temps moyen de Paris en temps sidéral, ce qui n'exige pas la connaissance préalable de la longitude cherchée; celle-ci sera égale à la différence des heures sidérales.

Si l'on a observé avec un chronomètre temps moyen, on calculera sa correction temps moyen en comparant les heures des passages corrigés à l'heure du passage au méridien en temps moyen, égale à la différence entre l'Æ de l'étoile et le temps sidéral à midi

moyen, réduite en temps moyen. Le reste du calcul comme ci-dessus, sauf la réduction de $t + C_p$ en temps moyen, qui est toute faite.

Ce calcul suppose les Tables de la Lune exactes. Celles actuellement en usage, et dues à Hansen, ne satisfont pas complètement à cette condition. Il est donc nécessaire d'en corriger les données. M. Newcomb a calculé ces corrections et la *Connaissance des Temps* en donne la Table. D'autre part, ces mêmes corrections sont déterminées très soigneusement par l'observation méridienne de la Lune dans les grands Observatoires des deux mondes.

Les Tables sont pourtant assez exactes pour que l'on puisse considérer que leur erreur reste constante pendant deux ou trois jours. Partant de là, en s'aidant des corrections de M. Newcomb, et rectifiant ces corrections au moyen de toutes les observations correspondantes qu'on peut se procurer, on détermine la correction des Tables pour l'époque de l'observation. Soit ε la correction de l'ascension droite tabulaire, on calculera la correction de la longitude obtenue avec les Tables, en multipliant ε par le facteur $\frac{3600}{\Delta\alpha_0}$ qu'on a dû calculer d'avance pour trouver T. La petitesse de ε permet de négliger les différences secondes. La correction de la longitude est donc

$$\partial\ell = \pm\frac{3600}{\Delta\alpha_0}\varepsilon.$$

Le signe + s'applique aux longitudes Est, le signe — aux longitudes Ouest. On aura égard, cela va sans dire, au signe de ε qui est généralement négatif.

La *Connaissance des Temps* donne depuis 1876 des Tables spéciales destinées à faciliter le calcul des longitudes par les culminations. Sans entrer dans le détail des opérations que l'on trouvera dans les explications de la *Connaissance des Temps,* nous dirons que ces Tables donnent pour chaque heure de Paris la longitude des lieux où la Lune passe au méridien. Il est donc nécessaire de connaître exactement l'heure du passage méridien du centre de la Lune. Pour cela, on calculera d'abord la correction instrumentale P_1, en ayant égard au mouvement propre de l'astre en ascension droite (§ 48) et $t + P_1$ représentera l'heure du passage du bord au méridien. Puis on calculera pour cette heure la durée du passage du demi-diamètre, et l'on déduira de là l'heure du passage du

centre. La manière d'interpoler pour en déduire la longitude est expliquée avec détails dans la *Connaissance des Temps* qui donne des exemples. Nous citons ici une application de la première méthode.

CALCUL DE LONGITUDE PAR UNE CULMINATION LUNAIRE.

Guadeloupe (Jardin de l'hôpital militaire de la Pointe-à-Pitre).

1er novembre 1868.

ASTRE.	HEURE observée du passage au méridien.	NIVEAU.	CORRECTION totale.	SECONDES du passage corrigé.	TEMPS moyen du passage au méridien.	CORRECTION du chronomètre
	h m s	s	s	s	h m s	h m s
β Persée..	11.58. 2,42	+ 0,27	+ 0,35	2,78	12.12.46,76	0.14.43,98
12 Eridan.	12. 4.50,90	+ 0,32	1,62	52,52	19.36,77	44,25
α Persée ..	13.19,70	+ 0,39	0,31	20,01	28. 4,26	44,25
e Taureau.	39.20,96	+ 0,42	0,97	21,93	54. 5,84	43,91
☾ IIe bord.	13. 1.32,28	+ 0,40	0,89			
γ Taureau.	10.31,40	+ 0,38	0,87	32,27	13.25.15,69	43,42
δ' Taureau.	13.33,44	+ 0,36	0,82	34,26	28.17,64	43,38
2 Taureau.	19. 7,85	+ 0,34	0,80	8,65	33.51,92	43,27

Le chronomètre était un compteur temps moyen : Avance diurne $6^s,77$ (—). Collimation $z = +0^s,445$.

La déviation azimutale $x = +1^s,038$ a été déduite des équations de condition relatives à l'ensemble des observations, traitées par la méthode des moindres carrés, conformément aux prescriptions du Bureau des Longitudes.

Avec la marche diurne donnée, on commence par réduire tous les états à l'heure du passage de la Lune. Par exemple, pour 12 Eridan, observée $56^m 41^s = 0^h,945$ avant la Lune, la correction est $-6,77 \times \frac{0,945}{24} = -0^s,27$ et l'état corrigé $0^h 14^m 43^s,98$.

	h m s	
L'état absolu adopté est.....	0.14.43,52	
t, passage observé de la ☾..	13. 1.32,28	
correspond à l'heure.....	13.16.15,80	Temps moyen du lieu.
Avec la longitude approchée.	+ 4.15.20	
On trouve l'heure	17.31.35,8	Temps moyen de Paris.

On calcule pour cette heure dans la *Connaissance des Temps :*

Déclinaison de la Lune.	15°38′50″	colog cos.	0,01640
Demi-diamètre.....	15 39″,7	log.....	2,97299
		$\log\frac{1}{15}$....	8,82391
		log P′.....	1,81330

d'où $P' = 65^s,06$.

L'heure (temps moyen) doit être réduite en intervalle sidéral depuis midi.

	h m s	
	13.16.15,80	
Correction.....	+ 2.10,81	
Intervalle sidér. depuis midi.	13.18.26,61	
Temps sidéral à midi.....	14.44.52,44	
Heure sidérale de l'observ^{on}	4. 3.19,05	
Angle horaire du centre ℂ.	— 1. 4,17	(à l'Ouest) [— 65^s,06 + 0,89]
Ascension droite du centre.	4. 2.14,88	à 13^{h}16^{m}15^s,80 T. moy. du lieu

Avec les ascensions droites de la Lune, prises dans la *Connaissance des Temps,* on forme le tableau suivant :

	h m s	$\Delta\alpha$	$\Delta^2\alpha$	
16^h....	3.58.47,78			
		+ 135,55		
17^h....	4. 1. 3.33		+ 0,25	$\Delta\alpha_0 = +135^s,80$
		+ 135,80		
18^h....	3.19.13		+ 0,24	$\frac{1}{2}\Delta^2\alpha_0 = +0,12$
		+ 136,04		
19^h....	5.35,17			

Cherchons l'heure de Paris correspondante à l'observation :

α.....	4.2.14,88	log 3600....	3,55630	5,68920
α_0....	4.1. 3,33	log $\Delta\alpha_0$.....	2,13290	
		log facteur..	1,42340	facteur = 26,5
$\alpha - \alpha_0$.	1.11,55 = 71^s,55 ...	log.....	1,85461	
Première approximation.....		log T.....	3,27801	T = 31^{m}36^s,8

Pour le calcul de la deuxième approximation

T.....	1896,8	log.....	3,278	
3600 — T	1703,2	log.....	3,231	
			6,509	
		log 3600 $\Delta\alpha_0$.	5,689	
		Différence...	0,810	
		$\log\frac{1}{2}\Delta^2\alpha_0$....	9,079	(+)
		log correct..	9,889	Correction + 0^s,77

On a donc en somme $\tau - \tau_0 = 31^m 37^s,57$.

	h m s
Heure de Paris.....	17.31.37,57
Heure de la Pointe-à-Pitre...	13.16.15,80
Longitude.....	4.15.21,77

La formule abrégée aurait donné avec $\Delta\alpha_0 - \frac{1}{8}\Delta^2\alpha_0 = 135^s,77$.

$\log 3600$.....	3,55630
$\log \frac{1}{135,77}$.....	7,86720
$\log(\alpha - \alpha_0)$..	1,85461
$\log(\tau - \tau_0)$..	3,27811 $\tau - \tau_0 = 31^m 37^s,2$

Avec une erreur de $0^s,37$.

Des observations correspondantes faites à Greenwich, Washington et Kremsmunster ont donné pour la correction des Tables de Hansen $-0^s,31$; il résulte de là que $\alpha - \alpha_0$ doit être augmenté de $0^s,31$, ce qui augmente la longitude de

$$0^s,31 \times 26,5 = 8^s,2$$

On a donc en définitive.... $4^h 15^m 30^s$.

Nous renvoyons, pour plus de détails, au Mémoire de M. Hatt où l'on trouvera aussi une formule de M. Yvon Villarceau, extraites des *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1876, et applicable à l'usage des Tables spéciales du *Nautical Almanac*.

En apparence, on détermine l'ascension droite absolue de la Lune. En réalité, comme ce sont les mêmes étoiles de culmination lunaire qui servent au calcul de la correction du chronomètre, tant au lieu inconnu que dans les observatoires où l'on détermine les erreurs des Tables, ce sont les différences d'ascension droite avec ces étoiles qui interviennent seules. De plus l'erreur que l'on peut commettre dans la détermination des constantes instrumentales est sensiblement la même pour la Lune et pour les étoiles qui ont une déclinaison peu différente. Il faut ajouter à cela que la parallaxe de la Lune n'intervient pas dans le calcul des observations méridiennes.

Cette dernière considération doit faire écarter, dans ce but spécial, pour la détermination des erreurs des Tables, les observations altazimutales et équatoriales; on ne doit employer que celles des passages méridiens eux-mêmes. Le demi-diamètre lui-même étant affecté des mêmes erreurs aux deux stations, cette erreur n'exerce qu'une influence inappréciable sur le résultat. Ce sont là les con-

ditions qui font la précision de la méthode et sa supériorité sur les autres observations de Lune. Mais, pour en tirer le meilleur parti possible, il est nécessaire de s'astreindre à des précautions minutieuses et notamment à une forte éducation préliminaire. Les erreurs d'équation personnelle se trouvent multipliées par 30 environ dans le résultat définitif. Or l'équation personnelle, variable déjà pour un même observateur avec les circonstances physiques et physiologiques, n'est pas la même selon qu'on observe le passage du bord d'un astre à diamètre apparent sensible, ou celui d'une étoile; elle peut n'être pas la même pour le premier ou le deuxième bord. Elle n'est pas la même non plus pour les observations faites à l'œil et à l'oreille et pour celles faites au chronographe. On trouve des discordances analogues entre les observations cercle à l'Ouest et cercle à l'Est, à cause des différences dans l'éclairage. Il faut qu'un observateur qui se propose de déterminer des méridiens par des culminations lunaires, commence par observer, avec l'instrument dont il devra se servir en voyage, et par les méthodes dont il ne se départira pas, un grand nombre de culminations dans un lieu de longitude connue. Il calculera la longitude de ce lieu en tenant un compte exact des erreurs des Tables déterminées dans les Observatoires principaux. Vingt à trente soirées lui seront nécessaires pour bien déterminer ainsi l'erreur plus ou moins constante de sa manière d'observer, en comparant la longitude calculée à celle qui est donnée; il déduira de là les corrections qui devront être appliquées aux longitudes ultérieurement déterminées.

Pour obtenir une plus grande probabilité, il est presque indispensable de refaire un pareil nombre d'observations de contrôle au retour, afin de s'assurer si la correction est restée la même. Il faudra s'exercer à bien estimer l'instant où le bord de la Lune est derrière le milieu du fil, et non celui où il lui est tangent, d'un côté ou de l'autre. Il est aussi très important de se préoccuper de la mise au point très exacte de la lunette. Il y a grand intérêt à avoir à peu près le même nombre d'observations des deux bords pour éliminer certaines erreurs systématiques. Des observations d'un seul bord n'ont que peu de valeur. Enfin on ne négligera pas de contrôler le plus exactement qu'on pourra la correction du chronomètre et sa marche, en le comparant, avant et après les observations, à un autre chronomètre.

En fait, l'expérience a montré que les différences de longitude obtenues par un observateur exercé, entre des méridiens qu'il détermine successivement par 20 à 30 culminations chacun, peuvent être admises exactes à 2^s ou 3^s près, tandis qu'on peut avoir des erreurs de 6^s et 7^s sur les longitudes absolues. Ceci montre bien la nécessité de procéder comme nous l'avons indiqué, en observant un grand nombre de culminations avant et après le voyage, en des lieux de longitude bien connue. Pratiquée ainsi, la méthode des culminations donne assez vite une précision acceptable, d'environ $1'$ d'arc. Il n'est pas démontré que cette précision puisse croître indéfiniment avec le nombre des observations: c'est du moins ce qui semble ressortir des résultats obtenus en Amérique, et contrôlés par le télégraphe et la Géodésie. La longitude de Madras, avons-nous dit, calculée par 578 culminations, diffère de $35''$ de celle que M. Airy a déduite de la discussion des observations faites avec le télégraphe. Nous n'affirmerions pourtant pas que toute l'erreur soit du côté des culminations.

136. — Distances lunaires.

La distance angulaire de deux astres est fonction de leurs coordonnées, et varie avec celles-ci. Celle de la Lune aux autres astres varie ainsi d'une façon continue; une distance donnée correspond à un instant physique bien déterminé: sa mesure peut donc donner la longitude. On peut mesurer ces distances à l'aide de divers instruments, directement ou indirectement; mais la méthode ne s'applique guère qu'avec des instruments à réflexion.

La parallaxe et la réfraction affectent les distances angulaires observées entre deux astres. Dans les éphémérides, le calcul est fait pour la distance des centres, telle qu'elle serait vue du centre de la Terre. On observe, au contraire, la distance d'un bord de la Lune à un bord du Soleil ou d'une planète, ou au centre d'une étoile: il faut donc corriger le résultat trouvé de la parallaxe, de la réfraction et du demi-diamètre. Ceci exige qu'on connaisse la hauteur des deux astres à l'instant de la mesure des distances. Mais comme cette hauteur n'intervient que dans le calcul des termes de correction, il n'est pas nécessaire de l'avoir avec la même précision que la distance même, et l'on peut la calculer au moyen des données

approximatives que l'on possède. On peut aussi faire prendre les hauteurs par des aides, soit en donnant des tops aux instants des contacts, soit en les faisant observer au même chronomètre. On peut encore observer soi-même les hauteurs avant et après l'observation de distance et interpoler pour ce dernier instant. L'erreur commise sur la distance se reporte sur la longitude, mais multipliée par un facteur voisin de 30; il ressort de là la nécessité d'opérer avec un soin minutieux et de ne négliger aucune des rectifications de l'instrument. Une distance mesurée à 10″ près est déjà bien exacte : cela correspond à une approximation de 5′ à 6′ de longitude.

Admettons donc qu'à un instant T du chronomètre on ait mesuré la distance du bord de la Lune à un astre et que l'on connaisse les hauteurs simultanées du bord de la Lune et de l'astre. On sait approximativement l'heure du premier méridien qui correspond à cet instant; on peut donc calculer la parallaxe horizontale équatoriale Π et le demi-diamètre Δ de la Lune. On calculera la parallaxe en hauteur p de la Lune au moyen des formules trouvées plus haut (§§ 23 et 26).

$$R = 1 - \alpha \cos^2 \lambda. \quad (R \text{ peut se prendre dans la Table V}).$$

$$p = \zeta' - \zeta = \frac{R \sin \Pi \sin(\zeta - \gamma)}{\sin 1''} = \Pi R \sin(\zeta - \gamma).$$

La valeur du demi-diamètre correspondant à la hauteur observée de la Lune sera

$$\Delta' = \Delta \frac{\sin(\zeta + p)}{\sin \zeta} = \Delta \frac{\sin \zeta'}{\sin(\zeta' - p)}.$$

On aura une valeur approchée de la distance des centres en ajoutant ou retranchant ce demi-diamètre à la distance observée, selon que l'on a pris le contact avec le bord voisin ou le bord éloigné de la Lune. (Cette correction s'applique évidemment aussi au Soleil, si c'est la distance du Soleil à la Lune qui a été observée.) La distance apparente D′ des centres est alors le côté d'un triangle sphérique, dont les deux autres côtés sont les distances zénithales apparentes des centres, et l'angle opposé à la distance, la différence des azimuts apparents des deux astres. La distance, telle qu'elle serait vue du centre de la Terre, est le troisième côté d'un triangle analogue, où entrent les distances zénithales vraies et la

différence des azimuts vrais. Ce côté fait avec le vertical de la Lune un angle q facile à calculer par la formule

$$\sin q = \sin(A_1 - A)\frac{\sin \zeta_1}{\sin D'}.$$

Cet angle est donc l'angle que fait le demi-diamètre incliné sur lequel on a observé le contact, avec le demi-diamètre que l'on peut appeler vertical. C'est celui que nous avons indiqué par λ dans la formule du Paragraphe 31 : la vraie valeur du demi-diamètre incliné est conséquemment $\Delta' - (r' - r)\cos^2 q$, et c'est celle que l'on emploiera pour la réduction de la distance observée des bords à la distance apparente des centres.

Nous connaissons ainsi la distance apparente des centres, les hauteurs apparentes et vraies des deux astres. Si la Terre était sphérique et que la parallaxe en azimut n'existât pas, on pourrait maintenant considérer deux triangles ayant pour sommet commun le zénith, dont les deux côtés adjacents seraient les distances zénithales vraies pour le premier, apparentes pour le second, le côté opposé à l'angle commun étant pour le premier la distance vraie, pour le second la distance apparente des centres. En calculant les valeurs de l'angle dièdre commun (différence des azimuts) et égalant ces deux valeurs, on obtiendrait une équation ne renfermant comme inconnue que la distance vraie, et donnant par conséquent cette distance. C'est ainsi qu'a procédé Borda, et l'on trouvera le type de calcul dans la *Connaissance des Temps,* ainsi que la manière de l'abréger au moyen des Tables de Mendoza. C'est celui qui est employé communément en mer. Mais l'hypothèse de la parallaxe azimutale nulle peut entraîner des erreurs qui ne sont pas négligeables.

Supposons, en effet, que pour $\lambda = 45°$ la distance zénithale de la Lune à son passage au premier vertical soit de 50°, et la parallaxe horizontale équatoriale de 61′, comme alors $\lambda' - \lambda = 11'30''$, on voit que (§ 26)

$$A' - A = 16''.$$

L'erreur sur la distance réduite étant du même ordre, cela ferait environ 8′ sur la longitude conclue; cette correction ne doit donc jamais être négligée.

Nous allons faire voir comment on peut en tenir compte en con-

servant la méthode de Borda. Désignons par D la distance des deux astres; affectons d'un accent les données apparentes et de l'indice 1 celles qui sont relatives à l'astre autre que la Lune; soient encore r, r_1 les réfractions. On aura calculé D' p et p_1 (parallaxe de hauteur), et l'on calculera

$$\zeta' = \zeta + p - r, \qquad \zeta_1' = \zeta_1 + p_1 - r_1$$

(p_1 étant nul pour une étoile).

Cela posé, soit a' la différence des azimuts apparents, et a celle des azimuts géocentriques; posons $a' - a = \varepsilon$, et écrivons les relations fondamentales

$$\cos D' = \cos\zeta' \cos\zeta_1' + \sin\zeta' \sin\zeta_1' \cos a',$$
$$\cos D = \cos\zeta \cos\zeta_1 + \sin\zeta \sin\zeta_1 \cos a.$$

Développons $\cos a' = \cos(a + \varepsilon)$ et prenons $\sin\varepsilon = \varepsilon$, $\cos\varepsilon = 1$, ce qui est toujours permis, eu égard à la petitesse de ε; égalons les valeurs de $\cos a$ tirées des deux équations, il vient

$$\frac{\cos D - \cos\zeta \cos\zeta_1}{\sin\zeta \sin\zeta_1} = \frac{\cos D' - \cos\zeta' \cos\zeta_1'}{\sin\zeta' \sin\zeta_1'} + \varepsilon \sin a.$$

Posant $\cos\zeta \cos\zeta_1 = \sin\zeta \sin\zeta_1 + \cos(\zeta + \zeta_1)$ et de même pour les ζ', il vient

$$\frac{\cos D - \cos(\zeta + \zeta_1)}{\sin\zeta \sin\zeta_1} = \frac{\cos D' - \cos(\zeta' + \zeta_1')}{\sin\zeta' \sin\zeta_1'} + \varepsilon \sin a.$$

Remarquons que

$$\cos D = 1 - 2\sin^2\frac{D}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos(\zeta + \zeta_1) = 1 - 2\sin^2\frac{\zeta + \zeta_1}{2}.$$

Transformons en produit la différence des cosinus qui est en numérateur dans le deuxième membre, posons $2S = D' + \zeta' + \zeta_1'$ et chassons les dénominateurs, il vient

$$D = \sin^2\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta_1) - \frac{\sin\zeta \sin\zeta_1}{\sin\zeta' \sin\zeta_1'} \sin S \sin(S - D') - \frac{\varepsilon}{2} \sin a \sin\zeta \sin\zeta_1,$$

ou encore

$$D = \sin^2\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta_1)\left[1 - \frac{\sin\zeta \sin\zeta_1}{\sin\zeta' \sin\zeta_1'} \frac{\sin S \sin(S - D')}{\sin^2\frac{1}{2}(\zeta + \zeta_1)}\right] - \frac{\varepsilon}{2} \sin a \sin\zeta \sin\zeta_1$$

Le premier terme du deuxième membre peut se calculer, soit par les logarithmes d'addition, soit en posant

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin S \sin(S - D') \sin\zeta_1 \sin\zeta}{\sin^2\frac{1}{2}(\zeta + \zeta_1)\sin\zeta' \sin\zeta'_1},$$

ce qui est toujours permis, car ζ et ζ_1 sont moindres que 90°, et D moindre que 180°, donc aucun des facteurs du deuxième membre n'est négatif. D'ailleurs, abstraction faite des deux produits des sinus de ζ dont le quotient est voisin de 1, et généralement plus petit, on voit en se reportant aux valeurs primitives, que le numérateur est $\cos D - \cos(\zeta + \zeta_1)$ et le dénominateur $1 - \cos(\zeta' + \zeta'_1)$ et que l'expression est par suite moindre que 1.

Il vient alors

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D = \sin^2\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta_1)\cos^2\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\sin\alpha\sin\zeta\sin\zeta_1.$$

Pour tenir compte du second terme, calculons

$$\sin\tfrac{1}{2}D_0 = \sin\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta_1)\cos^2\varphi$$

et posons $D = D_0 + \alpha$.

α est une petite quantité dont on prendra le cosinus égal à l'unité; on aura

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D = \sin^2\tfrac{1}{2}D_0 + \frac{\alpha}{2}\sin D_0.$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\sin\frac{1}{2}D$ nous donne une équation dont on déduit l'inconnue α,

$$\alpha = -\varepsilon\frac{\sin\alpha\sin\zeta\sin\zeta_1}{\sin D_0}.$$

Si d'ailleurs A, A' sont les azimuts de la Lune, $A_1 = A'_1$ ceux de l'autre astre, on a

$$a' = A' - A'_1, \quad a = A - A_1,$$

et

$$a' - a = A' - A = \text{parallaxe azimutale de la Lune.}$$

Donc

$$\varepsilon = A' - A = R\frac{(\lambda' - \lambda)\sin A \sin\Pi}{\sin\zeta},$$

et enfin, en remarquant que notre triangle nous donne $\frac{\sin\alpha}{\sin D} = \frac{\sin q}{\sin\zeta_1}$,

$$\alpha = -R(\lambda' - \lambda)\sin\Pi\sin A\sin q.$$

Comme $\sin q$ est déjà calculé, il suffit de chercher l'azimut de la Lune par la formule $\cos A = \dfrac{\cos\zeta\cos\lambda - \cos\delta}{\sin\zeta\sin\lambda}$ soit directement, soit avec un angle auxiliaire, ou encore de le trouver par construction graphique (§ 11) ou dans les Tables.

La méthode que nous venons d'exposer est rigoureuse, au moins jusqu'au calcul de la correction α. Elle entraîne à des calculs assez longs, qu'on a essayé d'abréger par l'emploi de Tables spéciales. On a aussi tiré parti de la remarque que la correction de la distance observée est une petite quantité qui peut s'évaluer en développant la distance géocentrique en série, procédant suivant les puissances de la distance observée. Mais la plupart de ces méthodes, parmi lesquelles nous citerons celles de Chauvenet, de Brunnow, de Bessel, de M. Hue, exigent l'emploi de Tables spéciales ou d'appareils particuliers. N'ayant d'ailleurs jamais eu l'occasion d'en appliquer une, nous serions peu compétent pour guider nos lecteurs dans le choix à faire.

D'ailleurs, toutes les méthodes qui exigent le recours à des Tables spéciales se trouvent expliquées dans ces Tables mêmes; pour ceux qui possèdent celles-ci, leur exposition ferait double emploi; elle serait inutile aux autres.

Notre méthode est celle que donne la *Connaissance des Temps,* le type des calculs de cette éphéméride s'y applique; mais il faut faire attention à ce que, dans nos formules, nous avons substitué les distances zénithales aux hauteurs, afin de rester fidèle à notre méthode générale.

Une fois qu'on a obtenu la distance géocentrique des astres, une simple interpolation fait connaître l'heure de Paris qui correspond à la distance ainsi trouvée, et par conséquent l'état du chronomètre sur le méridien de Paris. Il est nécessaire de tenir compte des différences secondes, et l'on peut le faire en employant la méthode du Paragraphe 7. Mais les Tables de la *Connaissance des Temps* simplifient beaucoup ce calcul et donnent toute l'exactitude désirable. Si l'on connaît l'heure du lieu à l'instant de l'observation, on aura donc immédiatement la longitude. Si les hauteurs du deuxième astre ont été observées avec soin, elles pourront servir au calcul de l'heure locale.

La méthode des distances est la seule observation de Lune qui

puisse donner en mer une longitude acceptable. C'est celle qui se prête le mieux à l'emploi des instruments à réflexion. On peut aussi se servir du cercle répétiteur pour cette mesure ou bien, comme l'a indiqué M. de Tessan, déduire la distance apparente des mesures de hauteurs et de différences d'azimut de la Lune et de l'étoile, en opérant à terre avec un théodolite. Mais alors les calculs deviennent plus longs : d'ailleurs, quand on observe à terre, on a des méthodes dont nous allons parler, qui donnent des résultats plus exacts que les distances, avec des calculs moins longs et moins pénibles. L'observation des distances est d'ailleurs, même avec un instrument à réflexion, plus difficile que celle des hauteurs, en raison de la position gênante que doit prendre l'observateur, obligé fréquemment de se coucher sur le dos. Les diverses causes d'erreur auxquelles sont sujettes les observations faites avec des instruments à réflexion affectent les distances lunaires. Une des principales parmi ces causes, la difficulté de bien lire les verniers la nuit, est fort atténuée en se servant d'instruments répétiteurs : de même les erreurs de zéro, d'excentricité, etc.

Si l'on opère avec le sextant, on aura encore de bons résultats en observant des étoiles à l'ouest et à l'est de la Lune : l'erreur provenant d'une connaissance imparfaite des constantes instrumentales est fort réduite ; elle disparaît complètement de la moyenne si les distances observées des deux côtés sont sensiblement égales. Mais aucune combinaison d'observations ne saurait affranchir le résultat des erreurs dues à une méthode vicieuse d'appréciation des contacts, à une mise au point imparfaite de la lunette et aux inexactitudes des Tables de la Lune.

M. Chabirand a essayé d'arriver à une plus grande précision par l'emploi d'un sextant de grand modèle, avec lunette puissante, monté sur un pied. Cet instrument n'a pas donné les résultats qu'on s'en promettait : il n'a aucun avantage sur le théodolite, et ce dernier se prête à des mesures beaucoup plus précises. Comme fait d'expérience, nous constatons que des longitudes déterminées par plusieurs centaines de distances lunaires, observées par des officiers exercés, se sont trouvées, en fin de compte, et quand on a pu les vérifier par des moyens plus précis, en erreur de 6′ à 8′; en mer, on ne doit pas compter sur une approximation de plus de 15′ à 20′.

La *Connaissance des Temps* donne les distances de la Lune au Soleil, aux planètes et à dix étoiles brillantes voisines de l'écliptique. On ne peut guère se tromper sur l'identification de ces étoiles; comme on connaît toujours à peu près l'heure de Paris, on calcule grossièrement la distance géocentrique pour cette heure, on met le vernier du sextant à cette division, et visant la Lune, le mouvement du sextant doit amener l'image de l'étoile dans le champ de la lunette.

Si pourtant on s'était trompé d'étoile et si l'on s'apercevait de l'erreur, en ayant le moyen d'identifier l'étoile observée, on pourrait encore tirer parti de cette observation. Pour cela, il suffirait de calculer, pour deux heures de Paris comprenant entre elles l'heure de l'observation, les distances géocentriques de la Lune à l'étoile considérée. Soient à un instant donné du temps de Paris α, α' les ascensions droites, δ, δ' les distances polaires de la Lune et de l'étoile, la distance est un côté du triangle sphérique, ayant pour sommets le pôle et les centres des astres, opposé à l'angle au pôle égal à $\alpha - \alpha'$ (inutile de se préoccuper du signe) : les deux côtés qui comprennent l'angle au pôle sont δ et δ'; on a donc

$$\cos D = \cos\delta \cos\delta' + \sin\delta \sin\delta' \cos(\alpha - \alpha').$$

et cette formule se calculera soit directement, soit avec un angle auxiliaire (§ 2).

137. — Hauteurs de Lune.

En principe, une hauteur de la Lune bien observée, dans les circonstances favorables à la détermination de l'angle horaire, peut donner la longitude. A l'aide de la longitude approchée, on tire des Tables les éléments de la Lune, α, δ, Π, Δ. On calcule la distance zénithale géocentrique du centre de la Lune, en corrigeant de parallaxe, réfraction, demi-diamètre pour les hauteurs observées. On calcule ensuite l'angle horaire de la Lune. Une observation d'un autre astre donne l'état de la montre sur le temps sidéral local; on en déduit l'heure sidérale qui correspond à l'instant de l'observation de la Lune, et, combinant avec l'angle horaire, on en tire l'ascension droite de la Lune. Cette ascension droite, comparée à celle qu'on a calculée, permet de trouver une première

approximation de l'erreur commise sur la longitude. Appliquant cette correction à la longitude, on peut refaire le calcul des éléments δ, H, Δ, recalculer une nouvelle ascension droite, et opérer ainsi par approximations successives. On pourrait aussi calculer facilement une fonction linéaire de l'erreur de longitude, renfermant les variations des éléments, et en tirer directement cette correction.

Nous ne développerons pas cette méthode, qui a été employée autrefois, mais qui est complètement abandonnée. Les hauteurs absolues sont, en effet, affectées de nombreuses erreurs intrumentales, flexions, erreurs de zéro, erreurs du niveau, etc. La réfraction est sujette à des anomalies que rien n'indique, et comme ces erreurs se multiplient dans la longitude par un facteur généralement supérieur à 3o, on voit combien cette méthode est inférieure, même à celle des distances lunaires.

On pourrait essayer d'appliquer le principe des hauteurs correspondantes. Mais la rapidité avec laquelle varient la distance polaire et la parallaxe, enlèverait à ce procédé une grande partie de sa simplicité. Comme on n'observe qu'un bord, qui se trouverait être par exemple le bord supérieur à l'est du méridien, le bord inférieur à l'ouest, les hauteurs du centre seraient loin de l'égalité. La réfraction peut fort bien n'être pas la même dans deux régions opposées du ciel; enfin les anomalies de marche de la montre pendant un temps assez long viendraient encore diminuer la précision du résultat et les erreurs ainsi commises seraient multipliées par le facteur déjà cité. La méthode la plus propre à obvier à ces divers défauts consiste à observer les instants où le bord de la Lune et une étoile voisine passent à la même hauteur. Ici les réfractions, s'appliquant à une région très limitée, peuvent être admises égales; l'intervalle de temps devient petit; la hauteur absolue n'intervient pas ou n'intervient que dans le calcul de l'heure locale; il n'y a donc plus d'erreur de lecture ni de graduation; il ne reste que les erreurs d'observation, de parallaxe, des Tables de la Lune et de l'heure locale; ces dernières n'étant pas multipliées dans le résultat définitif.

Cette méthode a été préconisée par le Dr Kaiser; elle a été appliquée par MM. Oudemans et de Lange à Batavia. M. Liais la recommande après expérience faite au Brésil. Nous avons eu nous-

même occasion de l'appliquer à la Guadeloupe (*voir* l'exemple donné ci-après).

En toute rigueur, l'opération consiste à caler un instrument à une hauteur déterminée qu'il n'est pas nécessaire de connaître exactement. On choisit une étoile de comparaison, le plus près possible de la trajectoire de la Lune; on note l'heure à laquelle l'astre le plus avancé des deux dans le sens du mouvement diurne passe sous le fil horizontal. Puis, déplaçant la lunette en azimut, *sans changer le calage en hauteur,* on attend le passage du deuxième astre, on en note l'heure; on a pris à chaque fois la lecture du niveau, et l'observation se trouve ainsi achevée. Il est clair qu'on peut la répéter autant de fois qu'on le voudra, en changeant successivement les calages en hauteur. Une lunette munie d'un micromètre à fils peut servir, même sans cercle divisé; un théodolite quelconque peut être employé aussi bien qu'un instrument à réflexion, si imparfaite qu'en soit la graduation. Chauvenet recommande l'usage de la lunette zénithale ou *zenith telescope,* qui sert également à trouver la latitude par la méthode Talcott. Il suffit de pouvoir s'assurer, par le niveau, de la stabilité ou des variations d'inclinaison de l'axe de la lunette, et l'essentiel est d'avoir un grossissement suffisant pour permettre de noter avec précision l'instant cherché.

Il est évident *a priori* que puisqu'il s'agit d'apprécier exactement l'heure, les conditions les plus favorables sont celles qui se rapportent à l'observation de l'angle horaire, c'est-à-dire le voisinage du passage au premier vertical. Pour éviter les anomalies exceptionnelles de la réfraction, la distance zénithale ne doit guère dépasser 70°. Les observations se font d'ailleurs des deux côtés du méridien.

Nous supposerons d'abord l'heure sidérale locale connue, sauf à voir ultérieurement comment on peut l'obtenir par les observations mêmes, mais cela n'est pas nécessaire; si l'on dispose par exemple d'une lunette méridienne, on l'emploiera avec avantage.

Cela posé, voici la marche à suivre pour le calcul :

Conservons les notations adoptées pour les coordonnées, et affectons d'un accent les données relatives à l'étoile de comparaison.

Soient t l'heure du passage, n la lecture du niveau, S l'heure

sidérale, r la réfraction, L′ la longitude estimée (+ vers l'Ouest), ∂L la correction qu'elle doit subir.

On prend dans les éphémérides α, δ, II et Δ pour l'heure sidérale S + L′ du premier méridien, que l'on aura convertie préalablement en temps moyen. On calculera la distance zénithale exactement, l'azimut et l'angle parallactique ϖ approximativement avec les logarithmes à quatre décimales. On peut se servir des formules générales avec les logarithmes d'addition; à défaut de ces Tables qui abrègent beaucoup les calculs, on peut employer les formules suivantes :

Pour la Lune,		Pour l'étoile,
$P = S - \alpha,$		$P' = S' - \alpha',$
$\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\cot\delta}{\cos P}$ $\cos\zeta = \dfrac{\cos\delta\sin(\lambda+\varphi)}{\sin\varphi}$	logarithmes à six ou sept décimales.	$\operatorname{tang}\varphi' = \dfrac{\cot\delta'}{\cos P'}$ $\cos\zeta' = \dfrac{\cos\delta'\sin(\lambda+\varphi')}{\sin\varphi'}$
$\cos A = \cot(\lambda+\varphi)\cot\zeta$ $\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\lambda\cos P$ $\operatorname{tang}\varpi = \dfrac{\operatorname{tang} P\sin\psi}{\sin(\delta-\psi)}$	logarithmes à quatre décimales ou graphique.	$\cos A' = \cot(\lambda+\varphi')\cot\zeta'$ $\operatorname{tang}\psi' = \operatorname{tang}\lambda\cos P'$ $\operatorname{tang}\varpi' = \dfrac{\operatorname{tang} P'\sin\psi'}{\sin(\delta'-\psi')}.$

L'erreur sur la longitude a pour effet de vicier les éléments de la Lune sans affecter ceux de l'étoile. La distance zénithale calculée ne correspond donc pas exactement à l'époque S. Soit $\zeta + d\zeta$ la vraie distance zénithale du centre de la Lune à l'instant S.

Soient ζ_1 la distance zénithale apparente, supposée observée, du bord de la Lune,

ζ_1' la distance zénithale apparente de l'étoile,

r, r' les réfractions correspondantes.

On aura

$$\zeta_1' = \zeta' - r'\,;\ \zeta_1 = \zeta_1' + (r - r') = \zeta' - r' + (r - r').$$

Calculons la distance zénithale du bord observé, en la déduisant de celle de l'étoile et posant

$$\zeta'' = \zeta_1 + r = \zeta' + r - r' + r - r'$$

et sa parallaxe par les formules

$$\begin{cases} \gamma = (\lambda' - \lambda)\cos A, \\ \sin p = R \sin \Pi \sin(\zeta'' - \gamma), \end{cases}$$

ou avec la formule plus exacte (41) du Paragraphe 26; si nous posons maintenant

$$k = p \mp \Delta \mp \tfrac{1}{2}(p \mp \Delta)\sin p \sin \Delta$$

le signe supérieur correspondant au bord supérieur de la Lune, nous devons avoir

$$\zeta'' - (\zeta + d\zeta) = k.$$

Cette équation ne renferme d'autre inconnue que $d\zeta$. Il ne reste plus qu'à établir une relation entre $d\zeta$ et ∂L.

Soient $d\alpha$ et $d\delta$ les accroissements de α et δ en 1^s de temps sidéral.

Comme les éléments ont été pris pour le temps $S + L'$ au lieu d'être calculés pour le temps $S + L' + \partial L$, ils doivent être corrigés respectivement,

δ	de	$d\delta\, \partial L$,
α	de	$d\alpha\, \partial L$,
P	de	$-d\alpha\, \partial L$.

Dans la formule différentielle (5) du Paragraphe 3 faisons $a = \zeta$, $A = P$, $c = \delta$, $B = \varpi$, elle nous donnera, après substitution des valeurs ci-dessus aux différentielles :

$$d\zeta = \cos\varpi\, d\delta\, \partial L - \sin\varpi \sin\delta\, 15\, d\alpha\, \partial L,$$

et par suite

$$\partial L = \frac{\zeta - \zeta'' + k}{\sin\varpi \sin\delta\, 15\, d\alpha - \cos\varpi\, d\delta},$$

et la longitude sera

$$L = L' + \partial L.$$

Ce résultat suppose les éphémérides exactes. Si l'on est conduit à corriger les éphémérides (et en l'état présent, le mieux serait de faire cette correction avec les Tables Newcomb avant de commencer les calculs), si, de plus, on veut se rendre compte de l'effet que produisent sur le résultat les erreurs des données, on emploiera la formule suivante qu'il serait facile de démontrer, et

que nous empruntons à Chauvenet, en substituant nos notations aux siennes.

Soient $d'\alpha$, $d'\delta$, $d'\Pi$ et $d'\Delta$ les erreurs des éléments tabulaires; $d'c$ l'erreur de la correction du chronomètre; t, t' les heures des observations affectées des erreurs ∂t, $\partial t'$; enfin $\partial\lambda$ l'erreur sur la colatitude (erreur voulant toujours dire la correction à apporter à l'élément fautif pour avoir l'élément exact); si de plus nous posons pour abréger

$$f = 15 \sin\varpi \sin\delta, \qquad f' = 15 \sin\varpi' \sin\delta',$$
$$a = f\,d\alpha - d\delta \cos\varpi, \qquad m = 1 - \sin\Pi \cos\zeta',$$

on a la correction de L sous la forme

$$x = a\,\partial L + f\,d'\alpha + \cos\varpi\, d'\delta - (f-a)\,\partial t - m f'\, d'\alpha' - m\cos\varpi'\, d'\delta' + m f'\,\partial t' \pm d'\Delta - \sin\zeta'\, d'\Pi - (f - m f' - a)\, d'c + (\cos A - m\cos A')$$

dont on peut faire usage pour discuter les résultats.

La méthode qui précède est la plus exacte; mais on peut encore obtenir d'assez bons résultats en mesurant avec un limbe répétiteur la différence de distance zénithale entre la Lune et une étoile, pourvu que cette étoile ne soit pas trop éloignée en hauteur et en azimut. La répétition donne les petits angles avec une assez grande précision; les réfractions doivent être affectées de la même manière par les anomalies possibles; on conserve donc une partie des avantages de la méthode précédente.

Ces avantages, répétons-le, consistent en ce que les erreurs instrumentales et de réfraction étant les mêmes pour l'étoile et le bord de la Lune, disparaissent à peu près complètement quand on observe à la même hauteur avec la même position de l'instrument, ou du moins qu'on n'a besoin de tenir compte que de leurs variations, très faibles, et plus faciles à apprécier avec certitude que les grandeurs elles-mêmes. La méthode est indépendante des lectures de distances zénithales; elle peut donc s'appliquer avec un instrument dont la graduation est rudimentaire ou nulle. Un petit théodolite-tachymètre, dont la graduation ne donne que 1', mais dont le niveau est sensible, dont la lunette grossit 15 à 20 fois et peut être facilement fixée en hauteur, donnera des pointés à 3″ ou 4″ près. On peut donc espérer, en opérant avec soin et déterminant d'autre part la correction chronométrique par les

méthodes exactes, obtenir une longitude à environ 2′ près, dans les pays tropicaux, du moins. Ce degré de précision est bien supérieur à celui que comportent les distances lunaires.

L'erreur d'état absolu se reporte intégralement sur la longitude. L'effet des erreurs sur la parallaxe s'élimine si l'on observe des séries symétriquement par rapport au méridien; celui de l'erreur sur le demi-diamètre change de signe aux syzygies.

Quand on opère avec un instrument bien gradué, et que l'on se sert des doubles distances zénithales observées de l'étoile pour le calcul de l'heure (§ 109), on a besoin, avec la méthode qui précède, de calculer les distances zénithales dont cette double distance est la somme. Mais on voit aisément que la méthode se prête sans difficulté à une petite modification qui permet d'éviter ce travail.

En effet, le calcul une fois fait, la somme de ces distances doit être exactement égale à la somme des deux distances, telle qu'elle a été employée pour le calcul de l'angle horaire. Il suffira donc de calculer les deux distances zénithales de la Lune, son diamètre et sa parallaxe, et d'opérer sur la somme des résultats, comparée à la double distance zénithale de l'étoile, comme on aurait opéré sur les distances zénithales simples. Seulement, dans l'expression de ∂L, on substituera à ζ'', $\frac{1}{2}(\zeta_1'' + \zeta_2'')$, à ζ, $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$, et à k la moyenne des deux k.

Les distances zénithales simples de l'étoile ne sont nécessaires que pour le calcul des parallaxes; elles n'auront pas besoin d'être calculées avec la dernière rigueur, pourvu que leur somme soit exactement égale à celle des distances observées, car les parallaxes n'interviendront dans le calcul que par leur somme. Le type de calcul le plus à recommander est celui qui se fonde sur l'emploi des logarithmes d'addition et de soustraction avec la formule connue

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda\left(1 + \frac{\sin\delta\sin\lambda\sin P}{\cos\delta\cos\lambda}\right).$$

Ajoutons enfin, en ce qui regarde l'observation même, qu'elle peut se faire avec un instrument à réflexion et un horizon artificiel, aussi bien que l'observation des hauteurs correspondantes, et le résultat est indépendant des erreurs instrumentales de collimation, de graduation, d'excentricité, etc. Il faut, il est vrai, que l'observateur soit très exercé, puisque le contact ne peut pas se

perfectionner en faisant mouvoir la vis de rappel de l'alidade; mais les mesures de hauteurs sont généralement plus familières aux observateurs que celles des distances lunaires; elles ne forcent pas à prendre des positions gênantes, et cette méthode peut être recommandée.

Nous allons donner un exemple d'observation et de calcul.

Calcul de la longitude par les hauteurs égales de la Lune et d'une étoile; calcul de l'heure par une distance zénithale double.

Le 24 août 1868, on a observé au Camp Jacob (Guadeloupe) des hauteurs égales de la Lune et d'Antarès, avec un théodolite répétiteur et un compteur temps moyen.

Extrait du carnet d'observations.

	Lunette		h m s	Niveau	Lectures	
					o ′ ″	o ′ ″
1	G	Antarès.	5. 1.49,5	+190″		
2		Lune ☾.	5. 5.34,0	+189	0. 0. 0	180. 0. 0
3	D	Antarès.	10.17,0	+ 85,5		
4		Lune ☾.	13.16,5	+ 86,5	141.33.30	321.32.40
5	G	Antarès.	26.22,0	+143,0		
6		Lune ☾.	28. 4,0	+143,5		
7	D	Antarès.	30.43,0	+205,0		
8		Lune ☾.	32. 6,5	+205,0	291.56.20	111.56.20

Baromètre 725^{mm}; thermomètre 22°,6 : une partie du niveau valait 10″, les lectures du niveau sont réduites en secondes. La Lune étant plus haute qu'Antarès a été observée chaque fois dans la position de la lunette qui correspond à l'observation précédente d'Antarès. L'instrument étant répétiteur, aux observations 5 et 6 correspond la même lecture qu'à 3 et 4. La position directe est : lunette à droite. La Lune et Antarès sont à l'Ouest. Le bord observé est le bord inférieur. Nous ne calculerons que les observations 1 à 4; la série suivante n'est destinée qu'à nous fournir une évaluation de la rapidité du mouvement en distance zénithale. Elle ne donnerait pas de résultats très sûrs puisqu'à ce moment la distance zénithale a trop notablement dépassé 70°.

Données : Colatitude $\lambda = 73°\,58'\,47''$. Altitude 47^{om}.
Longitude approchée $4^h\,16^m\,3^s$.

Calcul de l'angle horaire par Antarès.

Heures..	$5^h\ 1^m 49^s,5$	Lect. corr.	0° 3′ 9″		
	5 10 17 ,0		141 34 31 ,5		
$\frac{1}{2}$ somme.	$5^h\ 6^m\ 3^s,25$	Différence.	141°31′22″,5	Moitié...	70°45′41″,2
$\frac{1}{2}$ différ...	4 13 ,75			Réfract..	2 30 ,7
				Dist. zén.	70°48′11″,9 = ζ

$141°\,36'\,23'',8 = 2\zeta.$

La deuxième distance zénithale correspond à l'heure moyenne $5^h28^m32^s,5$ et l'on trouve qu'elle est, avant correction de la réfraction, égale à $75°12'36'',2$; on établit la proportion

$$\frac{x}{75°12'36'',2 - 70°45'41'',2} = \frac{5^h10^m17^s - 5^h1^m49^s,5}{5^h28^m32^s,5 - 5^h6^m3^s,2}$$

et l'on trouve $x = 1°40'24''$ dont la moitié est $\frac{1}{2}(\zeta' - \zeta) = 0°50'12''$.

La *Connaissance des Temps* donne pour Antarès

$$\alpha = 16^h21^m21^s,0 \qquad \delta = 116°8'10''.$$

Réduisons maintenant en temps sidéral la demi-différence $4^m13^s,75$; on trouve $4^m14^s,44 = 1°3'36'',6 = \frac{1}{2}(P - P')$.

Pour calculer les angles horaires, nous employons les logarithmes d'addition.

$\cos\frac{1}{2}(\zeta + \zeta')$.	9,516948	$\cos\delta$.	9,643951 (—)	$\sin\delta$.	9,953155 (+)
$\cos\frac{1}{2}(\zeta - \zeta')$.	9,999954	$\cos\lambda$.	9,440874 (+)	$\sin\lambda$.	9,982798 (+)
$\cos z$.....	9,516902 (+)		9,084825 (—)		9,935953
$\cos\delta\cos\lambda$...	9,084825 (—)				
	0,432077 (—)	log $\cos\delta\cos\lambda$....			9,084825
		log d'addition.....			0,568722
		colog $\sin\delta\sin\lambda$.....			0,064047
		colog $\cos\frac{1}{2}(P - P')$.			0,000074
		$\cos\frac{1}{2}(P + P')$.....			9,717668

$P = 58°32'1'' =$	$3^h54^m\ 8^s,1$
α.....	16 21 21 ,0
S.....	$20^h15^m29^s,1$
Temps sidéral à midi.....	10 12 50 ,42
Intervalle sidéral.....	$10^h\ 2^m38^s,68$
Réduction en temps moyen .	1 38 ,73
Temps moyen.....	$10^h\ 0^m59^s,95$
$\frac{1}{2}(t + t')$	5 6 3 ,25
Correction du chronomètre .	$4^h54^m56\ ,7$

Calcul des distances zénithales de la Lune.

Heures au chronomètre.....	$5^h\ 5^m34^s,0$	$5^h13^m16^s,5$
Correction	4 54 56 ,7	4 54 56 ,7
Temps moyen local	$10^h\ 0^m30^s,7$	$10^h\ 8^m13^s,2$
Longitude.....	4 16 3	4 16 3
Temps de Paris	$14^h16^m33^s,7$	$14^h24^m16^s,2$

Avec ces heures de Paris, on trouve dans la *Connaissance des Temps* :

α.....	$16^h\ 7^m\ 4^s,89$	$16^h\ 7^m\ 21^s,52$
δ.....	$105°\ 33'\ 47'',9$	$105°\ 34'\ 36'',7$

Temps moyen local.....	$10^h\ 0^m\ 30^s,7$	$10^h\ 8^m\ 13^s,2$
Réduction en temps sidéral.	$1\ 38\ ,65$	$1\ 39\ ,92$
Temps sidéral à midi.....	$10\ 12\ 50\ ,42$	$10\ 12\ 50\ ,42$
Temps sidéral.....	$20^h\ 14^m\ 59^s,77$	$20^h\ 22^m\ 43^s,54$
Ascension droite de la Lune.	$16\ 7\ 4\ ,89$	$16\ 7\ 21\ ,52$
Angles horaires	$4^h\ 7^m\ 54^s,88$	$4^h\ 15^m\ 22^s,02$
ou.....	$61°\ 58'\ 43'',2$	$63°\ 50'\ 30'',3$

On calcule les distances zénithales du centre de la Lune; nous ne donnons le calcul que pour la première.

cos P ..	9,671915			
cos λ...	9,982798	sin λ	9,440874	
cos δ ..	9,983777 (—)	sin δ	9,428525	
	9,638490		8,869399	
	8,869399			
Différ..	0,769091	log soustr ...	0,688074	
		log cos ζ'....	9,557473	ζ'... $68°\ 50'\ 24'',4$

On trouve dans la *Connaissance des Temps* pour cette observation

$$\Pi = 56'\,14'',9 \qquad \Delta = 15'\,21'',2.$$

Avec l'altitude 470^m, le rayon terrestre, pour $\lambda = 73°\,58'\,47''$, a pour logarithme 9,99992.

log Π	3,52826		
log R.....	9,99992		
log sin($\zeta''-\gamma$).	9,97281		
	3,50099	$p =$	$0°\,52'\,49'',5$
		Δ...	$15\ 21\ ,2$
$\frac{1}{2}(p+\Delta)\sin p \sin\Delta$.....			$+\ 0\ ,1$
		$k =$	$1°\ 8'\ 10'',8$
		ζ''..	$68\ 50\ 24\ ,4$
		$\zeta''-k$	$69°\ 58'\ 35'',2$
On trouve de même pour la deuxième.....			$71\ 37\ 47\ ,6$
			$141°\ 36'\ 22'',8$
La double distance zénithale d'Antarès 2ζ.			$141\ 36\ 23\ ,8$
Différence $2(\zeta - \zeta'' + k)$.			$1'',0$

On a donc

$$\zeta - \zeta'' + k = + 0'',5.$$

Reste à calculer la correction de la longitude ∂L.

On trouve dans les éphémérides :

$$d\alpha = \frac{129^s,48}{3610} \qquad d\delta = + \frac{380'',4}{3610}.$$

Il n'y a pas d'intérêt à donner ici le calcul de ϖ et du dénominateur de ∂L; on trouve en définitive

$$\partial L = \frac{0,5}{0,39} = 1^s,3.$$

Telle est la quantité à ajouter à la longitude employée, pour avoir celle qui résulte de cette observation.

NOTA. Nous avons fait voir la supériorité de cette méthode sur celle des hauteurs absolues de la Lune. Cette dernière, selon M. d'Abbadie, donnerait pourtant encore, à terre, des résultats meilleurs que les distances lunaires. La correction du chronomètre étant supposée connue, on peut suivre dans ce cas, pour le calcul de la longitude, la marche que nous venons d'indiquer. Il suffira de substituer, en terminant, à la double distance zénithale 2ζ de l'étoile, celle du bord de la Lune telle qu'on l'a observée, corrigée uniquement des erreurs instrumentales de niveau et de la réfraction.

138. — Azimuts de la Lune.

La méthode qui précède n'est applicable qu'aux heures où le mouvement en hauteur de la Lune est assez rapide pour que l'instant du passage au fil horizontal soit noté avec une précision comparable à celle qu'on recherche dans les déterminations d'heure. On ne doit pas l'appliquer à des hauteurs trop faibles afin de réduire l'influence des anomalies de la réfraction. On voit qu'elle ne peut pas s'employer avantageusement aux environs du passage méridien. Dans ce cas, on peut remplacer les observations de hauteur par celles d'azimut, puisqu'alors le mouvement en azimut est très rapide. On choisit une étoile ayant à peu près la même hauteur que la Lune. On cale la lunette en azimut; on observe derrière le fil vertical l'instant du passage de celui des astres qui est en avance sur l'autre; puis, en ne touchant pas du

tout au calage du cercle horizontal et le moins possible à celui du cercle de hauteur, on observe l'instant du passage du deuxième astre. On déterminera ensuite la correction du chronomètre ; cela fait, on aura tout ce qu'il faut pour calculer la longitude.

Soient L' la longitude approchée, $L' + \partial L$ la longitude exacte. On calculera comme ci-dessus l'heure sidérale, l'heure du premier méridien, les coordonnées des astres. Avec ces coordonnées, on calculera les azimuts géocentriques des centres; on calcule aussi (ou l'on se procure autrement) avec une moindre approximation leurs distances zénithales et leurs angles de position.

L'azimut géocentrique du bord de la Lune se trouve en appliquant à l'azimut du centre la correction $\pm \frac{\Delta}{\sin \zeta}$, le signe + se rapportant au premier bord (occidental), le signe — au deuxième bord (oriental). On calcule la parallaxe en azimut qui sert à trouver l'azimut apparent du bord. L'azimut apparent de l'étoile est le même que son azimut vrai. Enfin on calcule les corrections d'azimut qui résultent de la collimation et de l'inclinaison, et on les applique en sens inverse aux azimuts calculés. Si la longitude employée était exacte et si les erreurs des Tables étaient nulles, on devrait trouver, à l'effet près des erreurs commises dans l'observation du temps, deux nombres égaux pour le bord de la Lune et pour l'étoile. La différence des deux résultats est donc, comme dans le cas des hauteurs, une fonction de l'erreur commise sur la longitude, que l'on calcule par un procédé analogue.

Voici les formules à employer :

$$P = S - \alpha, \qquad P' = S' - \alpha'.$$

Si l'on se sert des Tables de logarithmes d'addition, on aura pour calculer les angles A, ϖ, ζ, relatifs à la Lune, les formules

$$\cot A = \frac{\cos\lambda \cos P - \cot\delta \sin\lambda}{\sin P},$$

$$\cot\varpi = \frac{\cot\lambda \sin\delta - \cos\delta \cos P}{\sin P},$$

$$\cot\zeta = \frac{\sin\varpi \cot P + \cos\varpi \cos\delta}{\sin\delta}.$$

Les azimuts étant généralement petits, leur calcul par la tangente, de préférence au cosinus, se recommande naturellement.

Si l'on emploie les analogies de Néper (§ 115), on trouvera ϖ en même temps que A (en faisant attention que l'angle A du triangle sphérique est le supplément de l'azimut), et l'on peut alors calculer la distance zénitale par

$$\sin\zeta = \frac{\sin P \sin\delta}{\sin A},$$

ce qui est suffisant dans tous les cas, eu égard à l'approximation requise.

Enfin, en se servant d'angles auxiliaires φ et ψ donnés par les relations

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cot\delta}{\cos P},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\lambda \cos P,$$

on aura

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} P \cos\varphi}{\cos(\lambda + \varphi)},$$

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{\operatorname{tang} P \sin\psi}{\sin(\delta - \psi)},$$

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{tang}(\delta - \psi)}{\cos\varpi}.$$

Les mêmes formules, avec les lettres accentuées, s'appliqueront à l'étoile.

La parallaxe azimutale de la Lune se calcule par

$$R \sin\Pi (\lambda' - \lambda) \frac{\sin A'}{\sin\zeta},$$

et le signe se déduit facilement de la remarque que l'azimut apparent, compté à droite ou à gauche du méridien opposé au pôle élevé, est plus grand que l'azimut vrai.

On aura donc, en définitive, les azimuts calculés :

Pour le bord de la Lune,

$$A_1 = A \pm \frac{\Delta}{\sin\zeta} + \frac{R\Pi (\lambda' - \lambda) \sin 1'' \sin A'}{\sin\zeta},$$

pour l'étoile,

$$A'_1 = A'.$$

Soient maintenant $\partial\alpha$ et $\partial\delta$ les variations des coordonnées en une seconde de temps sidéral, il faut corriger α et δ de $\partial\alpha\,\partial L$ et $\partial\delta\,\partial L$.

Si $D\alpha$, $D\delta$ sont les variations en une heure prises dans les éphémérides, on aura, les chiffres entre crochets désignant les logarithmes des facteurs,

$$\partial\alpha = \frac{15\,D\alpha}{3609,856} = [7,61860]\,D\alpha,$$

$$\partial\delta = \frac{D\delta}{3609,856} = [6,44251]\,D\delta.$$

Prenons maintenant les formules différentielles du Paragraphe 3, en posant

$$\partial\alpha\,\partial L = -dP = d\alpha, \qquad \partial\delta\,\partial L = d\delta,$$

on aura

$$dA = A_1 - A'_1 = \frac{\sin\delta\sin\lambda}{\sin\zeta}\,dP + \frac{\sin\varpi}{\sin\zeta}\,d\delta$$

et la correction de la longitude ouest sera donnée en grandeur et signe par

$$\partial L = \frac{(A_1 - A'_1)\sin\zeta}{-\sin\delta\sin\lambda\;\partial\alpha + \sin\varpi\;\partial\delta},$$

$$L = L' + \partial L.$$

On pourrait aussi calculer une formule pour englober en une seule expression toutes les corrections. Nous ne la donnerons pas.

Il est bon de corriger d'avance les éphémérides par les corrections Newcomb. On verrait sans peine que les erreurs provenant de la distance polaire, de la parallaxe et de la latitude s'éliminent si l'on observe symétriquement des deux côtés du méridien à des azimuts à peu près égaux.

L'erreur d'état absolu se reporte en vraie grandeur sur la longitude. Les erreurs de collimation et d'inclinaison de l'axe horizontal s'éliminent en opérant dans les deux positions de l'instrument par observations croisées.

Au lieu d'attendre les passages dans un vertical donné, on peut recourir à la répétition des angles pour sommer sur le limbe horizontal une série de différences d'azimut entre la Lune et l'étoile : le principe du calcul est le même, et nous ne le développerons

pas. Ce procédé ne possède pas l'avantage d'éliminer le mieux possible les erreurs résultant de la collimation et de l'inclinaison, et d'être indépendant de toute lecture du cercle, ce qui est un grand point pour les observations de nuit.

Si nous comparons les méthodes des hauteurs et des azimuts, nous reconnaîtrons à cette dernière l'avantage d'être à peu près affranchie des erreurs sur la parallaxe et la réfraction : mais la difficulté d'obtenir la stabilité en azimut des instruments portatifs, fera souvent donner la préférence à la méthode des hauteurs : les variations de distance zénithale se lisent facilement sur le niveau, tandis que la stabilité en azimut ne peut se constater qu'au moyen d'une mire. La méthode des azimuts est plus précise quand la Lune culmine à une faible hauteur, car alors les erreurs instrumentales sont moins grandes, surtout l'inclinaison, et mieux déterminées : c'est donc pour les hautes latitudes qu'elle se recommande. Celle des hauteurs est meilleure dans les basses latitudes, à une distance du méridien où le mouvement en hauteur est rapide.

Les deux méthodes sont fort supérieures à celle des distances : elles sont d'un calcul moins pénible, quoique encore assez long, et elles comportent une précision supérieure d'observation (1).

139. — Occultations et éclipses.

Par l'effet de son mouvement propre, la Lune vient s'interposer successivement entre les astres situés sur sa trajectoire et l'œil d'un observateur placé sur la Terre. Le phénomène s'appelle *occultation* s'il s'agit d'une étoile ou d'une planète, *éclipse de Soleil* quand l'astre occulté en tout ou en partie est le Soleil : l'éclipse de Lune est le phénomène inverse, résultant de la pénétration de la Lune dans le cône d'ombre projeté par la Terre. On sait qu'en raison de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, les éclipses de Soleil et de Lune sont assez rares, et qu'on n'en compte pas plus de trois ou quatre par an.

---

(1) M. de Tessan avait proposé d'observer simultanément l'azimut et la hauteur de chacun des astres successivement, d'en déduire leur distance apparente, et d'opérer comme pour les distances lunaires. Mais on fait intervenir alors des lectures d'arcs et l'on complique beaucoup les calculs, tout en rendant les observations plus difficiles. Nous ne conseillerons donc pas d'essayer ce procédé.

L'éclipse de Lune est un phénomène instantané (§ 125), c'est-à-dire visible au même instant physique de tout l'hémisphère qui voit la Lune. Elle serait, à ce titre, éminemment propre à la détermination des longitudes si elle pouvait être observée avec précision : elle peut, en tout cas, donner une valeur approchée de la longitude en comparant les heures notées aux diverses phases de l'éclipse avec celles observées ou calculées pour le premier méridien. Mais il est difficile de distinguer avec précision la séparation entre l'ombre et la pénombre, et cette incertitude empêche les observations précises du commencement et de la fin de l'éclipse. On a proposé de remédier à cela en observant les moments où l'ombre aborde ou quitte des points bien définis du disque lunaire, des taches par exemple : mais nous ne connaissons pas d'exemple d'une application de ce procédé, qui est sujet aux mêmes incertitudes que l'observation de l'éclipse, bien qu'à un degré moindre.

Les éclipses de Soleil et les occultations sont au contraire des phénomènes rigoureux et précis, dont l'observation peut donner de très bonnes longitudes. Les éclipses, nous l'avons dit, sont assez rares : le nombre des observations d'occultations d'étoiles n'a, au contraire, en quelque sorte d'autre limite que celle résultant de l'acuité de la vision et de la puissance des lunettes.

Avec une simple longue-vue on peut observer un grand nombre d'occultations, et, comme le phénomène est très net et instantanément perceptible, obtenir une grande précision. La disparition de l'étoile derrière le bord de la Lune est appelée *immersion :* l'*émersion* est la réapparition de l'astre au moment où il cesse d'être couvert par la Lune. A cause de la parallaxe lunaire, les circonstances du phénomène varient d'un lieu terrestre à un autre : les occultations n'ont lieu que pour une portion déterminée de la Terre, les heures de l'immersion et de l'émersion varient également.

La détermination d'une longitude par l'observation d'une occultation ou d'une éclipse de Soleil comporte donc trois opérations :

1° La préparation, c'est-à-dire la détermination approximative, faite à l'avance, des instants du commencement et de la fin, ou la prédiction de l'éclipse ;

2° L'observation elle-même ;

3° Le calcul de la longitude à l'aide des données de l'observation.

140. — Prédiction des occultations et éclipses.

Les éphémérides donnent les indications nécessaires pour savoir si une éclipse de Soleil est visible en un lieu déterminé. La *Connaissance des Temps* publie des cartes sur lesquelles on suit la marche de l'ombre lunaire à la surface du globe, et l'on voit à première vue si l'éclipse sera observable au point où l'on se trouve. Les occultations des planètes et des étoiles jusqu'à la sixième grandeur inclusivement sont également prédites dans ce Recueil et dans les autres éphémérides astronomiques. On voit tout d'abord si l'on se trouve dans les limites de latitude que les Tables indiquent. On calcule ensuite grossièrement l'heure du phénomène, et l'on s'assure qu'à cette heure la Lune est au-dessus de l'horizon. Si l'on se trouve alors dans les conditions où l'observation est possible, il reste à voir si réellement l'occultation se produira au point indiqué, et à quelles heures à peu près il faut se préparer à observer l'immersion et l'émersion. La *Connaissance des Temps* donne une méthode de calcul pour effectuer cette prédiction, méthode simplifiée autant que possible par le calcul préalable d'un certain nombre de constantes, mais qui, malgré cela, est fort longue et devant laquelle beaucoup d'observateurs reculent, d'autant qu'elle comporte ordinairement une deuxième approximation. Le principe en sera donné ci-après quand nous exposerons le calcul de la longitude : les explications des Tables renferment toutes les indications nécessaires pour guider le calculateur : nous y renvoyons ceux qui seraient disposés à suivre cette marche, et nous allons nous borner à exposer une méthode graphique, d'une exactitude suffisante pour l'objet que nous avons en vue, et qui s'étend facilement à la prédiction des éclipses du Soleil. Une première solution de ce genre est exposée dans le Livre de M. Bach (1), paru en 1860; l'auteur y traite la question complètement comme graphique et calcul. M. Baills (2) a donné depuis une construction un peu

(1) Bach, *Calcul des éclipses de Soleil par la méthode des projections* (Mallet-Bachelier, 1860).

(2) Baills, *Éclipses, Occultations* (Delagrave, 1878). — *Voir* aussi Beuf et Perrin, *Les occultations des étoiles par la Lune* (Berger-Levrault, 1882), et Berry, *Théorie complète des occultations* (Gauthier-Villars, 1880).

différente, qui, à notre sens, offre l'avantage de parler plus directement aux yeux, parce qu'elle présente l'image même des mouvements réels de la Terre et de la Lune : c'est celle que nous allons développer.

La prédiction graphique des occultations d'étoiles n'est à vrai dire qu'un cas particulier de celle des éclipses de Soleil, en supposant nul le diamètre apparent de l'astre occulté. Il serait donc peut-être plus conforme à la logique de donner la méthode générale. Nous préférons pourtant examiner d'abord le cas des étoiles, d'une part, pour simplifier la démonstration, d'autre part, parce que c'est le problème qu'on aura à traiter dans l'immense majorité des cas, celui qui est bien réellement pratique, et qu'on est le plus intéressé à bien comprendre.

Pour un observateur supposé placé au centre de la Terre, la prédiction serait des plus simples. Il suffirait de tracer sur une carte céleste la route du centre de la Lune donnée par ses coordonnées α et δ, de tracer de part et d'autre de cette route deux bandes qui en seraient distantes d'une quantité angulaire égale au demi-diamètre apparent de notre satellite : toute étoile située dans cette zone serait occultée par la Lune. La grandeur de la parallaxe lunaire ne permet pas d'étendre cette marche si simple aux points de la surface.

Étant donnée une étoile qui doit être occultée par la Lune, on commence par calculer l'instant de la conjonction, c'est-à-dire l'heure du premier méridien des éphémérides, à laquelle l'étoile et le centre de la Lune ont même ascension droite.

L'ascension droite de l'étoile est donnée : on cherche dans les Tables de la Lune les deux ascensions droites de cet astre entre lesquelles cette quantité est comprise, et l'on trouve par interpolation (sans recourir aux différences secondes) l'heure de la conjonction en temps moyen de Paris. Soit T_p cette heure, on la transforme en temps sidéral de Paris S_p. Le méridien de la conjonction est le méridien terrestre dans lequel se trouvent les centres à l'instant où leurs ascensions droites sont égales. Pour ce méridien et à ce moment, la parallaxe en ascension droite est nulle, et par conséquent l'ascension droite apparente de la Lune est égale à celle de l'étoile : l'heure sidérale locale est égale à l'ascension droite α de l'étoile; et la longitude orientale $\alpha - S_p$, (ou $S_p - \alpha$ la longitude occidentale). Si, par le centre de la Terre, nous menons un plan

perpendiculaire au rayon dirigé vers l'étoile, il limitera l'hémisphère dirigé vers la Lune dans lequel l'occultation peut être visible, abstraction faite de la réfraction.

Nous prendrons pour plan vertical de projection (*Pl. I*) un plan passant par le centre de la Terre et perpendiculaire au rayon terrestre dirigé vers l'astre, et nous supposerons cette droite fixe, ce qui revient à remplacer les mouvements apparents par les mouvements réels.

La Terre aura donc son mouvement de rotation autour de la ligne des pôles, et la Lune aura son mouvement propre en ascension droite et en déclinaison.

Faisons d'abord abstraction de l'aplatissement : la Terre aura pour projection verticale un cercle de rayon égal à la parallaxe horizontale de la Lune ; le centre de ce cercle sera la projection O′ de l'étoile. La projection horizontale de la Terre sera un cercle égal dont nous n'avons conservé que la portion utile. Nous faisons passer la ligne de terre par le centre O′. Nous admettrons que le pôle nord est le pôle supérieur. Le méridien de la conjonction sera perpendiculaire à la fois aux deux plans de projection, ses deux traces seront parallèles à la direction des lignes projetantes : l'axe terrestre qui y est contenu aura donc ses deux projections sur cette direction O′M.

Pour déterminer la position de cet axe, faisons tourner le méridien de la conjonction de 90° autour du rayon O′M dirigé vers l'étoile : il se rabattra sur le plan horizontal, et le pôle nord viendra en un point N tel que l'arc NM soit égal à la distance polaire δ de l'étoile.

Un point de la sphère terrestre est défini par sa colatitude λ et par sa longitude à partir du méridien de la conjonction. Puisque nous supposons que la Terre a son mouvement de rotation propre relativement à la direction MO′ fixe dans l'espace, nous pouvons à un instant donné définir un point par sa longitude comptée de ce méridien, fixe dans l'espace et mobile sur la Terre : sa longitude Est sera précisément égale à l'angle horaire de l'étoile, donné par la relation connue

$$P = S - \alpha.$$

Sur le méridien de la conjonction rabattu, le parallèle du point

donné se projette suivant une droite RS perpendiculaire à O'N, et telle que l'arc NR soit égal à la colatitude λ. Si nous rabattons maintenant ce parallèle de 90° autour de son diamètre, en sens inverse du mouvement communiqué tout à l'heure au méridien de la conjonction, nous aurons un cercle ayant RP pour rayon : nous compterons vers la gauche à partir de R les longitudes Est ou, ce qui revient au même, les angles horaires positifs de l'étoile. Soit OR l'angle horaire P à un instant donné S : le point O se projette sur le rayon du parallèle en a : la droite Oa, qui est une horizontale, donnera la distance du point O au méridien de la conjonction : si donc nous ramenons ce méridien dans sa position initiale verticale, O décrira en projection une perpendiculaire à MO' et la projection horizontale sera en c, ca étant perpendiculaire à MO'. La projection verticale sera en c', tel que $O'a'$ soit égal à Oa et la verticale $c'a'$ égale à ca. En construisant ainsi successivement les positions d'un même point aux heures S, S', S'', etc., on aura la projection verticale de la trajectoire de ce point terrestre.

A cause de la distance infinie de l'étoile, tous les points de la Terre la voient dans la même direction qui est celle des projetantes : un point quelconque de la Terre mettra donc l'étoile à la place de sa propre projection verticale, et pour ce point le lieu de l'étoile est la projection de sa trajectoire. On choisira les heures S, S', S'', ... équidistantes de 20^m de temps, ce qui fait 5° d'angle, et l'on prendra, pour origine des heures, l'heure sidérale Σ qui correspond à l'instant de la conjonction géocentrique en ascension droite. Il faut connaître pour cela une longitude approchée G de la station : si G est une longitude *Est* et S_p l'heure sidérale de Paris de la même conjonction, Σ se détermine par la relation

$$\Sigma = S_p + G.$$

Occupons-nous maintenant de projeter la trajectoire du centre de la Lune. Le demi-diamètre apparent ne dépasse pas 16', et l'occultation ne sera possible qu'autant que la projection de la Lune se trouvera toucher ou couper celle de la trajectoire du point terrestre ou la trajectoire apparente de l'étoile.

Toute l'étendue de la figure ne peut donc dépasser $\Pi + \Delta$, soit 78'. Dans ces conditions, il est permis de remplacer la sphère

ayant pour centre le centre de la Terre, et sur laquelle se trouve la Lune, par son plan tangent, en ayant égard aux approximations possibles d'une construction graphique. Supposons qu'on ait une valeur approchée de la longitude du point terrestre : elle servira à calculer les heures du premier méridien qui correspondent aux heures S, S′, S″, etc. On trouvera dans les éphémérides, pour ces heures, les coordonnées du centre de la Lune $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \ldots, \delta_1, \delta'_1, \delta''_1$. On calculera les différences des distances polaires de la Lune et de l'astre : $\delta - \delta_1$, $\delta - \delta'_1$, $\delta - \delta''_1$, qu'on évaluera en minutes et qui donneront les distances du centre de la Lune à la ligne de terre, au-dessus si elles sont positives, au-dessous si elles sont négatives. Pour trouver les distances du centre à la verticale MO′, on observera que, l'ascension droite de la Lune croissant, le mouvement de sa projection a lieu de droite à gauche et que les arcs décrits sur le parallèle de déclinaison sont $\alpha'_1 - \alpha_1$, $\alpha''_1 - \alpha'_1$ en projection sur l'équateur. Les grandeurs de ces mêmes arcs réellement décrits sont $(\alpha'_1 - \alpha_1)\sin\delta_1$, etc. Il suffit, eu égard aux faibles variations de δ, de prendre le sinus de la distance polaire (δ) correspondant à l'instant moyen.

En fait, l'opération se réduit à calculer les ascensions droites et distances polaires pour les heures sidérales $\Sigma \pm 1^h$; à réduire la différence $\alpha_{+1} - \alpha_{-1}$ en arc en multipliant par $15\sin(\delta)$, (δ) étant $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1})$, à placer ces deux points après réduction des différences en minutes et fractions de minutes d'arc, et à les joindre par une droite que l'on considère comme la trajectoire apparente du centre de la Lune. On divisera cette droite en parties égales qui correspondront aux heures équidistantes S, S′, S″, et l'on numérotera ces points par les mêmes nombres que ceux de la trajectoire du point T qui leur correspondent. Ces deux trajectoires étant tracées, si deux points de même numéro se trouvent à une distance l'un de l'autre moindre que le demi-diamètre lunaire, il y aura occultation. Les heures d'émersion et d'immersion sont celles pour lesquelles la distance des points correspondants est précisément égale à ce demi-diamètre. Prenant donc une ouverture de compas égale au demi-diamètre, à l'échelle de la construction, on cherchera par tâtonnement deux points de même numéro, tels que cette ouverture mesure leur distance.

Au lieu d'opérer par tâtonnement, on peut encore, une fois les

courbes tracées, mener les droites qui joignent deux à deux les points correspondants : puis, par un point arbitrairement choisi, par exemple la position du point terrestre à l'instant Σ, on mène des parallèles à ces droites, et l'on porte sur ces parallèles des longueurs égales aux distances ; on numérote les points, le lieu des extrémités de ces droites sera une courbe qu'on tracera, et dont l'intersection par un cercle de rayon égal au demi-diamètre donnera sans tâtonnement les heures d'immersion et d'émersion.

Pour appliquer cette construction aux éclipses de Soleil, on remplace dans ce qui précède le temps sidéral par le temps vrai, et l'on remarque que le contact a lieu quand les centres sont à une distance angulaire égale à la somme des demi-diamètres : dans la construction, on remplacera par cette somme le demi-diamètre de la Lune. La parallaxe du Soleil est trop petite pour en tenir compte dans un graphique. Pour une planète, gardant le temps sidéral comme mesure, on prend pour le mouvement en α et δ de la Lune son mouvement relatif à la planète, c'est-à-dire la différence des mouvements de la planète et de la Lune.

Pour les éclipses partielles de Soleil, les seules observations intéressantes au point de vue qui nous occupe sont celles du premier et du dernier contact, c'est-à-dire du commencement et de la fin de l'éclipse. L'observation devient plus intéressante pour les éclipses totales ou annulaires ; on a alors à considérer encore les premiers et deuxièmes contacts intérieurs. Quand on aura construit la trajectoire apparente relative du centre de la Lune, par l'opération exposée plus haut, on trouvera les heures des contacts extérieurs en décrivant du centre du Soleil un cercle de rayon égal à la somme des demi-diamètres, et les contacts intérieurs en prenant pour ce rayon la différence de ces demi-diamètres. La simple considération du point de la trajectoire apparente le plus voisin du centre fixe permet de construire géométriquement la figure du maximum de l'éclipse.

Angle pôle, angle zénith. — Pour bien se préparer à l'observation, il est bon de savoir à quel point du disque de la Lune se produira l'occultation. Pour le trouver, remarquons que la projection de la Lune représente l'aspect de cet astre tel qu'il est vu de la Terre, et que la verticale représente le grand cercle allant

de la Lune au pôle, ou le méridien de la Lune. Cela posé, si nous supposons la Lune immobile et que nous composions son mouvement pris en sens inverse avec celui de l'étoile, représenté par le mouvement de la projection du point terrestre, que nous prenions d'ailleurs pour instant central celui de la conjonction, la trajectoire apparente résultante sera la marche de l'étoile par rapport au disque lunaire, et les points d'intersection du disque avec la courbe représenteront les points où l'étoile aborde ce disque. L'angle NLi sera donc l'angle que fait le rayon de la Lune dirigé vers le Nord, avec celui dirigé vers le point où l'immersion a lieu : c'est l'*angle pôle*. Il suffit d'en avoir une idée approchée par la figure. Il est encore plus facile pour l'observation de rapporter ce point à la direction de la verticale et de chercher l'*angle zénith*. Il suffit pour cela de connaître sur le même plan la direction de la trace du vertical de l'étoile. Or cette trace passe évidemment par la projection verticale du point, dans le mouvement vrai : elle passe aussi par la projection du centre O', c'est donc $O'i'$, etc.; menant par L une parallèle LV à $O'i'$, on aura pour supplément de l'angle zénith l'angle iLV. Il faut faire attention au sens dans lequel on doit compter cet angle, selon que la lunette renverse ou ne renverse pas les images.

Le résultat de ces constructions est de donner en définitive l'heure sidérale locale du phénomène. Comme l'argument des Tables de la Lune est le temps moyen du premier méridien, comme d'ailleurs on emploie souvent des chronomètres réglés sur le temps moyen, les calculs préparatoires de la construction s'abrègent en prenant ce temps pour unité. La disposition adoptée actuellement pour les Tables des lieux de la Lune dans la *Connaissance des Temps* est très avantageuse pour faire cette simplification.

Voici la marche à suivre :

Connaissant l'ascension droite de l'étoile, on calculera l'*heure de la conjonction* en temps moyen de Paris. C'est l'heure (colonne de gauche) à laquelle l'ascension droite de la Lune est égale à celle de l'étoile, et qui s'obtient par interpolation proportionnelle entre les deux heures qui comprennent cette ascension droite. On calculera aussi la *longitude du méridien de la conjonction*, en recourant aux colonnes de droite et interpolant de la même manière : cette longitude est *ouest*, et comptée en heures. En

retranchant de cette longitude la longitude occidentale du lieu où l'on doit observer, on a en grandeur et en signe l'angle horaire de l'étoile au moment de la conjonction. On pourra donc dresser la projection comme il a été dit ci-dessus. Mais, comme nous prenons pour unité l'heure de temps moyen, et que la vraie rotation de la Terre est la rotation sidérale, on prendra, pour représenter 2^h sur le rabattement du parallèle, un angle de 30°5′ au lieu de 30°.

Au lieu de prendre pour rayon du cercle de projection la parallaxe horizontale équatoriale, on prendra cette parallaxe multipliée par le rayon R de la Terre (Table V); et l'on remplacera pour la construction la colatitude astronomique λ par la colatitude géocentrique λ' (même Table).

Connaissant l'heure de la conjonction en temps moyen de Paris, on calculera pour cet instant la déclinaison et la distance polaire $\delta_{\mathbb{C}}$ de la Lune, et l'on portera $\delta_{\star} - \delta_{\mathbb{C}}$ positif vers le haut, négatif vers le bas, à partir du centre : on aura la position L du centre de la Lune à l'époque de la conjonction géocentrique.

On construira la position c' du point terrestre à ce même instant. Puis traçant un cercle qui a pour centre le point L et pour rayon le demi-diamètre, on examinera la position de c' par rapport à L. Si c' est à droite, la conjonction apparente a déjà eu lieu : s'il est à gauche, elle aura lieu plus tard. Dans le premier cas, si c' est en dehors du disque lunaire, les deux phases de l'occultation sont antérieures à la conjonction géocentrique : s'il est en dedans, l'immersion a eu lieu, et l'émersion aura lieu plus tard. Si c' est à gauche de L, et intérieur au disque, l'immersion a déjà eu lieu; s'il est extérieur au disque, les deux phases sont encore à venir. Pour le calcul des éléments de la trajectoire de la Lune, on se guidera sur ce premier examen. Supposons par exemple c' à gauche de L, et extérieur au disque. On prendra l'heure ronde de Paris *antérieure* à celle de la conjonction, que nous appellerons H; on calcule pour cette heure $\alpha_{\mathbb{C}}$ et $\delta_{\mathbb{C}}$. On calcule les mêmes éléments pour $H + 2^h$. On en déduit la variation de δ en 2^h par une simple soustraction, et l'on peut prendre sans erreur sensible cette variation comme étant celle qui a lieu entre la conjonction et 2^h après. De même pour l'ascension droite; cette dernière variation réduite en arc et multipliée par le sinus de la distance polaire qui correspond à $H + 1^h$ sera portée en abscisse à gauche de L; la variation de δ en 2^h

sera portée en ordonnée à partir de L, vers le bas si δ croît, et vers le haut s'il décroît. Si c' était à droite de L, on prendrait la variation d'$\mathcal{R}$ entre H et H $-$ 2^h et on la porterait vers la droite après l'avoir multipliée par $\sin\delta_{\mathbb{C}}$.

On construira ensuite les projections du point terrestre de 20^m en 20^m, en divisant OB en six parties égales : on divisera de même en six parties égales la ligne L $-$ 2^h, on joindra les points correspondants des deux trajectoires, et l'on mènera par L des droites égales et parallèles à ces droites, dont les extrémités détermineront ainsi la trajectoire apparente de l'étoile par rapport à la Lune supposée immobile.

Dans ce nouveau mouvement relatif, la vitesse de l'étoile est dirigée de la gauche vers la droite : c'est donc vers la gauche du centre de la Lune que sera le point qui correspond à l'immersion ; l'émersion a lieu à droite.

La *Pl. I* représente l'épure de prédiction de l'occultation d'Aldébaran, le 1er septembre 1885, pour Marseille : c'est l'exemple calculé dans la *Connaissance des Temps*. Voici comment elle a été construite. On a pris pour échelle 2^{mm} pour 1 minute d'arc. Après s'être assuré qu'à l'heure de la conjonction la Lune est bien au-dessus de l'horizon, on a fait les calculs préliminaires.

Longitude $23^h47^m46^s,4$ O. Colatitude $46°41'43''$.

On trouve page 666 :

$\alpha = 4^h29^m21^s,67$, $D = +16°16'36'',5$; d'où $\delta = 73°43'23'',5$.

Page 181, colonnes de gauche, $\alpha_\star$ est compris entre 14^h et 15^h et diffère de $91^s,66$ de l'$\alpha_{\mathbb{C}}$ pour 14^h. On a donc l'*heure de la conjonction*, $14 + \dfrac{91,66}{143,57} \times 3600 = 14^h38^m18^s,4$.

Dans les colonnes de droite, $\alpha_\star$ est compris entre 20 et 21^h ; on trouve de même par interpolation qu'il correspond à la longitude

	$20^h54^m35^s,1$
Longitude de Marseille	23 47 46 ,4
Angle horaire de l'étoile...	$-2^h53^m11^s,3 = -43°17'50''$.

Pour le passage au même méridien de $20^h54^m35^s$, on trouve

à vue sur la même page

$$\Pi = 58'39'',4, \qquad \Delta = 16'0'',5 = 32^{mm},0.$$

Pour trouver le rayon de la projection, notre Table V donne pour $\lambda = 46°41'$

$$\begin{array}{lll} \lambda' - \lambda = \ \ 11'29'' & \log R = 9,99932 \\ \lambda = 46°41\ 43 & \log \Pi = 3,54647 \\ \lambda' = 46°53'12'' & \log \Pi R = 3,54579 \quad \Pi R = 58'34'' = 58',56 = 117^{mm},1 \end{array}$$

Faisons $MO'N = \delta = 73°43'$, puis portons $NO'R = NO'S = 46°53'$, sur le diamètre RS décrivons un cercle: l'angle horaire P est négatif, nous portons $RPO = 43°18'$ vers la droite. Nous abaissons Oa perpendiculaire à RS, puis ac parallèle à xy. Le point c', projection verticale de Marseille et de l'étoile, se place en prenant $O'a' = Oa$, et $a'c' = ac$ sur une parallèle à O'M.

Pour l'heure $14^h38^m18^s$ temps moyen de Paris, on trouve par interpolation dans les colonnes de gauche, page 181,

$$\begin{array}{ll} D = +\ 16°43'32'' & \delta\mathbb{C} = 73°16'28'' \\ & \delta\star = 73\ 43\ 23 \\ & \delta\star - \delta\mathbb{C} = +\ 26'55'' = +\ 26',92 = 53^{mm},8. \end{array}$$

On porte O'L vers le haut (+) égal à $53^{mm},8$, L sera la projection du centre de la Lune. Avec le rayon 32^{mm} et le centre L on décrit un cercle qui représente la projection de la Lune à l'instant de la conjonction, ou encore la trace verticale du cylindre d'occultation. Le point c' est à droite et en dehors; et comme la Lune se meut vers la gauche, l'occultation est déjà passée. Nous prendrons donc les coordonnées de la Lune pour les heures 13^h et 15^h, temps moyen de Paris.

$$\begin{array}{lll} 13^h \quad \alpha\mathbb{C} & 4^h25^m26^s,67 & \delta\mathbb{C}\ 73°23'47'',4 \\ 15^h & 4\ 30\ 13\ ,58 & 73\ 14\ 52\ ,6 \\ \text{Différence} & 4^m46^s,91 = 286,91 & 8'54'',8 = 8',91 = 17^{mm},8 \end{array}$$

$$\text{Pour } 14^h\ \delta = 73°19'17'' \qquad \frac{286,91}{4} \sin\delta = 68',71 = 137^{mm},4.$$

$\delta\mathbb{C}$ va en diminuant, la Lune marche vers le Nord, donc o

porte l'ordonnée de 13^h ou -2^h égale à $53^{mm},8 - 17^{mm},8 = 36^{mm},0$ et l'abscisse $O'D = 137^{mm},4$ vers la droite. La droite $-2^h L$ représentera la trajectoire de la Lune. Nous la divisons en six parties égales.

Pour construire la trajectoire de Marseille (ou de l'étoile), nous portons $OPB = 30°5'$ vers la droite : nous le divisons en six parties égales, et pour chaque point de division nous répétons la construction déjà faite pour O et qui nous a donné c'. Menons maintenant par L la droite $L - 1^h$ égale et parallèle à la droite qui joint les points -1^h des trajectoires de la Lune et de l'astre, nous aurons, en répétant cette construction pour tous les points, la trajectoire relative dessinée en petits points $-2^h, i, -1^h, e, c'$, qui coupe le disque aux points e et i. Le mouvement de la Lune a lieu vers la droite, donc le mouvement relatif de l'étoile se fait vers la gauche, i correspond à l'immersion, et e à l'émersion. i est entre les points -1^h40^m et -1^h20^m.

La distance de -1^h40^m à -1^h20^m est de $21^{mm},1$, celle de -1^h40^m à i est de $16^{mm},8$; on a

$$\frac{16,8 \times 20}{21,1} = 15,9 = 15^m54^s,$$

l'immersion correspond donc à $-1^h40^m + 15^m54^s = -1^h24^m6^s$ avant la conjonction.

Conjonction.....	$14^h38^m18^s$	Temps moyen de Paris.
Longitude.....	23.47.46	
Conjonction.....	14.50.32	Temps moyen de Marseille.
Intervalle.....	1.24.6	
Immersion.....	12.26.26	

On trouve de même pour l'émersion $14^h17^m8^s$.

Les heures de la *Connaissance des Temps* sont, avec la première approximation,

$$T_i = 13^h18^m18^s, \qquad T_e = 14^h16^m31^s,$$

et avec la seconde approximation,

$$T_i = 13^h26^m13^s, \qquad T_e = 14^h18^m20^s.$$

On voit que le procédé graphique, d'une exécution si rapide,

est d'une exactitude beaucoup supérieure à la première approximation du calcul.

On interpole facilement sur la trajectoire du lieu la position qui correspond par exemple à l'instant de l'immersion : $O'i'$ est la verticale à cet instant : menant LY parallèle à cette droite, on aura

$$\text{Angle pôle} = \text{arc } N'eS'i = 323^\circ 20'.$$

$$\text{Angle zénith} = 360^\circ - i\text{LV} = 274^\circ 0'.$$

On retranchera 180° pour avoir ces angles tels qu'ils sont vus dans une lunette qui renverse les images en allant du zénith ou du Nord vers la droite du disque.

On pourrait donner à la construction graphique une exactitude supérieure sans accroître les dimensions de la figure. Après avoir obtenu une première approximation, on calculerait pour les heures du phénomène les parallaxes en ascension droite et en déclinaison (§ 27), et l'on ferait la construction avec le demi-diamètre augmenté, tel qu'il est vu de la surface de la Terre. On n'a pas besoin alors de projeter le lieu, et l'on peut donner au demi-diamètre une longueur quatre fois plus grande en gardant à la figure les mêmes dimensions. Mais l'approximation ordinaire de la construction graphique suffit largement.

Mentionnons enfin un moyen simple et pratique de prévoir une occultation, moyen qui a été indiqué par Daussy et préconisé par M. Grandidier, et qui s'applique particulièrement bien entre la Nouvelle et la Pleine Lune.

Au début de la soirée, on dirige la lunette astronomique vers la Lune et l'on note au chronomètre l'heure à laquelle le bord de la lumière cendrée quitte le champ. On attend alors sans bouger la lunette, si une étoile vient à passer, et l'on note l'heure de sa sortie; la différence avec l'heure de la sortie de la Lune donne la différence des ascensions droites, et en la multipliant par 3o $\left(\text{ou mieux par } \frac{3600}{\Delta\alpha}\right)$ on obtient approximativement le temps que l'étoile mettra à atteindre le bord obscur de la Lune.

Si la lumière cendrée n'est pas assez visible, on observe l'heure de la sortie du bord éclairé, et l'on y ajoute le double de la durée du passage du demi-diamètre au méridien, prise dans les éphé-

mérides. Il est facile de généraliser et d'étendre ce procédé à toute la lunaison.

141. — Observation de l'éclipse.

Les circonstances ainsi prédites, on calculera les heures du chronomètre auxquelles répondent les différentes phases.

L'observation se fera avec une lunette quelconque, en choisissant un grossissement convenable qui n'a pas besoin d'être exagéré. Quelques minutes avant l'instant du phénomène, on vise à l'étoile, en concentrant son attention sur elle, et l'on suit son mouvement en suivant de l'oreille les battements du compteur. La disparition de l'étoile a lieu brusquement et peut s'évaluer à une fraction de seconde près, que l'on note. On peut aussi ne pas se préoccuper de compter, tout en écoutant les battements, et au battement correspondant à l'instant observé, on compte zéro : puis on continue à compter jusqu'à ce qu'on ait pu noter sur le cadran un nombre exact de battements : en retranchant de ce nombre celui qu'on vient de compter, on aura l'heure du phénomène. On règlera le chronomètre avant et après l'observation au moyen d'observations astronomiques, et l'on aura ainsi tout ce qu'il faut pour calculer la longitude, Les meilleures observations se rapportent à des occultations par le bord obscur, soit émersions, soit immersions. Les occultations par le bord éclairé sont beaucoup moins certaines, surtout pour des étoiles de faible éclat : c'est un contact qu'on observe et non plus une extinction subite. On remarque dans toutes les observations ce fait curieux que l'extinction a lieu quand l'étoile paraît déjà être entrée sur le disque de la Lune. Nous ne connaissons pas d'explication de cette apparence paradoxale.

Un observateur pourvu d'une lunette micrométrique à fil mobile pourrait encore prendre des mesures de distances de l'étoile au bord de la Lune, d'où l'on tirerait également la valeur de la longitude. Mais les distances ne peuvent être prises qu'entre l'étoile et le bord éclairé de la Lune : cette observation est loin d'avoir la précision et l'instantanéité qu'offre la perception d'une extinction et d'une réapparition subites, bien que ce dernier phénomène surprenne toujours un peu.

L'observation micrométrique des *appulses* revient aussi à une

distance lunaire, mesurée seulement avec un grossissement plus fort que celui de la lunette d'un sextant: elle ne peut donner de résultat exact que si la déclinaison de la Lune varie rapidement, c'est-à-dire si l'astre est près de l'équateur: l'erreur sur la latitude du lieu a une énorme influence sur le résultat du calcul.

Par les mêmes raisons, les occultations des planètes ne donnent pas de résultats aussi précis que celles des étoiles, à cause du diamètre apparent de ces astres : leur lumière va s'affaiblissant graduellement, et l'instant de l'extinction complète est observé différemment, selon qu'on se sert de lunettes plus ou moins fortes.

Pour les éclipses de Soleil, on note les instants du premier et du dernier contact: on y ajoute les deux contacts intérieurs, si l'éclipse est annulaire ou totale. La précision de ces observations est également inférieure à celle des occultations. Pourtant, dans une éclipse totale, il y a un moment où le Soleil est réduit à un mince croissant; alors la distance angulaire des cornes va décroissant rapidement avec le temps; les observations de distance de ces cornes peuvent donc donner de bons résultats. Malheureusement il est bien rare qu'on ait l'occasion de faire une observation de ce genre.

Dans les éclipses qui approchent de la totalité, il est un autre élément encore qui varie rapidement à un moment donné: c'est l'angle de la ligne des cornes avec un diamètre fixe du Soleil, par exemple celui qui passe par le pôle. La mesure de cet angle fournirait donc une équation de condition très favorable: mais les instruments portatifs sont rarement munis du micromètre tournant qui serait nécessaire pour faire ces déterminations.

142. — Calcul de la Longitude par les occultations.

On a proposé pour ce calcul un grand nombre de méthodes, toutes généralement assez longues. Les anciennes formules étaient basées sur l'emploi des coordonnées écliptiques : elles sont abandonnées aujourd'hui, et l'on ne se sert plus que des coordonnées équatoriales. En principe, on part toujours d'une valeur approchée de la longitude pour faire un calcul dont le résultat fournit la correction de cette longitude. Ce calcul peut se réduire à la traduction en chiffres des constructions graphiques, mais en faisant

intervenir alors des données plus précises : on tient compte de l'aplatissement, on ne substitue plus les arcs à leurs sinus.

La *Connaissance des Temps* donne la méthode de Bessel avec quelques modifications de détail; le principe en est celui-ci : les rayons lumineux issus de l'étoile et tangents à la Lune sont les génératrices d'un cylindre de révolution, dont on cherche l'intersection par la surface de la Terre : pour qu'un point de la surface soit celui où l'occultation a été observée, il suffit évidemment que ses coordonnées satisfassent à l'équation du cylindre.

Afin de ne pas faire de confusion, et puisqu'il s'agit d'expliquer la *Connaissance des Temps,* nous adopterons ses notations : et, au lieu des distances polaires et des colatitudes, nous considérerons les déclinaisons et les latitudes. Il suffira, pour revenir à nos coordonnées ordinaires, de permuter les sinus et les cosinus de ces quantités.

L'axe du cylindre considéré est la droite qui joint le centre de la Lune à l'étoile. L'étoile ayant une parallaxe nulle, une parallèle à cet axe menée par le centre de la Terre a pour coordonnées sphériques l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile.

Soient donc A l'ascension droite, D la déclinaison } de l'étoile.

α l'ascension droite, δ la déclinaison } de la Lune.

Π la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune,

h l'angle horaire S — A de l'astre au lieu d'observation à l'instant de l'occultation.

Soit pris pour unité le rayon équatorial de la Terre, et soit k le rayon de la Lune ($k = 0{,}2726$); soit $\Delta = \frac{1}{\sin \Pi}$ la distance des centres de la Terre et de la Lune.

Prenons pour origine le centre de la Terre, et dirigeons l'axe des y vers le pôle nord : l'axe des z et l'axe des x sont dans l'équateur : le premier, dans le cercle de déclinaison de l'étoile, a pour

---

(1) Consulter la *Théorie complète des occultations,* par M. C. Berry (Gauthier-Villars, 1880). — Ce livre renferme des Tables pour faciliter les calculs, quand l'occultation n'est pas de celles qui se trouvent dans la *Connaissance des Temps.*

ascension droite A; le second a pour ascension droite $A + 90^\circ$.

Les coordonnées de la Lune sont

$$z_1 = \Delta \cos\delta \cos(\alpha - A), \qquad y_1 = \Delta \sin\delta, \qquad x_1 = \Delta \cos\delta \sin(\alpha - A).$$

Faisons maintenant tourner le système d'axes autour de l'axe des x, de manière que l'axe des z vienne passer par l'étoile, cela revient à faire tourner les axes des y et des z d'un angle D, et en substituant à Δ sa valeur $\frac{1}{\sin \Pi}$, les formules de transformation nous donnent, pour la Lune,

$$z = \frac{\sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(\alpha - A)}{\sin \Pi},$$

$$y = \frac{\sin\delta \cos D - \cos\delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \Pi},$$

$$x = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - A)}{\sin \Pi},$$

et pour un point de la surface de la Terre,

$$\zeta = r[\sin D \sin\varphi' + \cos D \cos\varphi' \cos(S - A)],$$
$$\eta = r[\cos D \sin\varphi' - \sin D \cos\varphi' \cos(S - A)],$$
$$\xi = r \cos\varphi' \sin(S - A),$$

S étant l'heure sidérale du lieu, φ' sa latitude géocentrique.

Si nous transportons ces axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à placer l'origine au centre de la Lune, l'axe des z sera l'axe du cylindre que nous avons considéré, et les coordonnées du centre de la Terre seront $-x$, $-y$ et $-z$.

Celles du point de la surface seront ζ, $\eta - y$ et $\xi - x$.

Pour que ce point soit sur le cylindre $X^2 + Y^2 = k^2$, il faut donc qu'on ait

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = k^2.$$

Les quantités y, x, η, ξ sont désignées respectivement dans la *Connaissance des Temps* par q, p, v, u, d'où l'équation

$$(p - u)^2 + (q - v)^2 = k^2.$$

En désignant par p', q', p'', q'' les premières et secondes dérivées de p et q, et par p_0, q_0 les valeurs initiales à l'époque T_0, on a pour l'époque $T_0 + \tau$

$$p = p_0 + p'\tau + p''\tau^2$$
$$q = q_0 + q'\tau + q''\tau^2.$$

Ces quantités sont calculées d'avance dans la *Connaissance des Temps*.

Si l'on voulait les calculer soi-même, on n'aurait qu'à se servir des valeurs de x et y données ci-dessus en attribuant aux coordonnées α et δ de la Lune les valeurs tabulaires correspondant aux époques $T_0 - 1^h$, T_0 et $T_0 + 1^h$: les p' et q' sont respectivement les différences premières de x et y, et les p'' et q'' leurs demi-différences secondes.

On voit que le calcul de u et v se fait rigoureusement, car on connaît la latitude et l'heure sidérale du lieu d'observation. Mais p et q dépendent des coordonnées de la Lune, et par conséquent de l'hypothèse faite sur la longitude, d'où l'on a déduit l'heure du premier méridien. On calcule leurs valeurs P et Q avec une longitude approchée $\mathfrak{L}_1$: soit $\mathfrak{L}_1 + d\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$ la vraie valeur (*les longitudes comptées positivement vers l'Est*) : on aura alors pour déterminer $d\mathfrak{L}_1$ l'équation de la *Connaissance des Temps*

$$(P - p' d\mathfrak{L}_1 - u)^2 + (Q - q' d\mathfrak{L}_1 - v)^2 = k^2.$$

Ce qui suit n'est plus qu'une question d'angles auxiliaires destinés à faciliter les calculs : on pose

$$P - u = m \sin M, \qquad p' = n \sin N,$$
$$Q - v = \cos M, \qquad q' = n \cos N,$$

$$\cos\psi = \frac{m}{k} \sin(M - N).$$

L'équation du deuxième degré, après ces substitutions, devient

$$(m \sin M - n \sin N\, d\mathfrak{L}_1)^2 + (m \cos M - n \cos N\, d\mathfrak{L}_1)^2 = k^2,$$

et ses racines sont

$$d\mathfrak{L}_1 = \frac{m}{n}\left[\frac{\cos(M - N)\cos\psi \pm \sin(M - N)\sin\psi}{\cos\psi}\right],$$

ce qui donne

$$d\mathfrak{L}_1 = \begin{cases} \dfrac{m}{n}\dfrac{\cos(M - N - \psi)}{\cos\psi} & \text{pour l'immersion,} \\ \dfrac{m}{n}\dfrac{\cos(M - N + \psi)}{\cos\psi} & \text{pour l'émersion.} \end{cases}$$

Si la longitude n'est pas connue avec assez de précision, il faudra refaire le calcul avec la première valeur approchée $\mathcal{L}_1 + d\mathcal{L}$.

Nota. Le calcul de $r \sin\varphi$ et $r\cos\varphi$ se déduit immédiatement de l'équation de l'ellipse $(1 - e^2)x^2 + y^2 = 1 - e^2$.

$\operatorname{tang}\varphi$ est le coefficient angulaire de la normale, donc

$$\frac{y}{x} = (1 - e^2)\operatorname{tang}\varphi.$$

De ces équations on tire les valeurs d'x et d'y

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}, \qquad y = \frac{(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},$$

et en posant

$$e\sin\varphi = \sin\theta,$$

et remarquant que par définition de la latitude géocentrique on a

$$x = r\cos\varphi', \qquad y = r\sin\varphi',$$

il vient

$$r\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}, \qquad r\sin\varphi' = \frac{1 - e^2}{e}\operatorname{tang}\theta,$$

$$-\log\frac{1 - e^2}{e} = 1{,}084886.$$

La valeur de k adoptée dans la *Connaissance des Temps* est celle qui sert de base aux Tables de Hansen, $k = 0{,}27296$. Burckhardt adoptait $k = 0{,}2725$. M. Oudemans a montré, par la discussion d'un grand nombre d'occultations, que le rayon lunaire à employer dans les calculs est plus petit que celui auquel conduirait l'observation du diamètre apparent ; il conviendrait, selon lui, de prendre $k = 0{,}27264$.

La discordance entre ces valeurs déduites d'observations de différente nature pourrait s'expliquer en admettant l'existence d'une atmosphère lunaire : la déviation subie par un rayon qui émane d'une étoile et qui traverse toute l'atmosphère en rasant la surface de l'astre serait en effet, dans ce cas, double de celle que subit un rayon issu du bord même. Les observations spectroscopiques faites par M. Thollon pendant une éclipse totale du Soleil semblent avoir confirmé l'existence de cette atmosphère.

La *Connaissance des Temps* ne renferme pas toutes les occul-

tations observables; le *Nautical Almanac* en donne une liste beaucoup plus longue, sans descendre au-dessous de la sixième grandeur. Si l'on est dans le cas d'appliquer la méthode de calcul de la *Connaissance des Temps* à une occultation non prédite dans ce Recueil, il faut calculer les quantités p, q, p', q' à l'aide des formules qui donnent leurs valeurs, ainsi que N et n. Mais alors on trouvera tout avantage à profiter de la connaissance qu'on a de la longitude approchée de la station pour choisir la valeur la plus commode de T_0. C'est la minute du premier méridien qui précède l'instant de l'observation. Au lieu de prendre l'heure pour unité de temps, on choisira 1^m ou 2^m : l'interpolation proportionnelle suffit toujours pour un aussi faible intervalle, et l'on est dispensé du calcul de p'' et q''.

Ce mode de calcul a l'inconvénient de ne pas bien parler à l'esprit, puisqu'il n'emploie que des nombres abstraits et des angles auxiliaires dont la signification n'est pas évidente. On a donné plusieurs autres méthodes, dont quelques-unes sont la traduction de constructions graphiques, mais dont le principe est toujours le même.

Elles reviennent toutes à chercher l'heure du premier méridien à l'instant du contact par une interpolation ; on calcule à cet effet, avec les données connues, la distance des centres des deux astres à deux instants connus du premier méridien, comprenant entre eux celui de l'occultation observée : on en déduit l'instant où cette distance était égale au demi-diamètre de la Lune. Dans ce cas, on substitue, à la quantité k, le demi-diamètre Δ de la Lune, exprimé en secondes d'arc (et d'après la remarque faite plus haut, le diamètre tabulaire doit être réduit dans la proportion indiquée par M. Oudemans). Les distances en question sont données par l'équation $(p-u)^2+(q-v)^2=\mathfrak{D}^2$, en évaluant p, q, u, v en secondes d'arc, ce qui est toujours suffisamment exact. On trouvera $\mathfrak{D}$, soit par la formule directe

$$\mathfrak{D}=\sqrt{(p-u)^2+(q-v)^2},$$

soit au moyen d'un angle auxiliaire M, tel que

$$p-u=m\sin\mathrm{M}, \qquad q-v=m\cos\mathrm{M}.$$

Soient alors H_0 et H_0+2^m les instants du premier méridien

pour lesquels on a calculé les distances $\mathfrak{D}_0$ et $\mathfrak{D}_2$, l'heure H du premier méridien correspondant à l'occultation sera donnée par la formule

$$\frac{H - H_0}{2^m} = \frac{\Delta - \mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_0}.$$

La construction que nous avons donnée est traduite par M. Bailly dans les formules suivantes où nous conservons les mêmes notations que ci-dessus. Prenant pour le rayon ρ de la Terre la parallaxe horizontale réduite qui correspond au rayon R de la station, c'est-à-dire $\rho = RII$, log R étant pris dans la Table V, et II évalué en secondes, on calcule en secondes d'arc pour l'heure de l'observation

$$u = \rho \cos\varphi' \sin(S - A), \quad v = \rho \sin\varphi' \cos D - \rho \cos\varphi' \sin D \cos(S - A);$$

et pour les heures H_0 et $H_0 + 4^m$ de Paris,

$$P = 15\,(\alpha - A)\cos\delta, \qquad Q = \delta - D.$$

Cette valeur de Q se déduit de celle de

$$q = \frac{\sin\delta \cos D - \cos\delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin II},$$

en considérant $\alpha - A$ comme assez petit pour qu'on puisse prendre le cosinus égal à 1, auquel cas, et puisque sin II est pris pour unité, $q = \sin(\delta - D)$ et l'arc peut être pris pour le sinus. On calcule α et δ pour des époques H_0 et $H_0 + 4^m$ du premier méridien; puis les valeurs de P, Q, puis $P - u$ et $Q - v$, et enfin

$$\sqrt{(P - u)^2 + (Q - v)^2} = \mathfrak{D},$$

pour les mêmes heures, et l'on trouve l'heure H du premier méridien qui correspond à l'occultation par

$$\frac{H - H_0}{4^m} = \frac{\Delta - \mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}_0}$$

comme ci-dessus. On voit que le calcul de Q est notablement

simplifié, sans qu'il en résulte une erreur sensible sur le résultat. On peut se contenter, dans cet ordre d'approximation, de logarithmes à cinq décimales, comme le fait la *Connaissance des Temps*.

Nous n'avons pas cru devoir donner ici le calcul de la longitude par les éclipses de Soleil. L'intervention de la parallaxe et du diamètre apparent, la variété des phases du phénomène, y introduisent une assez grande complication. Ces éclipses sont relativement rares, et nous aurions ainsi allongé sans grand profit un Chapitre déjà très étendu. Il suffit de savoir les prédire et les observer; c'est ce qui a été indiqué (§ 140 et § 141).

La méthode des occultations d'étoiles a sur toutes les autres observations de la Lune un avantage considérable : l'erreur sur l'évaluation de l'instant de l'occultation n'est pas multipliée dans le résultat par un facteur notablement supérieur à l'unité. Toutes les autres méthodes concluent en définitive un mouvement lent (le mouvement relatif de la Lune) de l'observation d'un mouvement rapide (le mouvement diurne). Or, l'expérience a prouvé dans d'autres circonstances qu'on est exposé à perdre par là beaucoup de précision. Ainsi, les ascensions droites de la Polaire sont susceptibles d'être observées avec une approximation au moins double de celle que l'on pourrait conclure de la lenteur du mouvement de cet astre, comparée au degré de précision avec lequel on observe le passage d'une étoile équatoriale. Un fait semblable se produit dans l'observation de la Lune. Si nous comparons la méthode des occultations à celle des culminations, elle a un avantage très sérieux sous ce rapport.

Les désavantages, relativement aux culminations, sont :

1° Une plus grande complication des calculs, tant pour le calcul primitif que pour la correction des erreurs tabulaires, et la nécessité d'un travail de préparation.

2° La nécessité de connaître la latitude avec beaucoup de précision.

3° L'intervention de la parallaxe dans les calculs, ce qui fait peser sur le résultat les incertitudes relatives à la figure de la Terre.

4° Enfin, le fait qu'on a moins d'occasions d'observer une occultation qu'une culmination.

La première objection est de peu de valeur : la longueur des calculs ne doit pas rebuter quand on veut avoir des résultats précis.

La latitude peut être facilement déterminée avec une exactitude suffisante, surtout à terre : on est supposé en effet disposer du temps nécessaire pour observer à loisir. Les incertitudes relatives à l'aplatissement ne doivent pas être exagérées; quand on a un bon nombre d'observations à différentes hauteurs et à différents azimuts, ainsi que sur différents points du disque lunaire, l'effet de ces erreurs s'atténue notablement. Il importe peu enfin que le nombre des observations soit moindre, si celles-ci sont beaucoup plus précises. Les avantages énumérés plus haut, joints à la facilité de l'observation, qui peut se faire avec une longue-vue ou même une bonne jumelle, doivent donc engager les observateurs à essayer d'une méthode qui, après un abandon injuste, paraît être en train de reconquérir rapidement les suffrages des voyageurs et des officiers de marine.

LIVRE IV.

APPLICATIONS PRATIQUES.

Nous avons exposé les observations et les calculs dont le résultat est de donner la position géographique en longitude et colatitude d'un point de la Terre et la direction de son méridien. Il reste à faire voir l'emploi de ces éléments pour le tracé des routes maritimes et pour la description géographique des terres, c'est-à-dire la manière de relier entre eux les points isolés que nous savons déterminer.

C'est là la matière de deux Sciences distinctes : la Navigation et la Géodésie. Mais, si étendu que soit leur objet, elles se ramènent à un petit nombre de principes simples dont l'exposé succinct fera l'objet de ce Livre.

Représentation géométrique de la sphère sur un plan, ou théorie des projections, construction d'une carte et utilisation d'une carte déjà construite pour diriger la route d'un navire : tels sont les points à traiter. Il y aura ensuite à examiner les moyens par lesquels on arrive à obtenir la plus grande précision possible, et à se rendre compte du degré de certitude des observations ainsi que des résultats qu'on en déduit : ce sera l'objet de la théorie des erreurs, qui formera notre conclusion.

CHAPITRE X.

GÉOGRAPHIE ET NAVIGATION.

143. — Projections des cartes.

Le mot de projection s'applique à tous les canevas de cartes géographiques. Mais, si l'on en excepte les projections perspectives (stéréographique, gnomonique, etc.) dont la projection orthogonale est un cas particulier, il ne garde plus son sens géométrique; on peut définir un canevas de carte comme la combinaison de deux systèmes de lignes, dont l'un représente les méridiens, l'autre les parallèles, et qui sont d'ailleurs parfaitement arbitraires (1).

On peut se donner à volonté l'un des deux systèmes, les méridiens par exemple, et s'imposer une condition déterminée pour définir le système des parallèles.

Ce serait sortir de notre sujet que de vouloir étudier ou seulement mentionner les nombreux types de projections qui ont été proposés, et parmi lesquels le cartographe choisira, en se guidant d'après le but auquel son travail est destiné, d'après l'étendue de la carte, d'après la position géographique et la forme du pays exploré. On peut consulter les livres spéciaux, parmi lesquels nous signalons l'Ouvrage de M. Germain, intitulé : *Traité des projections des cartes géographiques*.

Nous ne ferons d'exception qu'en faveur des systèmes sur lesquels on peut effectuer des constructions géométriques, savoir : la projection de Mercator ou des cartes marines, sur laquelle les longitudes, latitudes et azimuts se portent de la manière la plus simple, et qui se trouve par là le mieux appropriée à la détermination graphique

(1) On peut même généraliser davantage en définissant les points de la sphère par l'intersection de deux systèmes de courbes quelconques tracées sur sa surface et qui seront représentées sur les projections par deux autres systèmes de lignes arbitrairement choisies.

des points, et les projections stéréographique et gnomonique, qui se prêtent bien à la résolution graphique de certains problèmes concernant la sphère.

144. — Projection de Mercator ou carte réduite.

La direction suivie en Navigation est la *route*, déterminée par le *cap* du navire, c'est-à-dire par l'azimut de son plan médian longitudinal, tel qu'on le déduit de l'observation de la boussole ou du relèvement d'un point extérieur. L'idée qui s'est présentée la première a été d'avoir toujours le même cap pour une même traversée : on est ainsi conduit à parcourir une ligne définie par la condition de faire un angle constant donné avec les méridiens successifs. Pour tracer le plus simplement possible une pareille ligne sur la carte, il conviendra de la représenter par une droite. Tous les méridiens devant faire le même angle avec cette ligne dont ils sont des cas particuliers répondant à l'angle de route nul, on sera amené à les représenter par des droites parallèles entre elles, faisant, en projection, l'angle donné avec la route. Aucun méridien ne se distinguant physiquement ni astronomiquement des autres, on les fera équidistants entre eux. Le problème se pose donc ainsi :

Les méridiens étant représentés par une série de droites parallèles et équidistantes entre elles, on se propose de figurer par une droite la route qui fait des angles égaux avec tous les méridiens : déterminer le système de lignes qu'il faut adopter pour représenter les parallèles terrestres.

Ceci revient évidemment d'abord à chercher un système de projection dans lequel les angles soient conservés, ceux du moins que font entre eux des éléments de courbes tracées sur la sphère et partant d'un même point. Il suffit en effet de se rappeler que l'angle de deux directions est la somme ou la différence des angles qu'elles font avec le méridien de leur point de concours.

On voit immédiatement aussi que si ce système est trouvé, un parallèle quelconque, devant faire avec chaque méridien un angle droit, sera représenté par une droite normale à la direction constante des méridiens : la condition de conserver les autres angles nous fournira l'espacement de ces droites, et le système de projection sera déterminé.

La ligne qui coupe tous les méridiens sous un angle constant est appelée la *loxodromie* : cherchons son équation sur la sphère.

A cet effet, considérons le triangle infiniment petit *bac* : soit $A = baN$ le supplément de l'azimut de la direction *ba* : on a

$$\overline{bc} = -\overline{ac}\tang A = -m\overline{ac}$$

si $b'c'$ est l'arc d'équateur compris entre les méridiens de b et de a, et si λ est la colatitude de a, on aura

$$\overline{bc} = \overline{b'c'}\sin\lambda.$$

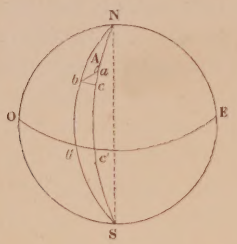
D'ailleurs, désignant par G la longitude (¹), et par r le rayon de la sphère, $b'c'$ est la différence de longitude dG entre a et b, et l'on a

$$\overline{b'c'} = r\,dG.$$

De même

$$\overline{ac} = r\,d\lambda.$$

Fig. 58.



On tire de là

$$(1) \qquad r\,dG\sin\lambda = -m\,r\,d\lambda, \qquad dG = -m\frac{d\lambda}{\sin\lambda},$$

et en intégrant

$$(2) \qquad G = m\,\mathrm{Log}\cot\tfrac{1}{2}\lambda + \text{constante}.$$

Si nous prenons les G pour abscisses, ce qui arrive dans le système de projection adopté, il suffira de prendre $\mathrm{Log}\cot\frac{1}{2}\lambda$ pour ordonnée, pour que cette équation représente une droite faisant un angle A avec l'axe de y.

(¹) Nous représentons de préférence par L la longitude comptée en temps et par G la longitude évaluée en arc.

Les degrés des parallèles auront, en vertu du tracé des méridiens, une longueur constante : à l'équateur un degré de latitude est égal au degré de longitude, et les degrés de méridien ou de colatitude vont en croissant depuis l'équateur jusqu'aux pôles où ils deviennent infinis. De là le nom de *latitudes croissantes* donné à l'échelle parallèle aux méridiens.

Sur cette projection, le triangle bac sera remplacé par un triangle semblable $\beta\alpha\gamma$, et l'angle $\beta\alpha\gamma$ égal à bac aura pour tangente m, ce qui montre la conservation des angles et la similitude des figures infiniment petites.

145. — Influence de l'aplatissement.

Les considérations qui précèdent supposent la Terre sphérique. Si l'on veut tenir compte de l'aplatissement, il faut remplacer $\frac{bc}{b'c'}$ par $\frac{\rho' \sin\lambda}{a}$, et $r d\lambda$ par $\rho d\lambda$ en appelant ρ' la grande normale, a le grand axe du méridien, ρ son rayon de courbure.

On sait que

$$\rho' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}}, \qquad \rho = \frac{\rho'^3}{a^2}(1 - e^2).$$

Le rayon du parallèle est égal à $\rho' \sin\lambda$, et l'élément du méridien à $\rho d\lambda$.

L'équation (1) est donc remplacée par

$$\rho' \sin\lambda \, dG = -\rho m d\lambda.$$

Des valeurs de ρ, ρ' on tire

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2\lambda}.$$

Développant $(1 - e^2 \cos^2\lambda)^{-1}$, effectuant les opérations et supprimant les termes en e^4,

$$\frac{\rho}{\rho'} = 1 + e^2 \cos^2\lambda - e^2 = 1 - e^2 \sin^2\lambda,$$

donc

$$dG = -\frac{m \, d\lambda}{\sin\lambda} \frac{\rho}{\rho'} = -m \left[\frac{d\lambda}{\sin\lambda} - e^2 \sin^2\lambda \, d\lambda \right].$$

La loxodromie restera donc encore droite en projection, en modifiant l'échelle des latitudes croissantes d'après la formule

$$G = m \operatorname{Log} \cot \tfrac{1}{2}\lambda - me^2 \cos\lambda + \text{const.},$$

puisque son équation sera de la forme $x = my +$ constante.

Pour effectuer les calculs en se servant des logarithmes vulgaires, il faut diviser par le module M, et par $\sin 1'$ afin d'exprimer les arcs de latitudes croissantes en minutes de l'équateur, et comme $\frac{1}{M \sin 1'} = 7915',705$, on aura en définitive :

Pour le cas de la sphère,

$$y = 7915',705 \quad \log \cot \tfrac{1}{2}\lambda,$$

et quand on tient compte de l'aplatissement,

$$y = 7915',705 \quad \log \cot \tfrac{1}{2}\lambda - 3438' e^2 \cos\lambda ;$$

y représente donc le nombre de minutes équatoriales ou de longitude, qui sont notre unité de mesure dans le cas actuel, comprises entre l'équateur, pour lequel $y = 0$, et le parallèle correspondant à la colatitude λ.

On a construit des Tables d'après ces formules. On trouve dans les dernières éditions des Tables de logarithmes de Callet une Table des latitudes croissantes pour la Terre supposée sphérique. Les Tables de Mendoza, reproduites dans le *Traité de Géodésie* de Bégat, sont calculées avec un aplatissement $\frac{1}{321}$; M. Germain en donne d'autres dans son *Traité d'Hydrographie,* avec l'aplatissement $\frac{1}{294}$. La formule ci-dessus fournira le moyen de corriger aisément les Tables calculées avec un aplatissement erroné. Nous rappelons que l'aplatissement α et l'excentricité e sont liés par la relation

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

La formule peut aussi servir à passer des valeurs calculées pour un aplatissement nul à celles qui correspondent à un aplatissement quelconque, et inversement, à retrouver les valeurs qui conviennent à l'aplatissement nul, ou à la Terre considérée comme sphère. On a besoin de ces dernières toutes les fois que les latitudes croissantes, au lieu d'être destinées à dresser la projection d'une carte, n'ont d'autre usage que de servir d'intermédiaires dans les calculs.

146. — Projection polaire orthomorphe.

La projection de Mercator ne peut pas servir à représenter les régions polaires : pour $\lambda = 0$, $\cot\frac{1}{2}\lambda$ devient infini.

Pour ces régions, on adopte de préférence une projection dont le pôle occupe le centre; les méridiens sont figurés par des rayons issus du pôle, et les parallèles par des cercles concentriques. On trouve facilement les conditions pour qu'une pareille projection soit orthomorphe, c'est-à-dire pour que les angles y soient conservés.

Pour réaliser la similitude des trapèzes infinitésimaux sur la sphère et sur la projection, représentons par ρ et ω les coordonnées polaires de cette dernière, nous aurons

$$\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{d\lambda}{d\mathrm{G}\sin\lambda}.$$

On exprimera la convergence des méridiens et leur espacement égal en écrivant

$$d\omega = n\, d\mathrm{G},$$

n étant une constante. L'équation devient alors

$$\frac{1}{n}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda},$$

et l'intégrale est

$$\frac{1}{n}\operatorname{Log}\rho = \operatorname{Log}\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$$

ou encore

$$\rho = \operatorname{tang}^n\frac{\lambda}{2}.$$

Pour que les angles soient conservés au pôle même, il faut faire $n = 1$.

La loxodromie n'est plus une droite puisque les méridiens convergent : elle a pour équation

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho},$$

d'où, en posant $\operatorname{tang} V = m$ et représentant par A une constante arbitraire,

$$\rho = AE^{\frac{\omega}{m}}.$$

C'est une spirale logarithmique. La loxodromie est d'ailleurs une spirale sur la sphère.

Cette projection n'a plus les avantages de simplicité qui caractérisent celle de Mercator : cette dernière suffit largement dans toutes les mers navigables.

147. — Projection stéréographique. Ses propriétés géométriques.

Parmi les projections orthomorphes, la projection stéréographique étant une vraie perspective, est celle qui se prête le mieux aux constructions géométriques.

Pour projeter un hémisphère, on choisit pour plan du tableau le plan diamétral qui limite cet hémisphère, et pour position de l'œil, celui des pôles de ce grand cercle qui est situé dans l'hémisphère opposé. Le cercle de base étant représenté en vraie grandeur sur le tableau, les perspectives de tous les points de l'hémisphère qui contient le point de vue sont extérieures à ce cercle, et celles des points de l'hémisphère opposé sont contenues dans son intérieur.

Nous allons faire voir que ce mode de projection est effectivement orthomorphe, c'est-à-dire que si l'on construit la perspective de deux courbes de la sphère passant par un point donné, l'angle des tangentes aux perspectives à leur point d'intersection est le même que celui que font entre elles les tangentes aux courbes elles-mêmes. Prenons pour plan de la figure le plan diamétral passant par le point de vue V et le point donné M de la sphère. Le plan du tableau sur lequel se fait la perspective est perpendiculaire au plan de la figure et s'y projette suivant un diamètre TT'.

Le plan tangent à la sphère en M se projette aussi suivant une droite MA, et son intersection par le plan du tableau, en un seul point A. Si l'on rabat le plan du tableau autour de TT' sur celui de la figure, cette intersection prendra la position AB, tandis que la perspective m de M restera en m.

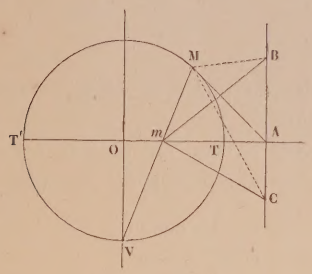
Soient MA et MB les tangentes à deux courbes tracées en M, les tangentes à leurs perspectives seront les perspectives mC et mB des tangentes.

Or il est aisé de voir que les triangles MBC de l'espace et mBC de la perspective, qui ont même base et dont les hauteurs ont le même pied A, sont égaux comme ayant même hauteur.

En effet, le triangle MAm est isoscèle, puisque les angles M et m ont chacun pour mesure $\frac{1}{2}(90° + \text{MT})$. Il en résulte que l'angle BMC de l'espace est égal à BmC. C. Q. F. D.

On déduit de là que la perspective d'un cercle tracé sur la sphère

Fig. 59.



est elle-même un cercle. Considérons, en effet, le cône circonscrit à la sphère et ayant pour base le cercle donné : ses génératrices sont normales à ce cercle, leurs perspectives doivent donc être normales à la perspective du cercle ; ces perspectives passent toutes par la perspective du sommet et forment un faisceau de droites convergentes, dont la trajectoire orthogonale doit être elle-même un cercle.

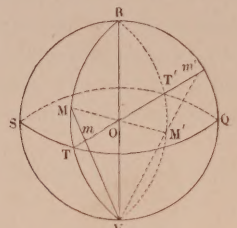
Les méridiens et les parallèles ont donc pour perspectives des cercles.

Tout grand cercle passant par le point de vue a pour perspective un diamètre du tableau. Les autres grands cercles coupent le tableau suivant un diamètre, et leur perspective passe nécessairement par les extrémités de ce diamètre.

Cette projection permet de résoudre un grand nombre de problèmes sur les positions relatives des points : les directions sont connues en vertu du principe de la conservation des angles ; les

distances aussi s'obtiennent facilement. Étant données les perspectives de deux points, pour trouver leur distance mesurée sur le grand cercle, il faut commencer par construire la perspective du grand cercle qui les contient. Pour cela, proposons-nous de déter-

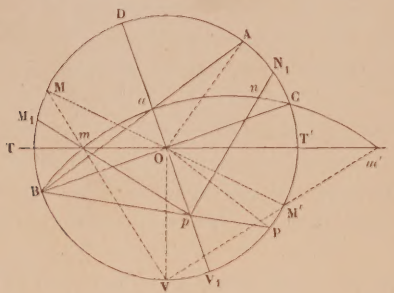
Fig. 60.



miner la perspective du point M′ diamétralement opposé à l'un des points donnés M.

L'angle des rayons visuels VM et VM′ est droit, puisqu'il est inscrit dans une demi-circonférence. Le plan du grand cercle

Fig. 61.



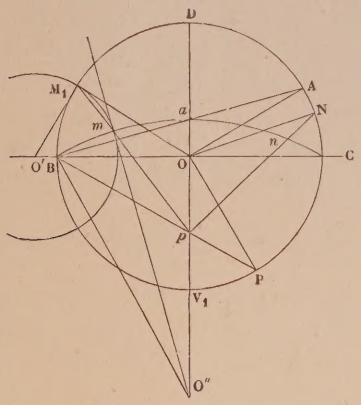
MVM′ est perpendiculaire au tableau, sur lequel sa perspective est TT′. Si donc on le rabat sur le tableau autour de TT′, la perspective m reste immobile, le point de vue se rabat en V sur la perpendiculaire menée à Om par le centre, le rayon perspectif Vm' se rabat donc suivant une perpendiculaire à mV, et m' est la perspective du point diamétralement opposé à m. La perspective de tout grand cercle passant par m passe aussi par m' : et si l'on se

donne la perspective n d'un autre point, le grand cercle MN aura pour perspective un cercle passant par m, n, m', qu'il sera facile de construire, puisqu'on en connaît trois points.

Pour avoir la vraie grandeur de l'arc MN, remarquons que si l'on connaissait le pôle de ce grand cercle, l'arc cherché serait la mesure du dièdre formé par les plans diamétraux passant par ce pôle et par M et N. Le diamètre suivant lequel le grand cercle MN coupe le tableau est BC.

Par le point de vue menons un plan diamétral perpendiculaire

Fig. 62.



à celui du grand cercle MN : l'intersection de ces plans a pour perspective $Da V_1$. Rabattons maintenant ce plan autour de sa perspective : le point de vue vient en B, et le point qui a pour perspective a, en A : AO est la trace du grand cercle MN sur le plan DAO, et OP perpendiculaire à OA donnera la position P du pôle rabattu. La perspective de ce pôle sera donc obtenue en joignant P à B; elle doit se trouver sur la trace du plan perpendiculaire au grand cercle MN, ce qui la place en p.

Cela posé, soit à déterminer la longueur d'un arc de grand cercle projeté en mn. Décomposons cet arc en deux, ma et an (*fig.* 62), séparés par le grand cercle qui, passant par le pôle, a pour perspective une droite pOD, et occupons-nous de la portion ma. Si l'on considère le grand cercle mn comme faisant partie d'un système

de méridiens, ayant pour pôles B et C, et par suite pour équateur le grand cercle DOp, la distance angulaire ma aura pour mesure l'arc du méridien M_1D compris entre cet équateur et le parallèle du point M.

Soient O′ le centre de la perspective de ce parallèle, O″ le centre de la perspective du grand cercle donné B*man*C.

En se reportant aux propriétés que nous avons établies, on voit :

1° Que ces deux cercles se coupent orthogonalement en m, de sorte que chacun des rayons aboutissant en m est respectivement tangent à l'autre cercle ;

2° Que le rayon OM_1 est perpendiculaire à $O'M_1$.

La construction que nous avons faite pour trouver le pôle p nous permet de calculer la distance pO. Si l'on compte les longitudes à partir de BOC, l'angle OBO″ est égal au complément de la longitude de B*man*C. Il en est de même de COP, donc OBP moitié de COP est égal à la moitié de OBO″, et BP est la bissectrice de ce dernier angle. On a donc, en vertu de la propriété connue,

$$pO = \frac{OB \times pO''}{BO''}$$

Je dis maintenant qu'en joignant M_1m et le prolongeant jusqu'à la rencontre de DO, on tombera pareillement sur le point p.

En effet, soient $OM_1p = \chi$, $M_1OD = \varphi$. On a dans le triangle M_1OP

$$\frac{pO}{OM_1} = \frac{\sin\chi}{\sin(\varphi - \chi)},$$

et dans le triangle pmO'', dont l'angle en m est égal à χ puisqu'il a pour mesure $\frac{1}{2}M_1m$, et $mpO'' = 180^\circ - (\varphi - \chi)$,

$$\frac{pO''}{mO''} = \frac{\sin\chi}{\sin(\varphi - \chi)},$$

d'où

$$pO = \frac{OM_1 \times pO''}{mO''},$$

ce qui est identique avec l'expression précédente, tirée de la construction du pôle p, puisque $OB = OM_1$ comme rayon d'un même cercle, et $mO'' = BO''$ pour la même raison. La droite M_1m passe donc par le pôle du cercle mn.

De là cette construction simple :

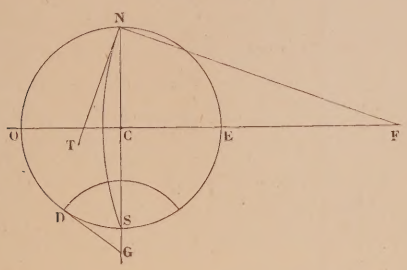
Pour obtenir la valeur angulaire de la distance *ma*, joignez le pôle du grand cercle *man* au point *m*; et prolongez jusqu'à la rencontre du cercle du tableau en M_1; l'arc M_1D ou l'angle M_1OD sera l'angle cherché. En mesurant de même l'arc *an*, on trouvera que l'arc *man* est mesuré par M_1DN ou par l'angle M_1ON.

148. — Construction du canevas stéréographique.

On peut appliquer la projection stéréographique soit à la représentation d'un hémisphère complet, soit à celle d'une portion plus limitée de la surface. Nous ne nous occuperons que du premier cas. Prenons d'abord pour plan de perspective un méridien : le point de vue sera le pôle de ce méridien, et sera situé sur l'équateur. Le méridien perpendiculaire au tableau sera projeté suivant le diamètre vertical NS, l'équateur suivant le diamètre horizontal EO. Prenons comme méridien initial de longitude 0° le méridien central NS.

Les centres des circonférences qui représentent les perspectives

Fig. 63.

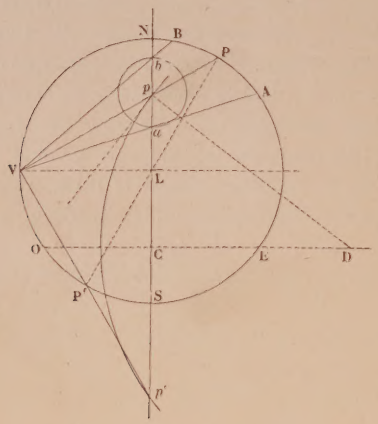


des autres méridiens sont tous situés sur EO. En vertu du principe de la conservation des angles, la tangente en N à la perspective d'un méridien de longitude G doit faire un angle G avec NS : le rayon de la perspective fait donc un angle $90° - G$ avec cette même droite NS; et si l'on trace NF tel que $CNF = 90° - G$, F sera le centre et NF le rayon de la perspective, qui se construit aisément.

Les centres des perspectives des parallèles sont sur NS. Pour tracer le parallèle de colatitude λ, on porte $ND = \lambda$ sur la circonférence. On mène DG tangente au cercle; G sera le centre et GD le rayon du parallèle: il est aisé de voir en effet que le cercle ainsi tracé est le seul qui satisfasse à la condition de couper à angles droits les méridiens de 0° et de $\pm 90^\circ$ et d'avoir pour colatitude λ.

On peut encore faire la projection sur l'horizon d'un lieu L, c'est-à-dire prendre pour plan de projection le plan diamétral

Fig. 64.



parallèle à cet horizon. Le méridien du lieu donné sera représenté par le diamètre vertical NS, et la perspective de ce point sera le centre L. En rabattant sur la figure autour de sa perspective le grand cercle qui a NS pour trace, le point de vue vient en V et l'on voit sans peine que si NP est la latitude du lieu donné, p sera la perspective du pôle nord.

Les parallèles seront des cercles ayant leur centre sur NS. Celui dont la colatitude est λ se construira en prenant $PA = PB = \lambda$, les perspectives a et b de ces points déterminent le diamètre du parallèle (dont le centre n'est pas en p).

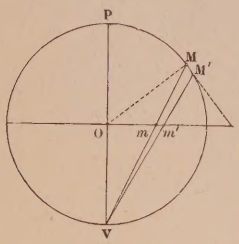
Les méridiens doivent passer en perspective par les perspectives p et p' des pôles nord et sud: leurs centres sont donc sur OCE perpendiculaire au milieu de pp'. On obtiendra la tangente en p à un

méridien donné, en faisant avec pp' un angle égal à la longitude de ce méridien comptée de L et menant une perpendiculaire à cette tangente : ou plus simplement en menant directement une droite faisant avec pp' un angle égal au complément de la longitude : l'intersection de cette droite avec OE donne le centre cherché D, et le rayon est Dp.

Si les angles sont conservés dans cette projection, il n'en est pas de même des rapports de longueur et par conséquent de surface.

Soit M un point de la surface, situé à une distance angulaire λ du point central P. Par le point de vue menons le grand cercle

Fig. 65.



passant par M et prenons-le pour plan de la figure. Un petit cercle infinitésimal de rayon $d\lambda$, et ayant pour centre M, se projettera suivant un autre petit cercle, et puisque nous le supposons infiniment petit, le sommet du cône circonscrit sera sur la sphère, en M, à un infiniment petit du deuxième ordre près : le petit cercle a donc pour centre la perspective m de M et pour rayon la perspective mm' de $MM' = d\lambda$, le rayon du grand cercle étant égal à 1.

Comme $PVM = \frac{1}{2}\lambda$, $Om = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda$, d'où en différentiant par rapport à λ,

$$mm' = dOm = \frac{d\lambda}{2\cos^2\frac{1}{2}\lambda}$$

et

$$\frac{MM'}{mm'} = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda .$$

Ce rapport est égal à 2 pour $\lambda = 0$ et à 1 pour $\lambda = 90^\circ$. Les distances sont donc conservées sur le bord de la carte, et réduites de moitié au centre : ce qui correspond au rapport $\frac{1}{4}$ des surfaces.

149. — Projection gnomonique.

On donne ce nom à une projection perspective obtenue en prenant pour point de vue le centre de la Terre et pour plan du tableau un plan tangent. C'est une des plus anciennes projections connues. La grandeur des déformations, tant des distances que des angles, et la nécessité de plusieurs plans de projection (quatre au moins) pour représenter toute la sphère en ont empêché l'application à la cartographie. Mais son caractère de projection géométrique la rend propre à la solution simple de quelques problèmes. Les plans des grands cercles de la sphère passant tous par le centre et coupant le plan tangent suivant une droite, les projections de ces grands cercles sont des droites : le tracé de l'arc de grand cercle est donc des plus simples.

On a fait l'application de ce mode de projection à la Navigation par arc de grand cercle. M. Hilleret a construit trois cartes des grands océans en prenant pour plan du tableau un plan tangent en un point de l'équateur. L'équateur étant représenté par une droite, les méridiens sont des droites perpendiculaires à l'équateur. Les rayons perspectifs d'un parallèle forment un cône de révolution ayant pour axe l'axe de la Terre, c'est-à-dire une droite parallèle aux plans tangents à l'équateur : les sections par ces plans tangents sont donc des hyperboles. Si l'on prend pour origine des longitudes le point de contact, la distance d'un méridien de longitude G au méridien central est égale à

$$x = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{G},$$

R étant le rayon de la sphère à l'échelle de la carte. Le point de latitude L, situé sur ce méridien est à une distance

$$y = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{L}}{\cos \mathrm{G}} \quad (^1)$$

(¹) En élevant ces deux équations au carré et éliminant G, on obtient l'équation du parallèle de latitude L

$$y^2 - x^2\,\mathrm{tang}^2\,\mathrm{L} = \mathrm{R}^2\,\mathrm{tang}^2\,\mathrm{L}.$$

Elle représente bien une hyperbole ayant pour axes l'équateur et le méridien o.

de l'équateur. Ces relations permettent de construire la projection. En traçant des méridiens et des parallèles très rapprochés, on obtient un canevas sur lequel on peut relever autant de points que l'on veut de la droite représentative de l'arc de grand cercle entre deux lieux : en prenant ces points par longitude et latitude, et les transportant sur la carte de Mercator, on peut les réunir par une courbe continue, et avoir très simplement l'arc de grand cercle.

150. — Problèmes généraux de Géographie et de Navigation.

La construction des cartes géographiques ou hydrographiques et l'emploi qu'on en fait reposent sur les mêmes principes, et reviennent en définitive à un seul et même problème : déterminer la position d'un point sur la carte. Ce point peut être déterminé d'une manière absolue, ou rattaché à d'autres points. La détermination absolue se fait par les méthodes que l'on sait, à terre aussi bien que sur mer : on peut dire que, d'une façon générale, les problèmes de Géographie et ceux de Navigation sont les mêmes. Les procédés employés pour placer un navire quand on est en vue d'une côte, ou pour faire une carte topographique de cette côte, dépendent des mêmes principes géométriques que la construction d'une carte terrestre. L'analogie se poursuit encore beaucoup plus loin, et il n'y a pas loin de l'estime des routes en mer à la détermination d'un itinéraire géographique.

Il est tout naturel de placer un point sur la carte par les coordonnées géographiques, longitude et colatitude, qui définissent sa position à la surface du globe. Cela l'est d'autant plus que, d'après ce que nous avons développé, il y a tout intérêt, au point de vue de la précision, à séparer ces deux déterminations et à effectuer chacune d'elles dans les circonstances les plus favorables, c'est-à-dire aux époques où les erreurs d'observation et autres, qui peuvent affecter le résultat, exercent sur celui-ci le minimum d'influence.

Il peut se présenter toutefois des conditions telles qu'on n'ait pas le loisir nécessaire pour procéder ainsi. Il arrivera aussi que ce soit moins de la position absolue complète qu'on ait besoin que d'une des coordonnées, ou d'une fonction des coordonnées.

En cours de navigation, par exemple, pour faire le passage entre deux dangers, ce qui importe ce n'est pas de connaître la longitude

ou la latitude à un moment donné, mais de savoir si l'on suit bien l'axe de la passe, ou de combien on s'en écarte d'un bord ou de l'autre. Pour placer un point inaccessible au moyen de relèvements pris de deux stations, il n'est pas nécessaire que ces stations soient elles-mêmes exactement placées, pourvu que les droites dont l'intersection doit fixer le point inconnu soient bien déterminées en direction et en position sur la carte.

D'une façon générale, un point se construit sur la carte par l'intersection de deux lignes qui sont ses lieux géométriques. La définition du point par sa longitude et sa latitude correspond au cas particulier où ces lieux sont le méridien et le parallèle. Mais il en existe une infinité d'autres. On a vu que la mesure de la distance zénithale d'un astre, combinée avec la connaissance de l'heure du premier méridien, fait connaître un petit cercle de la sphère terrestre, auquel on réserve plus particulièrement la dénomination de *lieu géométrique* du point. La connaissance de l'azimut d'un point terrestre déjà placé nous donne un autre lieu, qui n'est autre qu'un grand cercle de la sphère, déterminé par l'angle qu'il fait avec un méridien. Un angle pris entre deux points connus de position permet aussi de tracer un lieu, qui n'est autre que le segment de cercle capable de cet angle et passant par les deux points.

Il importe au marin et au voyageur d'avoir présentes à l'esprit toutes les manières possibles de trouver un lieu, afin, dans chaque cas particulier, de choisir le plus convenablement la combinaison la plus avantageuse.

Un lieu quelconque étant toujours affecté d'une certaine erreur, il est facile de voir qu'en principe l'intersection de deux lignes données placera le point avec d'autant plus d'exactitude que l'angle sous lequel elles se coupent sera plus voisin d'un droit. Plus l'intersection sera aiguë, plus l'incertitude sera augmentée.

Il résulte des considérations qui précèdent qu'il n'y a aucun intérêt à séparer la Géographie de la Navigation : tout au plus les méthodes diffèreront-elles légèrement selon qu'il s'agira de faire une carte ou de se servir d'une carte faite. La distinction la plus importante à établir est celle entre les méthodes rigoureuses et les méthodes approchées, c'est-à-dire entre les observations astronomiques et l'estime.

151. — Navigation à l'estime. Extension aux voyages par terre.

La *route* d'un navire, on s'en souvient, est l'azimut du chemin parcouru. Si le navire ne subissait aucun déplacement latéral, la route serait la même chose que le *cap* qui se définit : l'azimut de la section longitudinale verticale du bâtiment pour un observateur placé à l'arrière et regardant l'avant. Mais des actions diverses empêchent qu'on ne suive exactement la loxodromie définie par cet azimut. D'abord l'action du vent de travers, qui agit latéralement et produit la *dérive*. La dérive est l'angle que le chemin réellement parcouru dans l'eau, supposée immobile, fait avec le cap. Cet angle se compte du cap vers la gauche ou la droite : dérive à bâbord et dérive à tribord.

De plus, l'eau de la mer n'est jamais en repos complet : le chemin absolu parcouru par le bâtiment, ce qu'on appelle la route *sur le fond,* diffère donc de celui qui résulte de son mouvement relatif quand on suppose l'eau immobile. La route sur le fond doit être considérée comme la route vraie, dont dépendent le départ et l'arrivée.

La route s'évalue généralement au compas. Le *compas* est une boussole, et la route au compas est celle qui donne l'observation. Pour rapporter cette route au méridien terrestre, il faut connaître l'angle que fait la ligne des pôles de l'aiguille avec la ligne nord-sud géographique. Cet angle appelé *variation* est la somme algébrique de la déclinaison et de la déviation. La *déclinaison* de l'aiguille est l'azimut de sa pointe sud (¹) sous l'influence magnétique de la Terre. Cette force n'est pas seule à agir sur l'aiguille : le fer qui entre dans la construction ou dans le chargement du navire produit sur elle une attraction locale, variable avec le cap et avec le lieu où l'on se trouve, variable pour les différents compas d'un même navire. La *déviation* est l'angle que fait l'aiguille avec le méridien magnétique du lieu considéré. On est convenu de

(¹) Ou ce qui revient au même, l'angle dont sa pointe nord est déviée de la partie du méridien dirigée vers le Nord, ce qui est la définition usuelle dans la marine. On distingue la déclinaison selon le sens de la déviation : Déclinaison N.-E. si la pointe nord est à l'Est du méridien du centre; N.-O., si cette pointe est à l'Ouest.

compter la déclinaison, la variation et la déviation positivement du Nord vers l'Est.

La variation se détermine directement par l'observation de l'azimut astronomique. Pour cela, le compas de variation ou compas de relèvement est muni d'une pinnule que l'on dirige sur l'astre à observer. A l'instant où l'astre est visé dans le plan vertical de la pinnule, on lit la graduation de la rose qui correspond à cette direction. On note l'heure de l'observation ou l'on détermine la hauteur de l'astre; l'une ou l'autre de ces données permet de calculer son azimut (§ 115 et § 116).

Dans la marine, on a conservé l'usage de compter les azimuts de 0° à 90° en partant des points cardinaux du méridien : cela complique les calculs; on aurait tout avantage à adopter la numération de 0° à 360°. Il convient toujours de faire cette transformation pour le calcul. Supposons, par exemple, qu'on ait relevé un astre au Nord 36° Ouest; cela veut dire que son azimut au compas est égal à 144°. Si le calcul donne son azimut astronomique égal à 120°, il en résultera que la variation est — 24° ou 24° N. O.

Quand on observe le Soleil, au lieu de le viser, on peut se servir de l'ombre du fil ou d'un style, dont l'azimut est alors de 180° plus grand ou plus petit que celui de l'astre.

Si l'on sait d'avance que la déclinaison au lieu considéré est de 15° N. O., il en résulte que la déviation est $24° - 15° = 9°$ N. O. On fera bien, tant qu'on n'aura pas acquis une grande pratique de ces transformations, de s'aider d'une figure.

Si l'on désigne par θ le cap magnétique vrai, c'est-à-dire affecté de la déclinaison, mais exempt de l'effet de l'attraction locale; par θ' le cap au compas, c'est-à-dire le cap apparent, par δ la déviation, on a, en comptant ces quantités positivement du Nord vers l'Est et d'une façon continue de 0° à 360°,

$$\delta = \theta - \theta'.$$

δ est la correction du cap erroné pour avoir le cap magnétique vrai. La détermination des déviations est l'objet de la *régulation des compas,* sur laquelle nous ne saurions nous étendre ici. Disons seulement que les déviations sont représentées avec une approximation suffisante en pratique par la formule

$$\delta = A + B \sin\theta' + C \cos\theta' + D \sin 2\theta' + E \cos 2\theta'$$

dans laquelle A est la déviation constante, B et C les coefficients de la déviation semi-circulaire, D et E les coefficients de la déviation quadrantale. Celle-ci est due au magnétisme induit dans le fer doux par la composante horizontale de la force terrestre : la déviation semi-circulaire résulte de la combinaison des actions produites par l'induction du fer doux vertical par la Terre, et par le magnétisme plus ou moins permanent de certaines pièces de fer imparfaitement doux. On peut calculer les coefficients de cette formule en observant les valeurs de δ qui correspondent à un certain nombre de valeurs de θ', il faut pour cela faire évoluer le navire et observer à différents caps son azimut astronomique et son cap au compas. Il faut de plus connaître la déclinaison locale et en déduire les caps magnétiques vrais, dont la combinaison avec les caps au compas donne la déviation. On peut construire des Tables de ces déviations, ou les représenter par une courbe. Les coefficients A, D, E sont des constantes absolues pour un compas donné; B et C varient, au contraire, quand, au cours de la traversée, on arrive dans des régions où l'inclinaison et la force horizontale changent elles-mêmes.

L'azimut astronomique se déduit d'observations astronomiques ou de relèvements pris sur des points de terre. On a vu plus haut l'usage de la pinnule. On peut aussi déterminer l'azimut de l'avant du navire en notant un point dans cette direction, et mesurant sa distance angulaire au Soleil en même temps que la hauteur de celui-ci : on trouve alors l'azimut par la méthode du Paragraphe 116.

Nous donnerons plus loin (§ 171) une méthode de calcul des coefficients de la formule ci-dessus.

L'observation du cap et de la dérive permet de calculer l'azimut de la direction apparente de la route du navire. Pour connaître son déplacement, il faut encore savoir la vitesse de ce déplacement. La vitesse apparente ou le *sillage* se mesure au moyen du *loch*. L'instrument ordinairement employé se compose d'un *bateau de loch*, planchette en forme de secteur circulaire, lestée de plomb à son pourtour pour la faire tenir de champ et subir ainsi une grande résistance de la part de l'eau, et d'une ligne en filin de chanvre, divisée en *nœuds* dont chacun correspond à une vitesse de 1 mille = 1852 mètres par heure : on observe la durée au moyen d'un

sablier ou d'une montre à secondes. La longueur du nœud dépend de la durée d'écoulement du sablier : pour un sablier de 15^s par exemple, c'est à dire de $\frac{1}{240}$ d'heure, la longueur du nœud serait de $\frac{1852^m}{240} = 7^m,7$ (en pratique on prendrait $7^m,3$ pour tenir compte de l'entraînement et de la vitesse de l'eau dans le sillage). Le nombre de nœuds filés donne la vitesse en milles à l'heure (¹). On emploie aussi d'autres systèmes pour évaluer la vitesse du navire : citons le loch à hélice de Massey, le loch électrique à moulinet du Commandant Fleuriais : sur les bâtiments à hélice on arrive à une estimation suffisante en comptant le nombre des tours d'hélice et multipliant par un coefficient que l'expérience fait connaître.

L'estime est un moyen d'évaluation fort imparfait : abstraction faite du peu de précision des appareils employés, compas et loch, elle est affectée de tout l'effet des courants plus ou moins inconnus qui agissent sur le navire. Il est donc indispensable de vérifier fréquemment sa position par des observations astronomiques : c'est ce qui constitue la partie la plus importante de la Navigation. Néanmoins, dans les limites de la précision nécessaire, l'estime appliquée à de courts intervalles de temps, 4^h ou 5^h, donne des résultats suffisamment exacts pour qu'on puisse s'en servir pour déterminer une position approximative, que l'on corrigera par les observations astronomiques, ou encore pour relier entre elles et rapporter à un même lieu des observations faites à petits intervalles. On peut la perfectionner par la connaissance des courants, qui d'ailleurs sont eux-mêmes étudiés, en comparant le point estimé au point observé. Néanmoins, avec d'excellentes observations, l'estime peut encore donner des erreurs de 10 milles et plus par jour, abstraction faite des courants, dont l'effet peut tripler et quadrupler cette erreur.

Le compas ne donne la route qu'à un degré près, dans les circonstances les plus favorables : la vitesse estimée est à peine connue à $\frac{1}{30}$ près de sa valeur : il est donc inutile d'employer des procédés très précis pour la réduction des routes.

Le quartier de réduction offre un moyen pratique très simple. En principe, on considère la route faite comme l'hypoténuse d'un

(¹) L'expression : filer 6 nœuds à l'heure est impropre; on dit : filer 6 nœuds, ou filer 6 milles à l'heure.

triangle rectangle rectiligne, l'un des angles aigus est l'angle de route, compté de 0° à 90°, comme on l'a vu, à partir du méridien. Le chemin s'évalue en milles, c'est-à-dire en une unité qui est l'arc de 1′ du méridien à la latitude de 45° : on suppose d'ailleurs la Terre sphérique, et cette longueur représentera partout la minute de longitude équatoriale et la minute de latitude. On projette le chemin parcouru sur le méridien et le parallèle du point de départ, supposés représentés par deux droites, comme cela arrive sur la projection de Mercator.

Soient V l'angle de route, C le chemin parcouru, λ la colatitude, on a alors

$$\text{Chemin Nord-Sud} = C\cos V = \text{changement de colatitude},$$
$$\text{Chemin Est-Ouest} = C\sin V,$$
$$\text{Changement de longitude} = \frac{C\sin V}{\sin\lambda}.$$

Au lieu de donner des signes aux routes, on les désigne par les dénominations Nord, Sud, Est, Ouest.

C étant exprimé en milles, les changements ci-dessus en colatitude et longitude se trouvent exprimés en minutes de degré : on les combinant par voie d'addition ou de soustraction, suivant leur sens, avec les coordonnées géographiques du point de départ, on obtient celles du point d'arrivée.

Des Tables de point construites d'avance donnent pour diverses valeurs de C et de V les produits $C\cos V$ et $C\sin V$.

A terre, on peut estimer la route en observant la boussole et comptant les pas, ou notant les heures de départ et d'arrivée, quand on connaît l'allure de sa monture. On verra plus loin qu'à terre on dispose d'un plus grand nombre de moyens de contrôle qu'en mer, et que les erreurs itinéraires peuvent être alors fort réduites. Bien que les erreurs dues à la boussole y soient moins à craindre qu'à la mer, il sera nécessaire de soumettre cet instrument à un contrôle sévère et à des vérifications fréquentes.

152. — Navigation astronomique. Méthode ancienne.

Jusqu'à ces derniers temps la Navigation reposait exclusivement sur la détermination séparée de la longitude et de la latitude. Voici comment on procédait et comment procèdent encore la plupart des navigateurs. Partant d'un point connu, on estime avec soin la route en vitesse et direction. Le lendemain du départ, vers 8^h du matin, on observe la hauteur du Soleil. Si l'on connaissait exactement la colatitude du point où l'on se trouve à ce moment-là, cette observation permettrait de calculer l'angle horaire par les formules du Paragraphe 108. L'estime donne une valeur de la colatitude, affectée d'erreurs sensibles en général : mais l'observation étant faite dans des circonstances favorables, l'erreur sur l'angle horaire est inférieure à celle qu'on a commise sur la colatitude, et la longitude calculée par les montres (§ 131 et suivants) est plus exacte que la longitude estimée. On observe ensuite le Soleil à midi; par la méthode du Paragraphe 91, on en conclut la latitude *exacte*. Cette latitude permet de contrôler celle qu'on a employée pour l'observation de longitude du matin, en corrigeant en sens inverse la latitude de midi du chemin en latitude fait entre les deux observations. On peut alors calculer à nouveau l'angle horaire et en déduire une longitude plus exacte. Le changement en longitude, entre les deux observations, calculé par l'estime, permet de conclure la longitude à midi; on a donc un point complet. Cette méthode d'approximations successives doit son succès à ce que l'erreur d'estime étant proportionnelle au temps est beaucoup plus petite pour un intervalle de 4^h à 5^h que pour une journée. On peut contrôler en observant une deuxième longitude après midi, vers 4^h, pour le calcul de laquelle on emploiera la latitude estimée depuis midi.

La précision que l'on obtient est limitée par les erreurs d'estime, par les erreurs d'observation et d'instrument, par celles des Tables de dépression et de réfraction, enfin par les anomalies chronométriques. En raison de cela, on peut être moins sévère sur le choix des hauteurs et observer assez près de l'horizon : les erreurs de réfraction sont généralement inférieures aux autres que nous avons citées. L'essentiel est d'observer le plus près possible du premier vertical pour la longitude.

Quand le Soleil culmine à une assez grande hauteur, on emploiera souvent avec avantage la méthode de Littrow, pour la détermination simultanée de la colatitude et de la longitude par l'observation des circonméridiennes. Ici l'on opère sur des intervalles très courts, et l'erreur d'estime devient négligeable. Il n'y a rien à ajouter aux explications données au Paragraphe 110 sur cette méthode, si ce n'est qu'il faut réduire les hauteurs au même horizon, celui de la première observation, par exemple, en suivant la méthode qui sera donnée au Paragraphe suivant.

Il est clair qu'on peut opérer sur les étoiles et les planètes comme on opère sur le Soleil, et observer ainsi latitude et longitude au crépuscule ou pendant la nuit. La méthode de calcul ci-dessus force à recommencer les calculs de longitude du matin avec une latitude nouvelle. On peut éviter une grande partie de ce surcroît de travail en se servant de la méthode d'approximation de Lalande, ou de la méthode Pagel qui lui est analogue et dont nous allons parler (§ 154).

La distinction établie entre la recherche de la latitude et celle de la longitude avait surtout sa raison d'être à une époque où les chronomètres étaient très imparfaits et exigeaient des vérifications fréquentes par les distances lunaires, tandis que la latitude se déterminait rapidement et avec une approximation bien supérieure à celle que comportait la longitude.

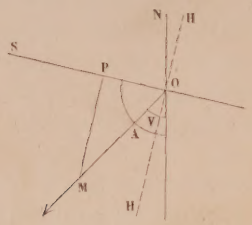
153. — Réduction d'une hauteur à l'horizon d'un autre lieu.

Les méthodes dont il va être question peuvent être employées à terre aussi bien qu'en mer; c'est pourtant dans ce dernier cas qu'elles sont le plus avantageuses. Elles reposent toutes sur des mesures de hauteurs, et il faut tenir compte du déplacement du navire dans l'intervalle des observations, en ramenant toutes les hauteurs observées à l'horizon d'un même lieu : cela est nécessaire pour la simplicité des calculs, afin de n'avoir à considérer qu'un seul zénith.

Admettons d'abord que la courbe de hauteur puisse être confondue avec sa tangente, et supposons qu'à l'instant t_0 on ait observé la distance zénithale ζ de l'étoile S; au même instant on a pris le relèvement de l'astre au compas. Le bâtiment fait route suivant

OM, et quand il est arrivé en M on fait une nouvelle observation, soit de l'astre S, soit d'un autre. Pour combiner la distance zénithale observée à cet instant t avec celle qu'on a trouvée à l'époque t_0, il faut savoir la distance zénithale ζ_m de S qu'on aurait mesurée à l'instant initial t_0, si au lieu d'être en O, on avait été en M. Soient maintenant A l'azimut de l'astre, V l'angle de route, c'est-à-dire l'azimut astronomique du chemin parcouru par le navire; s le chemin OM évalué en milles, c'est-à-dire en minutes d'arc : s est toujours compté positivement quand le temps croît : c'est

Fig. 66.



A — V qui détermine le signe de la correction. Comme on l'a vu, la droite de hauteur OH est perpendiculaire à OS, et le pôle du cercle de hauteur est situé sur OS. Si de M nous abaissons MP perpendiculaire sur OS, la longueur OP est la différence des rayons des cercles de hauteur simultanés, relatifs à O et à M; elle représente par conséquent, dans le cas de la figure, la diminution qu'éprouve la distance zénithale quand on va de O vers M. On a donc

$$\zeta_m = \zeta_0 - \mathrm{OP} = \zeta_0 - s\cos(\mathrm{A} - \mathrm{V}), \tag{3}$$

l'azimut A et la route V étant corrigés de la variation. Le problème est ainsi résolu. On peut encore en trouver une solution analytique, qui offrira l'avantage de permettre l'évaluation du degré de précision que comporte la substitution d'une droite au cercle de hauteur.

Soit, sur la sphère, S le pôle du cercle de hauteur : c'est le point qui a l'astre à son zénith. L'angle en O est encore A — V : les côtés MS, OS sont respectivement égaux à ζ_m et ζ_0 ; OM $= s$, et

l'on a

$$(4) \qquad \cos\zeta_m = \cos\zeta_0 \cos s + \sin\zeta_0 \sin s \cos(A - V).$$

Le théorème de Maclaurin donne

$$\zeta_m = (\zeta_m)_0 + \left(\frac{d\zeta_m}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\zeta_m}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \dots.$$

Pour $s = 0$, la valeur initiale $(\zeta_m)_0$ est ζ_0.

En différentiant deux fois l'équation (4) par rapport à s, il vient

$$-\sin\zeta_m \frac{d\zeta_m}{ds} = -\cos\zeta_0 \sin s + \sin\zeta_0 \cos s \cos(A - V),$$

$$-\cos\zeta_m \left(\frac{d\zeta_m}{ds}\right)^2 - \sin\zeta_m \frac{d^2\zeta_m}{ds^2} = -\cos\zeta_0 \cos s - \sin\zeta_0 \sin s \cos(A - V).$$

Si nous faisons $s = 0$, nous obtiendrons des valeurs de $\left(\frac{d\zeta_m}{ds}\right)_0$ et $\left(\frac{d^2\zeta_m}{ds^2}\right)_0$, qui, substituées dans le développement de Maclaurin, donneront

$$(5) \qquad \zeta_m = \zeta_0 - s\cos(A - V) + \frac{s^2 \sin 1'}{2} \cot\zeta_0 \sin^2(A - V) + \dots$$

où ζ et s sont exprimés en minutes d'arc. Le troisième terme ne cesse d'être négligeable que pour les petites valeurs de ζ_0, c'est-à-dire pour les astres voisins du zénith.

Grâce à cette correction, il sera toujours loisible de supposer que les observations ont été faites en un même lieu, et c'est ce point qu'il s'agira de déterminer.

154. — Méthodes Lalande, Pagel et Sumner.

Dans les problèmes de point proprement dits, on peut considérer comme inconnues la colatitude et la longitude, et ne faire intervenir l'angle horaire que d'une façon implicite.

Soit H_p l'heure temps moyen de Paris de la première observation; nous admettons que l'état du chronomètre sur le premier méridien est connu : H_p l'est donc également. Supposons qu'il s'agisse du Soleil, auquel les méthodes Lalande et Pagel s'appliquent plus spécialement. La longitude G étant comptée de 0°

à 360° vers l'Ouest comme l'angle horaire P, soit ε l'équation du temps, c'est-à-dire la correction à faire subir à l'heure vraie pour trouver l'heure moyenne : on aura

$$P = H_p - \varepsilon - G.$$

Soient, entre les deux observations consécutives, ∂G le déplacement estimé en longitude, $\partial\lambda$ le déplacement estimé en colatitude, ζ et ζ' les distances zénithales observées du Soleil; on aura

$$(6) \qquad \cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos(H_p - \varepsilon - G),$$

$$(7) \qquad \cos\zeta' = \cos\delta'\cos(\lambda + \partial\lambda) + \sin\delta'\sin(\lambda + \partial\lambda)\cos(H'_p - \varepsilon' - G - \partial G).$$

Si l'on différentie la formule (6) en faisant varier G et λ, on en tire

$$dG = \frac{\cos\delta\sin\lambda - \sin\delta\cos\lambda\cos P}{\sin P\sin\delta\sin\lambda}\,d\lambda = -\frac{\sin\zeta\cos A}{\sin P\sin\delta\sin\lambda}\,d\lambda = -d\lambda\frac{\cot A}{\sin\lambda}.$$

Si donc on a employé dans le calcul une valeur erronée de λ, on ne trouvera pas pour G la même valeur par les deux distances zénithales.

Soient G_0 sa valeur déduite de (6) et G_1 celle qu'on déduit de (7); soit x l'erreur sur la colatitude, elle se trouvera, d'après ce qui précède, par la relation

$$G_0 - \frac{x}{\sin\lambda\,\mathrm{tang}\,A} = G_1 - \frac{x}{\sin(\lambda + \partial\lambda)\,\mathrm{tang}\,A_1},$$

ou, pour abréger,

$$G_0 + b_0 x = G_1 + b_1 x,$$

les azimuts A_1 et A sont, comme on sait, comptés du Sud vers l'Ouest.

Telle est la méthode de Lalande. On calcule les valeurs numériques b_0 et b_1 des deux coefficients de x, en se servant de l'azimut observé, ou calculé par la formule

$$\sin A = \frac{\sin P}{\sin\zeta}\sin\delta$$

ou encore construit graphiquement, et qui n'a pas besoin d'être

connu aussi exactement que G et λ; et l'on aura enfin

$$x = \frac{G_0 - G_1}{b_1 - b_0},$$

et l'erreur de longitude sera (*voir* l'exemple § 156)

$$\gamma = \frac{x}{b_0}.$$

La méthode de M. Pagel ne diffère de la précédente que par la manière de calculer les coefficients b, sans faire intervenir l'azimut. En faisant le calcul d'angle horaire avec les méthodes connues, on écrit en même temps les différences logarithmiques qui permettent de calculer l'erreur sur P résultant d'une erreur de 1′ sur λ.

Si la première colatitude était exacte, on devrait avoir

$$G_1 - G_0 - \partial G = 0.$$

Si au lieu de cela, on a trouvé

$$G_1 - G_0 - \partial G = \Delta G,$$

cela provient d'une colatitude inexacte. Les longitudes déduites, par le même calcul, d'une colatitude plus grande de 1′ que la précédente donneront une autre relation

$$G'_1 - G'_0 - \partial G = \Delta' G,$$

et $\Delta G - \Delta' G = \gamma$ sera l'influence d'une erreur de 1′ sur λ sur le résultat cherché. L'erreur sur la colatitude primitive ou sa correction sera alors, en minutes d'arc, égale à

$$\frac{\Delta G}{\gamma}.$$

On voit que le principe de ces méthodes revient à évaluer le rapport $\frac{dG}{d\lambda}$, c'est-à-dire la variation d'angle horaire qui correspond à un accroissement donné de la colatitude. Graphiquement, cela se traduit par la considération d'un triangle rectangle infinitésimal ayant pour hypoténuse un élément de la courbe de hauteur; le côté parallèle à l'équateur est $dG \sin\lambda$, c'est-à-dire l'arc du parallèle de colatitude λ qui correspond à un changement de longi-

tude dG; le côté Nord-Sud est égal à $d\lambda$. Le calcul fait pour les deux observations, et ramené au même lieu par l'application des corrections ∂G et $\partial\lambda$, revient donc à la détermination algébrique de l'intersection de deux droites tangentes aux courbes de hauteur, et l'exactitude du point dépend de la précision avec laquelle cette intersection donne l'intersection des courbes mêmes. Quand on observe près du méridien, on est conduit à modifier les méthodes, parce que les b deviennent petits et qu'une erreur sur leur évaluation influe fortement sur x et y. C'est ce qui explique comment ces méthodes, après avoir joui d'une certaine vogue, sont moins employées aujourd'hui; on leur préfère la considération directe des droites de hauteur.

Le capitaine américain Sumner a attaché son nom à un problème dont l'esprit est le même, et qui consiste à calculer le point résultant d'une même hauteur avec deux colatitudes qui diffèrent entre elles d'un nombre rond de minutes, et pour lesquelles on choisit les valeurs extrêmes qui correspondent à l'incertitude qu'on suppose exister sur cet élément estimé. Par ces points tracés sur la carte, on construit alors la droite de hauteur, qui est une corde de la courbe de hauteur, tandis que la méthode précédente donne une tangente.

155. — Point par deux hauteurs et l'intervalle. Problème de Douwes.

Si un observateur prend au même point deux hauteurs d'astres, il pourra en conclure à la fois l'heure et la colatitude.

La solution générale de ce problème, connu sous le nom de problème de Douwes, consiste à calculer successivement trois triangles, c'est-à-dire à résoudre un quadrilatère sphérique. Les calculs sont assez longs, et l'on préfère généralement, en pratique, user de méthodes d'approximation ou d'interpolation, en se servant de la position géographique approchée, qui est toujours connue avec plus ou moins d'exactitude. Il est bon toutefois de connaître la solution directe, pour pouvoir l'appliquer au besoin.

Si nous projetons le triangle pôle-zénith-astre sur la surface de la Terre supposée sphérique, en prenant pour centre perspectif le centre de la Terre, la projection du zénith représentera le point

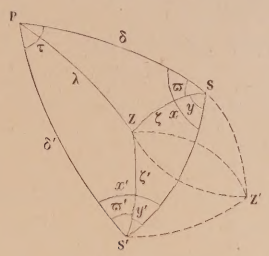
cherché. Le calcul de ce point revient donc à la détermination de deux triangles de position.

Géométriquement, le point est l'intersection de deux cercles de hauteur. On voit tout d'abord que l'observation des deux distances zénithales, combinée avec la connaissance de l'heure de Paris qui correspond à chacune d'elles, détermine les cercles et leur intersection. L'heure observée au chronomètre n'intervient que pour trouver l'heure de Paris.

Il est dès lors indifférent que les observations soient faites simultanément ou successivement, et dans ce dernier cas, qu'elles portent sur le même astre ou sur des astres différents. La longueur de l'intervalle qui sépare les observations est également indifférente, si les astres sont convenablement placés, pourvu qu'on tienne compte de la marche du chronomètre. De plus, si l'observateur s'est déplacé, il faut réduire une des hauteurs à l'horizon de l'autre. Ce sont là les seules corrections dont il y ait à se préoccuper, quand les hauteurs ne sont pas simultanées.

Quelle que soit la méthode employée, on doit trouver deux

Fig. 67.



solutions qui correspondent aux deux intersections des cercles de hauteur. Cette double solution résulte de la nature même du problème : il y a effectivement deux points différents de la Terre où les hauteurs des deux astres sont les mêmes au même instant physique. Mais les azimuts correspondants diffèrent, et leur connaissance approchée suffit en général pour lever l'incertitude. On sera aussi guidé par l'estime, car on possède généralement une valeur des coordonnées suffisamment approchée pour dissiper tous les doutes.

Pour résoudre le problème, on pourrait d'abord poser les deux équations générales

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P,$$
$$\cos\zeta' = \cos\delta'\cos\lambda + \sin\delta'\sin\lambda\cos P',$$

ζ et ζ' étant observés, il reste trois inconnues, λ, P et P'; pour avoir une troisième relation, on déduira la différence P — P' des heures d'observation.

Établissons cette troisième relation.

A l'heure t du chronomètre, on a observé la distance zénithale ζ d'un astre dont α et δ sont l'ascension droite et la distance polaire : puis, à l'heure t', on a observé la distance zénithale ζ' d'un astre $\alpha'\delta'$. C et C' étant les corrections chronométriques et m la marche en une seconde, le tout sur le temps sidéral, on aura

$$C' = C + m(t' - t)$$

$t' - t$ étant exprimé en secondes. Les angles horaires sont liés aux heures sidérales par les relations

$$P = S - \alpha, \qquad P' = S' - \alpha',$$

et l'on trouve les heures sidérales par

$$S = t + C, \qquad S' = t' + C'.$$

On a par conséquent

$$P' - P = \tau = t' - t - (\alpha - \alpha') + m(t' - t), \tag{8}$$

quantité connue.

Soient maintenant, dans le triangle formé par le pôle et les deux étoiles, x et x' les angles aux étoiles; nous aurons les formules de Delambre pour calculer la distance angulaire D des deux étoiles et les angles x et x'

$$\sin\tfrac{1}{2}D\cos\tfrac{1}{2}(x - x') = \sin\tfrac{1}{2}\tau\sin\tfrac{1}{2}(\delta + \delta'), \tag{9}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}D\cos\tfrac{1}{2}(x + x') = \sin\tfrac{1}{2}\tau\cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta'), \tag{10}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}D\sin\tfrac{1}{2}(x - x') = \cos\tfrac{1}{2}\tau\sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta), \tag{11}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}D\sin\tfrac{1}{2}(x + x') = \cos\tfrac{1}{2}\tau\cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta). \tag{12}$$

Connaissant D, on peut calculer l'angle parallactique ϖ des astres. On a en effet, pour l'astre S,

$$\cos\zeta' = \cos\zeta\cos D + \sin\zeta\sin D\cos(x - \varpi),$$

et pour l'astre S',

$$\cos\zeta = \cos\zeta'\cos D + \sin\zeta'\sin D\cos(x' - \varpi').$$

Ce calcul, identique à celui de l'angle horaire, se fait par les formules connues qui donnent ce dernier.

Enfin, si nous considérons le triangle de position de l'étoile S, les formules de Delambre donnent en y remplaçant l'angle $A_1 = PZS$ par son supplément, l'azimut A,

$$(13)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\lambda\sin\tfrac{1}{2}(A + P) = \sin\tfrac{1}{2}\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\delta + \zeta),$$

$$(14)\qquad \cos\tfrac{1}{2}\lambda\sin\tfrac{1}{2}(A - P) = \sin\tfrac{1}{2}\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\delta + \zeta),$$

$$(15)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}(A + P) = \cos\tfrac{1}{2}\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \zeta),$$

$$(16)\qquad \cos\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}(A - P) = \cos\tfrac{1}{2}\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\delta - \zeta).$$

Les formules (9) et (10) donnent par division $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x - x')$, (10) et (12) donnent $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x + x')$, et l'on connaît ainsi x et x'; une quelconque des formules (9) à (12) donnera alors D. On calcule ensuite $x - \varpi$ et l'on en déduit ϖ.

La division des formules (15) et (13) donnera $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A + P)$, celle des formules (16) et (14) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A - P)$, d'où l'on tire A et P. Enfin on tirera $\frac{1}{2}\lambda$ d'une quelconque des formules (13) à (16) par son sinus ou son cosinus, ou encore par sa tangente en divisant les formules deux à deux. L'angle P sert à calculer la longitude et le point se trouve ainsi complètement déterminé.

La symétrie des formules et le nombre assez petit de logarithmes qu'on est amené à chercher rendent en réalité le calcul moins long qu'il ne paraît au premier abord, et l'on peut opérer de nombreuses vérifications.

On peut refaire le calcul de (5) à (8) pour la deuxième étoile S'; cela est inutile puisqu'on connaît P' — P, mais cela fournit encore une vérification.

L'azimut se trouve en même temps que l'angle horaire.

Les formules s'appliquent à un même astre observé successive-

ment, au Soleil par exemple, sans qu'il y ait rien à changer à la marche des opérations.

Mais alors on peut prendre P et P′ en temps vrai, et se dispenser de passer par le temps sidéral et l'ascension droite du Soleil, surtout quand le chronomètre est réglé sur le temps moyen. Dans ce cas, et si la distance polaire de l'astre peut être considérée comme invariable, on a $x = x'$, et il suffit de calculer $x + x'$ par (10) et (12). Alors, puisque $\delta = \delta'$ et $x = x'$, on aura,

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{D} = \sin\tfrac{1}{2}\tau\sin\delta,$$
$$\cos x\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{D} = \sin\tfrac{1}{2}\tau\cos\delta,$$
$$\sin x\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{D} = \cos\tfrac{1}{2}\lambda.$$

On calculera D et x, puis $x - \varpi$ comme ci-dessus, et le calcul se terminera de la même manière.

Cette méthode est très élégante, mais elle ne met pas aussi bien en relief les quantités qu'on emploie que celle que nous allons exposer.

Conservant les mêmes notations, calculons d'abord l'arc $\mathrm{SS}' = \mathrm{D}$. On a

$$\cos\mathrm{D} = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos\tau. \tag{17}$$

Calculons maintenant l'angle $\mathrm{SZS}' = \mathrm{M}$,

$$\cos\mathrm{M} = \frac{\cos\mathrm{D} - \cos\zeta\cos\zeta'}{\sin\zeta\sin\zeta'}. \tag{18}$$

Pour fixer la position du point Z, calculons les angles

$$x = \mathrm{PSS}', \qquad x' = \mathrm{PS'S}, \qquad y = \mathrm{ZSS}', \qquad y' =$$

par les formules

$$\sin x = \frac{\sin\tau}{\sin\mathrm{D}}\sin\delta', \qquad \sin x' = \frac{\sin\tau}{\sin\mathrm{D}}\sin\delta, \tag{19}$$

$$\sin y = \frac{\sin\mathrm{M}}{\sin\mathrm{D}}\sin\zeta', \qquad \sin y' = \frac{\sin\mathrm{M}}{\sin\mathrm{D}}\sin\zeta. \tag{20}$$

Pour se rendre compte des valeurs à adopter pour ces angles déterminés par leurs sinus, on fera une figure comme celle que nous avons indiquée, en s'aidant des azimuts approchés.

On aura enfin les angles $PSZ = \varpi$ et $PS'Z = \varpi'$ qui sont dans le cas présent

$$x' - y' \qquad \text{et} \qquad x - y.$$

La double solution est

$$x \pm y = \varpi, \qquad x' \pm y' = \varpi',$$

selon que les astres sont du même côté du méridien ou de côtés différents.

On calculera λ par deux formules qui doivent se vérifier

$$(21) \qquad \cos\lambda \begin{cases} = \cos\zeta\cos\delta + \sin\zeta\sin\delta\cos(x-y), \\ = \cos\zeta'\cos\delta' + \sin\zeta'\sin\delta'\cos(x'-y'), \end{cases}$$

et les angles horaires par

$$(22) \qquad \sin P = \frac{\sin\zeta\sin(x-y)}{\sin\lambda}, \qquad \sin P' = \frac{\sin\zeta'\sin(x'-y')}{\sin\lambda},$$

et l'on doit trouver pour vérification

$$P' - P = \tau.$$

Un calculateur exercé qui ne tiendrait pas à avoir des vérifications pourrait faire usage des seules formules

$$\cos D = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta'\cos\tau,$$

$$\sin x = \frac{\sin\tau\sin\delta}{\sin\delta'},$$

$$\cos y = \frac{\cos\zeta' - \cos D\cos\zeta}{\sin D\sin\zeta},$$

$$\cos\lambda = \cos\zeta\cos\delta + \sin\zeta\sin\delta\cos(x \pm y),$$

$$\sin P = \frac{\sin\zeta - \sin(x \pm y)}{\sin\lambda}.$$

Les calculs se simplifient et le choix entre les deux solutions est indiqué par la position estimée et par l'azimut.

On peut faire intervenir des angles auxiliaires pour rendre les formules logarithmiques, et c'est ainsi que le problème est traité dans la plupart des Livres de Navigation : mais l'emploi des logarithmes d'addition est préférable.

Voici un exemple d'application de cette dernière méthode :

Le 29 janvier 1881, vers 9^h du soir, à bord d'un bâtiment faisant route au N. 49° E. du monde, avec une vitesse de $8^n,5$ on a observé deux étoiles, dont les hauteurs, corrigées de la dépression et de la réfraction, sont

β Orion à $8^h\,22^m\;6^s$ du compteur, hauteur $= 28°\,46'\,15''$ (au S. 40° O.)
Régulus à $8\;26\;35$ ..... $= 44\;29\;50$ (au S. 58 E.)

Le compteur est réglé sur le temps moyen. Retard sur Paris : $3^h\,16^m\,15^s,7$.
Le point estimé à l'instant de la deuxième observation est

Latitude 43° 45′ N. Longitude 12° 4′ O.

On trouve d'abord dans la *Connaissance des Temps* les coordonnées des étoiles

β Orion $\quad \alpha' = 5^h\,9^m\;1^s,9 \quad \delta' = 98°\,20'\,20''$
Régulus $\quad \alpha = 10\;3\;16\;,4 \quad \delta = 77\;28\;30.$

Réduction de β Orion au zénith de la deuxième observation

$A = 40°$, $V = 229$, $s = \dfrac{8',5\,[8^h\,26^m\,35^s - 8^h\,22^m\,6^s]}{3600} = 30''$

$A - V = -189°$ $\quad \log\cos\ 9,995\,(-)$
$\quad \log s\ 1,477\,(-)$
$\quad \log \text{corr.}\ 1,472\,(+)$ $\quad$ Correction $= +30''$
$\quad \zeta' \text{ obs.}\ldots\ 61°\,13'\,45''$
$\quad \zeta' \text{ réduit}\ 61°\,14'\,15''$
$\quad \text{et } \zeta\ldots\ldots\ 45\;30\;10.$

Calcul de l'heure sidérale de Paris.

	h m s	h m s
Heures d'observation.....	8.22. 6	8.26.35
État absolu, correction.....	3.16.15,7	3.16.15,7
Heure de Paris, temps moyen.	11.38.21,7	11.42.50,7
Réduction en temps sidéral....	1.54,7	1.55,5
Temps sidéral à midi.....	20.35.34.4	20.35.34,4
Heures de Paris, temps sidéral.	8.15.50,8	8.20.20,6
Ascensions droites.....	5. 9. 1,9	10. 2.16.4
Angles horaires $S_p - \alpha$.....	3. 6.48,9	22.18. 4,2

Différence $\tau = 4^h\,48^m\,44^s,7 = 72°\,11'\,10''$.

Calcul de D *et de* M.

Formules (17) et (18).

$\log\cos\delta$	9,336191 (+)	$\log\sin\delta$	9,989539
$\log\cos\delta'$	9,161451 (−)	$\log\sin\delta'$	9,995384
		$\log\cos\tau$	9,485617
			9,470540
Somme	8.497642 (−)		8,497642
log de soustr.	0,924022 (−)		0,972898
$\log\cos$ D.....	9.421664		

D = 74° 41′ 25″.

$\log\sin\zeta$...	9,853263	$\log\cos\zeta$	9,845640		
$\log\sin\zeta'$...	9,942812	$\log\cos\zeta'$	9,682308		
log dénom.	9,796075 (+)		9,527948		
log numér.	8,864572 (−)	$\log\cos$ D	9,421664		9,421664
log cos M..	9,068497 (−)		0,106284	log de soustr.	9,442908
				log numér...	8,864572

M = 96° 43′ 25″.

Calcul de x, x', y, y'. (Voir *fig.* 67; Régulus est en S, β Orion en S′)
x est obtus, y, x', y' sont aigus.

Formules (19) et (20).

$\log\sin\tau$.	9,978662		
$\log\sin$ D	9,984308		
	9,994354		9,994354
$\log\sin\delta$.	9,989540	$\log\sin\delta'$	9,995384
$\log\sin x'$	9,983894	$\log\sin x$	9,989738
$x' = 74°\,29'\,30''$		$x = 102°\,24'\,23''$.	
$\log\sin$ M	9,997003		
$\log\sin$ D	9,984308		
	0,012695		0,012695
$\log\sin\zeta$.	9,853263	$\log\sin\zeta'$	9,942812
$\log\sin y'$.	9,865958	$\log\sin y$	9,955507
$y' = 47°\,15'\,36''$		$y = 64°\,30'\,19''$.	
$x' - y' = 27\ 13\ 54$		$x - y = 37\ 54\ 4$.	

Calcul de λ. (Nous n'en donnons qu'un seul.)

Formule (21).

$\log\cos\zeta'$..	9,682308 (+)	$\log\sin\zeta'$.....	9,942812 (+)
$\log\cos\delta'$..	9,101451 (−)	$\log\sin\delta'$.....	9,995384 (+)
		$\log\cos(x'-y')$.	9,948979 (+)
			9,887175 (+)
Somme...	8,843759 (−)		8,843759
log soustr.	1,002225		1,043416
$\log\cos\lambda$..	9,845974		

$$\lambda = 45^\circ 27' 30''.$$

Calcul de P.

Formule (22).

$\log\sin\zeta$.....	9,853268	$\log\sin\zeta'$	9,942812
$\log\sin(x-y)$.	9,788373	$\log\sin(x'-y')$.	9,660488
colog $\sin\lambda$.....	0,147073	colog $\sin\lambda$	0,147073
$\log\sin$ P.....	9,788714	$\log\sin$ P'.....	9,750373

P = 37°56′7″ = 2h31m44s,5 à l'Est. P′ = 34°15′5″ = 2h17m 0s,3 à l'Ouest.

α.....	10 2 16,4	5 9 1,9
S.....	7h30m31s,9	7h26m 2s,2
S_p.....	8 20 20,6	8 15 50,8
G.....	0h49m48s,7	0h49m48s,6 (vérific.).

On a donc en définitive

$$G = 12^\circ 27' 10'', \qquad \lambda = 45^\circ 27' 30.$$

Ce calcul n'est pas précisément d'une longueur rebutante; pourtant la méthode est rarement appliquée. On peut se rendre compte rapidement du degré de précision du résultat. Cette précision dépend de l'angle sous lequel les cercles de hauteur se coupent sur la sphère, angle égal au supplément de M. Mais, si l'on veut avoir une vérification du calcul et des observations elles-mêmes, on est conduit à prendre une troisième et même une quatrième étoile : le calcul des combinaisons devient alors long et fastidieux. Ces complications sont évitées dans les méthodes de la nouvelle Navigation dont nous allons nous occuper.

156. — Calcul du point rapproché et de l'intersection de deux droites de hauteur.

Lorsqu'on a observé plusieurs étoiles, la meilleure marche à suivre pour le calcul du point consiste à tirer parti de la connaissance qu'on a d'une valeur approchée de ses coordonnées, en considérant cette valeur comme une quantité à corriger, dont les corrections se déduiront des observations faites. On est alors amené à la considération du point rapproché, qui se prête le mieux à la formation des équations de condition, et qui jouit d'ailleurs de cet avantage que, dans le cas d'une observation de hauteur unique, elle donne la meilleure utilisation de cette observation : dans tous les autres cas, elle fournit le point le plus probable. Nous allons l'exposer d'après Yvon Villarceau et M. de Magnac. Rappelons d'abord le principe.

Quand on connaît l'heure du premier méridien, une hauteur observée donne un lieu géométrique du navire, et ne donne que cela.

Soient G_e, λ_e la longitude et la colatitude du point considéré; G est compté positivement vers l'Ouest. Soit S_p l'heure sidérale du premier méridien (nous dirons : de Paris, pour abréger), la longitude géographique de l'astre est

$$G_a = S_p - \alpha. \tag{23}$$

Sa colatitude ou distance polaire

$$\lambda_a = \delta.$$

On commencera par calculer ce qu'on appelle l'azimut et la distance zénithale estimés, c'est-à-dire ceux qu'on aurait observés si l'on s'était réellement trouvé au point que l'estime indique. Les formules qui résolvent le problème sont :

$$\cos\zeta_e = \cos\lambda_e \cos\delta + \sin\lambda_e \sin\delta \cos(G_a - G_e), \tag{24}$$

$$-\cos A_e \sin\zeta_e = \sin\lambda_e \cos\delta - \cos\lambda_e \sin\delta \cos(G_a - G_e), \tag{25}$$

$$\sin A_e \sin\zeta_e = \sin\delta \sin(G_a - G_e). \tag{26}$$

Pour tirer de ces équations ζ_e et A_e on peut employer les loga-

rithmes d'addition au moyen desquels on calculera

$$(27) \qquad -\operatorname{tang} A_e = \frac{\sin\delta \sin(G_a - G_e)}{\sin\lambda_e \cos\delta - \cos\lambda_e \sin\delta \cos(G_a - G_e)},$$

$$(28) \quad \operatorname{tang}\zeta_e = \frac{\sin\delta \sin(G_a - G_e)}{[\cos\lambda_e \cos\delta + \sin\lambda_e \sin\delta \cos(G_a - G_e)] \sin A_e}.$$

Ces arcs, très bien déterminés par leurs tangentes, sont vérifiés par la troisième formule (26).

Ces formules peuvent aussi être rendues logarithmiques en cherchant un angle auxiliaire φ tel que

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\delta \cos(G_a - G_e),$$

et l'on aura

$$(29) \qquad -\operatorname{tang} A_e = \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(G_a - G_e)\cos\varphi}{\sin(\lambda_e - \varphi)},$$

$$(30) \qquad \operatorname{tang}\zeta_e = \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(G_a - G_e)\cos\varphi}{\cos(\lambda_e - \varphi)\sin A_e}.$$

Telles sont les formules bonnes dans tous les cas. Mais si l'on fait attention au degré d'approximation qui est nécessaire dans la question qui nous occupe, on se contentera généralement de calculer la distance zénithale par la formule (24) qui, avec des logarithmes à cinq décimales, donne l'angle ζ à 1′ près jusqu'à moins de 5° du zénith. Ce n'est que pour les distances zénithales plus faibles qu'on aura intérêt à calculer par la tangente.

L'azimut se trouvera très bien aussi par la formule

$$(31) \qquad \sin A_e = \frac{\sin\delta \sin(G_a - G_e)}{\sin\zeta_e},$$

sauf dans le voisinage du premier vertical. On n'en a besoin que pour les termes de correction. Dans les environs du premier vertical, on peut appliquer la formule

$$(32) \qquad \cos A_e = \frac{\cos\delta - \cos\zeta_e \cos\lambda_e}{\sin\zeta_e \sin\lambda_e},$$

pour le calcul de laquelle on emploie les logarithmes d'addition.

Admettons maintenant qu'on opère sur une carte de Mercator, et que les erreurs d'estime soient assez petites pour que, dans la

partie de la carte qu'on aura à considérer, on puisse substituer à la courbe de hauteur la tangente à sa transformée, et à l'arc de grand cercle, l'arc de loxodromie correspondant, c'est-à-dire encore une droite sur la projection. Dans les mêmes conditions nous pouvons admettre que les figures tracées dans la région considérée de la carte sont semblables aux figures correspondantes de la sphère, l'échelle des longueurs restant la même dans toute l'étendue que l'on envisage, et les angles étant conservés, conformément à la propriété caractéristique des projections orthomorphes.

Si l'estime et l'observation étaient exactes, la valeur de ζ_e trouvée par les formules qui précèdent devrait être égale à la distance observée ζ corrigée de dépression, réfraction, parallaxe, demi-diamètre, etc. Il n'en sera généralement pas ainsi. Du point estimé abaissons une perpendiculaire sur la droite de hauteur, la longueur de cette perpendiculaire évaluée en milles sera la différence $\zeta_e - \zeta = p$, exprimée en minutes. Le pied de cette perpendiculaire, situé sur le lieu de l'astre, jouit évidemment de la propriété d'être plus voisin que le point estimé du point vrai qui doit se trouver sur ce lieu. C'est ce qui lui a fait donner le nom de *point rapproché*. D'après ce qui vient d'être dit, p représente la correction qu'il faut appliquer à la distance zénithale estimée pour avoir la distance observée. Par suite, en se rappelant les conventions établies pour le sens de la numération des longitudes et des azimuts, et désignant par l'indice r les coordonnées du point rapproché, on aura

$$G_r = G_e + p\frac{\sin A_e}{\sin \lambda}, \tag{33}$$

$$\lambda_r = \lambda_e + p\cos A_e. \tag{34}$$

Considérons maintenant le cas où l'on a observé deux astres. Nous réduirons d'abord la première distance zénithale à l'horizon de la deuxième, puis nous calculerons ζ_e et A_e.

Les droites de hauteur rapportées au point estimé E pris pour origine ont pour équations

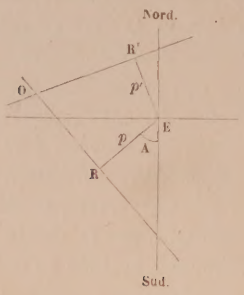
$$x\sin A + y\cos A - p = 0,$$

$$x\sin A' + y\cos A' - p' = 0;$$

les coordonnées de leur intersection O sont donc

$$x = \frac{p\cos A' - p'\cos A}{\sin(A - A')}, \qquad y = -\frac{p\sin A' - p'\sin A}{\sin(A - A')}.$$

Fig. 68.



Dans l'ordre d'approximation accepté, le point xy est le point exact, et l'on peut prendre A_e pour le calcul à la place de A.

La meilleure détermination du point correspond au maximum du dénominateur, c'est-à-dire

$$A - A' = \pm 90^\circ;$$

par conséquent on doit choisir deux astres dont les azimuts sont à angle droit.

Si p est exprimé en milles, c'est-à-dire en minutes de latitude, ce qui est sensiblement équivalent, y donnera directement la correction en minutes de la colatitude du point estimé.

D'après la formule, x se trouve exprimé dans la même unité ; pour le transformer en correction de la longitude du point estimé on écrira

$$x' \text{ minutes de longitude} = x \text{ minutes de latitude},$$

$$x' = \frac{x}{\sin\lambda},$$

et l'on aura pour les corrections du point estimé

$$(35)\quad \partial\lambda = -\frac{p\sin A'_e - p'\sin A_e}{\sin(A_e - A'_e)}, \qquad \partial G = \frac{p\cos A'_e - p'\cos A_e}{\sin(A_e - A'_e)\sin\lambda_e}.$$

On peut aussi calculer x et y et les porter sur la carte avec leurs signes à partir du point estimé, en les mesurant tous deux en minutes de latitudes croissantes qui correspondent à la colatitude estimée. La réduction de x en longitude peut se faire enfin au moyen de la Table des latitudes croissantes, dans laquelle on entre avec le λ estimé : le rapport des différences de latitudes croissantes aux différences de la latitude vraie est précisément égal au facteur $\frac{1}{\sin\lambda}$.

Le cas particulier de la Navigation ancienne répond à $A = 0$ ou $= 180^\circ$ et $A' = \pm 90^\circ$, c'est-à-dire à l'observation méridienne et à celle au premier vertical, donnant séparément, et d'une manière indépendante, la latitude et la longitude. La substitution de la tangente à l'arc de courbe est d'autant plus légitime que le rayon est plus grand : à cet égard, les grandes distances zénithales sont favorables. Une distance zénithale de 90° avec un azimut de $\pm 90^\circ$ donne la longitude indépendamment de la colatitude : le lieu géométrique est alors un méridien terrestre; on se rappelle en effet qu'à l'époque de l'équinoxe le Soleil se couche à 6^h pour tous les points de la Terre.

Il ne faut pas oublier toutefois que les réfractions près de l'horizon sont sujettes à des anomalies qui doivent faire rejeter l'emploi des distances zénithales trop voisines de 90°. Mais il importe aussi de ne pas s'exagérer ces incertitudes qui sont à peu près du même ordre que celles qui affectent les dépressions : les erreurs dues à des hauteurs de 3 à 4 degrés seront généralement encore moindres que les erreurs d'estime, surtout si l'on a soin de calculer la réfraction en tenant compte du baromètre et du thermomètre, et l'on aurait tort de se priver complètement des ressources qu'il est possible d'en tirer.

Rien n'indique, dans l'énoncé du problème, qu'on doive observer deux astres différents : la hauteur de la première observation étant ramenée à l'horizon de la deuxième, il sera permis de considérer deux hauteurs du même astre, à condition qu'on soit assez sûr de l'estime dans l'intervalle pour que cette réduction ne soit pas sujette à des erreurs appréciables. Quand l'azimut varie rapidement, on se trouve dans de bonnes conditions pour l'application de la méthode : c'est ce qui arrive, par exemple, aux environs de la culmi-

nation, quand celle-ci a lieu à une petite distance du zénith : le point est déterminé dans ces conditions avec rigueur et rapidité, et c'est là la raison du succès de la méthode Littrow (§ 110).

C'est ici le cas de rappeler que lorsqu'on a l'heure de Paris avec une approximation suffisante pour l'application de la méthode, on peut aussi calculer, avec toute la rigueur qu'exige la pratique, les coordonnées de la Lune; et toutes les fois que cet astre sera visible en même temps que le Soleil, il conviendra de l'employer à faire un point complet; le seul inconvénient résulte de la grandeur de la parallaxe.

Voici un exemple d'application des formules qui précèdent : nous choisissons les données du calcul de point développé au Paragraphe 155.

Supposons que l'estime ait donné

$$\lambda_e = 46^\circ 10', \qquad G_e = 12^\circ 50' \text{ O}.$$

Les calculs préparatoires sont les mêmes jusqu'au calcul de D et de M.

On réduit en arc les $S_p - \alpha$, et l'on obtient

$G_a = S_p - \alpha$	$46^\circ 42' 14''$	$-25^\circ 28' 57''$
G_e.....	12 50	12 50
$G_a - G_e$....	$33^\circ 52' 14''$	$-38^\circ 18' 57''$

Calcul de ζ_e par la formule (24).

1re étoile.

$\log\cos\lambda_e$..	9,84046	$\log\sin\lambda_e$.....	9,85815
$\log\cos\delta$..	9,16145	$\log\sin\delta$.....	9,99538
		$\log\cos(G_a - G_e)$	9,91924
	9,00191 (−)		9,77277 (+)
			9,00191
log soustr.	0,69020		0,77086
$\log\cos\zeta_e$..	9,69211		
ζ_e..	$60^\circ 31' 0''$		
ζ...	61.14.15		
p..	$-43' 15''$		

2e étoile.

	9,84046	9,85815
	9,33619	9,98954
		9,89464
	9,17665 (+)	9,74233 (+)
		9,17665
log add.	0,67011	0,56568
	9,84676	
ζ_e'...	45° 21′ 25″	
ζ ...	45.30.10	
p'. .	— 8′ 45″	

Calcul de A *par la formule* (31).

log sin δ.....	9,99538	9,98954
log sin (G_a — G_e)	9,74610	9,79239
	9,74148	9,78193
log sin ζ_e..... ..	9,93977	9,85217
log sin A_e	9,80171	9,92976

A_e 39° 18′ 20″ A_e' — 58° 17′ 0″.

$A_e - A'_e = 97° 35' 20''$.

Calcul du point rapproché, formule (35).

On sous-entend pour plus de brièveté le signe log.

p 3,41414 (—)	p' 2,72016 (—)	p 3,41414 (—)	p' 2,72016 (—)
sin A′ 9,92976 (—)	sin A 9,80171 (+)	cos A′ 9,72075 (+)	cos A 9,88862 (+)
3,34390 (+)	2,52187 (—)	3,13489 (—)	2,60878 (—)

Nombres	+ 36′47″	— 5′32″	— 22′44″	— 6′46″
Différence	+ 42′19″ log.....	3,40466 (+)	— 15′58″ log	2,98137 (—)
	colog sin (A_e — A'_e)	0,00382 (+)		0,00382 (+)
	log (— $\partial\lambda$)..	3,40084 (+)	colog sin λ_e.	0,14185 (+)
			log ∂G.....	3,12704 (—)

λ_e	46° 10′ 0″	G_e	12° 50′ 0″
$\partial\lambda$ —	41 57	∂G —	22 14
λ	45° 28′ 3″	G	12° 27′ 46″

On peut comparer ces résultats avec ceux du n° 155.

Nous ajouterons encore un exemple pour montrer comment on peut calculer l'intersection de deux droites de hauteur, et obtenir ainsi la correction de la position géographique d'un point, sans passer par le point rapproché : c'est, sous une autre forme, une application de la méthode Lalande.

Des distances zénithales du Soleil, observées à Hon-Gneu en mai 1878, et calculées avec une colatitude approchée de 71° 10′, ont donné pour ce point, à l'ouest de Saïgon :

Mai 17,20	Longitude $3^m 43^s,19$	Azimut calculé ⊙	103° 4′
Mai 17,84	$3\ 45\ ,94$		258 16

En faisant la figure, on reconnaît que les droites de hauteur se coupent au sud de ces deux points et qu'elles sont inclinées respectivement de $a_1 = 13°4'$ et de $a'_1 = 11°44'$ sur les méridiens. On trouve, en valeur absolue,

$$\operatorname{tang} a_1 + \operatorname{tang} a'_1 = 0,4399,$$

la différence des longitudes est $2^s,75 = 41'',2$, et $\frac{41'',2}{0,4399} = 93'',7$.

Pour avoir la vraie longitude, nous faisons les produits de $93'',7$ par tang a_1 et tang a'_1 ; ces produits sont $21'',7$ et $19'',5$, ou en temps : $1^s,45$ et $1^s,30$. On a alors la vraie longitude

$$3^m 43^s,19 + 1^s,45 = 3^m 45^s,94 - 1^s,30 = 3^m 44^s,64.$$

Le rapport d'une minute de latitude croissante à la minute de longitude pour la colatitude 71° 10′ est de 1,05 ; $+\frac{93'',7}{1,05} = +1'29'',2$ est donc la correction de la colatitude, qui devient 71° 11′ 29″.

Des observations directes ont donné ultérieurement pour ce lieu 71° 11′ 49″ ; l'accord est aussi satisfaisant qu'on pouvait l'espérer, eu égard à la faible inclinaison des lieux géométriques sur le méridien.

157. — Point par trois hauteurs et plus.. Solutions graphiques.

Si l'on a observé plus de deux distances zénithales, le problème du point est plus que déterminé : on obtiendra plusieurs droites de hauteur qui devraient se couper en un même point. C'est ce qui arrivera rarement en toute rigueur, et l'on aura autant de points

distincts que d'intersections deux à deux. Pour déduire de ces données le point le plus probable, M. Yvon Villarceau a appliqué la méthode des moindres carrés; nous aurons occasion d'y revenir plus loin (§ 177) et de reprendre alors la solution complète du problème.

Au lieu de calculer les coordonnées x et y, on peut opérer directement sur la carte marine. On porte le point estimé sur celle-ci, et à partir de ce point on trace le relèvement A_e de l'astre.

Sur ce relèvement on porte la longueur p prise sur l'échelle des latitudes croissantes, dans le sens opposé à l'astre si p est positif, et vers l'astre, s'il est négatif. On aura ainsi le point rapproché, et la perpendiculaire à la direction azimutale de l'astre, menée par ce point, sera la droite de hauteur. Si l'on a une seconde observation, ramenée au même point estimé, on construira de même la droite de hauteur correspondante, dont l'intersection avec la première donnera le point vrai. Il y aurait à discuter les limites de l'approximation que l'on peut obtenir ainsi, en ayant égard à toutes les causes d'erreurs. On trouvera cette discussion dans le Traité de MM. Yvon Villarceau et A. de Magnac : elle est assez délicate et nous ne pouvons la donner ici avec tous les développements et les formules qu'elle comporte. Les erreurs provenant de la substitution d'une droite à la courbe de hauteur sont d'autant plus grandes que le point estimé est plus erroné, et que la distance zénithale est plus petite. Les erreurs sur l'appréciation de l'heure et sur l'état absolu relativement au premier méridien, affectent directement la position du pôle du cercle de hauteur, sans changer son rayon : elles produisent donc un déplacement en longitude de la droite de hauteur, et se retrouvent en vraie grandeur sur la longitude du point. Les erreurs sur la distance zénithale, provenant de l'observation, d'une réfraction ou d'une dépression fautives, déplacent la droite de hauteur dans le sens de la direction azimutale de l'astre d'une quantité égale à leur somme : on peut donc les porter sur p et les projeter sur le méridien et le parallèle, pour avoir leur influence sur la longitude et la latitude.

L'azimut est, dans la plupart des cas, suffisamment exact pour l'usage auquel il est destiné; nous ferons observer que si l'on a relevé un point terrestre à angle droit avec le vertical de l'astre,

dans lequel cas sa distance angulaire à l'astre même est aussi un angle droit, le relèvement de ce point, tracé à partir du point rapproché, se confond, à la correction Givry près, avec la droite de hauteur, et comme celle-ci est fournie directement par l'observation, le lieu du point terrestre ainsi obtenu est indépendant, ou à peu près, des erreurs de l'estime. Cette considération, due à M. de Tessan, est importante quand il s'agit de placer des points de terre par des observations astronomiques faites en mer et en général d'estimer la valeur d'un lieu donné par un azimut.

Cette solution du problème du point n'est qu'approchée. En partant du point trouvé comme d'un nouveau point estimé, on peut calculer une deuxième approximation qui sera toujours suffisante. Rappelons seulement que deux cercles de hauteur ont deux intersections, et que pour choisir entre les deux solutions, à défaut du point estimé, on devra toujours comparer l'azimut calculé à celui qu'on a dû observer.

M. Yvon Villarceau a donné également la solution graphique du point par plus de deux hauteurs. La construction, parfaitement rationnelle d'ailleurs, à laquelle il arrive, serait d'application un peu longue, eu égard à l'approximation qu'il convient de rechercher.

Si l'on a trois lieux qui se coupent en trois points, on prendra à vue le centre du triangle, sans trop se préoccuper si c'est le centre de gravité, le centre du cercle inscrit ou un autre point du même genre qu'on obtient. Il faut se rappeler seulement que plus l'angle de deux droites est aigu, moins leur intersection est bien déterminée, et quand plusieurs intersections nettes sont comprises dans un petit espace, on se placera vers le centre de cet espace, sans tenir compte des intersections parasites qui se produisent à grande distance. En un mot, la précision possible dans ce cas ne vaut pas la peine d'appliquer des règles de calcul des probabilités qui sont douteuses parfois pour des observations beaucoup plus précises.

158. — Courbes de hauteur sur la carte réduite.

Il est clair que si l'on possédait un moyen de tracer simplement sur les projections des cartes les cercles de hauteur, on pourrait résoudre le problème d'une manière très exacte. Cela peut se faire, comme on l'a vu, sur la projection stéréographique, puisqu'on sait

construire la projection d'un petit cercle dont on connaît le pôle et le rayon sphérique; c'est notre cas. Mais pour obtenir la précision nécessaire, il faut une projection de dimensions considérables, sur laquelle la minute d'arc soit suffisamment grande: un dessin de ce genre cesse d'être pratique. Toutefois on pourrait se servir de ce procédé, notamment avec le double planisphère Keller, pour avoir une première approximation meilleure que le point estimé.

Sur la projection de Mercator, les courbes de hauteur ne sont plus d'une construction aussi simple. Il y a pourtant des cas où l'on peut en tracer une portion : nous allons les examiner en cherchant d'abord l'équation générale des courbes de hauteur sur la projection des cartes réduites; nous suivrons pour cela les considérations développées par M. Estignard, ingénieur hydrographe (*Recherches chronométriques,* 12e cahier) et par M. Guyou dans son cours à l'École navale. Admettons qu'on fasse abstraction de l'aplatissement; prenons pour axe des x l'équateur de la carte, pour axe des y le méridien de l'astre; nous exprimerons d'abord les coordonnées géographiques en parties du rayon de la sphère, qui sera pris pour unité.

D'après ce qu'on a vu (§ 144), un point de la carte a pour coordonnées

$$x = \mathrm{G}, \qquad y = \mathrm{Log\,cot}\,\frac{\lambda}{2}.$$

Dans le cas dont il s'agit, l'angle horaire P est égal à la différence de longitude de l'astre et du point terrestre

$$\mathrm{P} = \mathrm{G}_a - \mathrm{G},$$

ce qui est encore la longitude comptée à partir du méridien de l'astre: donc, pour notre courbe,

$$x = \mathrm{G}_a - \mathrm{G} = \mathrm{P}. \tag{36}$$

La valeur d'y nous donne ensuite

$$e^y = \cot\frac{\lambda}{2}. \tag{37}$$ (1)

(1) L'excentricité n'intervenant pas dans ce calcul, nous reprenons, pour plus de facilité, la notation e de la base des logarithmes népériens.

Des formules connues de la Trigonométrie on déduira

$$\cot\lambda = \frac{e^{2y}-1}{2e^{y}}, \qquad \cos\lambda = \pm\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}, \qquad \sin\lambda = \pm\frac{2e^{y}}{e^{2y}+1}.$$

On ne considèrera, pour plus de simplicité, que le cas où les trois lignes trigonométriques sont positives, c'est-à-dire λ compris entre 0° et 90°. La symétrie du globe par rapport à l'équateur permet d'étendre à l'hémisphère sud les propriétés des figures de l'hémisphère nord, et les colatitudes de plus de 180° n'ont pas de représentation géométrique sur la carte de Mercator.

D'ailleurs, nous avons vu que l'équation de la courbe de hauteur sur la sphère est

$$\cos\zeta = \cos\delta\cos\lambda + \sin\delta\sin\lambda\cos P. \tag{38}$$

Dans cette équation où ζ et δ sont les données, remplaçons les variables P et λ au moyen des formules ci-dessus, il viendra pour l'équation de la courbe tranformée sur la carte

$$e^{2y} - \frac{2\sin\delta\cos x}{\cos\zeta - \cos\delta}e^{y} + \frac{\cos\zeta + \cos\delta}{\cos\zeta - \cos\delta} = 0, \tag{39}$$

et cette équation du deuxième degré en e^{y} peut être facilement résolue.

Les coefficients ne changent pas en remplaçant x par $-x$, la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des y, c'est-à-dire par rapport au méridien de l'astre, ce qui était facile à prévoir. Elle possède aussi un axe de symétrie horizontal. Le produit des racines $e^{y'+y''}$ est en effet égal à $\frac{\cos\zeta + \cos\delta}{\cos\zeta - \cos\delta}$; il est constant, donc $y' + y''$ l'est également, ce qui signifie que les points y' et y'', quel que soit x, sont également distants des deux côtés de la droite $y = \frac{y' + y''}{2}$ parallèle à l'équateur.

Ceci suppose que le produit des racines est positif, sans cela $y' + y''$ n'a plus de sens. Si l'on fait d'abord cette supposition, on trouve les coordonnées de l'extrémité de l'axe horizontal en exprimant l'égalité des racines par la condition connue.

Soient donc y_0, x_0 les coordonnées de l'extrémité de l'axe

horizontal, cette condition est

$$(40) \qquad e^{y_0} = \sqrt{\frac{\cos\zeta + \cos\delta}{\cos\zeta - \cos\delta}} = \frac{\sin\delta \cos x_0}{\cos\zeta - \cos 0},$$

et résolvant

$$(41) \qquad \cos x_0 = \frac{\pm\sqrt{(\cos\zeta + \cos\delta)(\cos\zeta - \cos\delta)}}{\sin\delta}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin(\delta+\zeta)\sin(\delta-\zeta)}}{\sin\delta} = \sqrt{\frac{\cos^2\zeta - \cos^2\delta}{\sin^2\delta}}.$$

Pour que les valeurs de $\cos x_0$ soient réelles et moindres que l'unité, on doit avoir :

1° En même temps

$$\delta + \zeta < 180°, \qquad \delta - \zeta > 0$$

ou

$$\delta + \zeta > 180°, \qquad \delta - \zeta < 0;$$

2° $\sin(\delta+\zeta)\sin(\delta-\zeta) < \sin^2\delta$, ou $\cos^2\zeta - \cos^2\delta < \sin^2\delta$, ce qui arrive toujours, puisque $\cos^2\zeta < 1$.

Si x_0 est petit, ce qui est un des cas les plus intéressants, il vaut mieux le calculer par son sinus. On a

$$(42) \qquad \sin^2 x_0 = 1 - \cos^2 x_0 = \frac{\sin^2\zeta}{\sin^2\delta}, \qquad \sin x_0 = \pm\frac{\sin\zeta}{\sin\delta}.$$

On trouve ensuite

$$(43) \qquad e^{y_0} = \sqrt{\frac{\cos\zeta + \cos\delta}{\cos\zeta - \cos\delta}} = \sqrt{\cot\tfrac{1}{2}(\zeta + 0)\cot\tfrac{1}{2}(\delta - \zeta)} = \cot\tfrac{1}{2}\lambda_0.$$

Le centre est, sur la carte, à la colatitude λ_0.

Pour calculer l'axe vertical de la courbe, on substituera dans l'équation primitive (39), aux coefficients exprimés en ζ et δ leurs valeurs en x_0 et y_0 tirées de (40) et (41),

$$\frac{\sin\delta}{\cos\zeta - \cos\delta} = \frac{e^{y_0}}{\cos x_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos\zeta + \cos\delta}{\cos\zeta - \cos\delta} = e^{2y_0},$$

ce qui nous donne

$$(44) \qquad e^{2y} - \frac{2e^{y_0}}{\cos x_0}\cos x\, e^{y} + e^{2y_0} = 0.$$

Nous avons vu que $x = 0$ est un axe de symétrie : si donc nous faisons $x = 0$, $\cos x = 1$, les deux racines de l'équation obtenue donneront les ordonnées des deux extrémités de cet axe : les deux racines sont Y et Y′ déterminées par

$$e^{Y} = \frac{e^{y_0}}{\cos x_0}(1 + \sin x_0), \qquad e^{Y'} = \frac{e^{y_0}}{\cos x_0}(1 - \sin x_0);$$

on peut donc calculer Y et Y′.

En divisant ces deux valeurs l'une par l'autre, on a

$$(45) \qquad e^{Y-Y'} = \frac{1 - \sin x_0}{1 + \sin x_0}, \qquad Y - Y' = \operatorname{Log}\frac{1 + \sin y_0}{1 - \sin y_0}.$$

Les équations (42) et (45) déterminent les deux demi-axes de la courbe, qui sont x_0 et $\frac{1}{2}(Y - Y')$.

Ces formules peuvent se développer en séries convergentes

$$x_0 = \sin x_0 + \frac{\sin^3 x_0}{1.2.3} + \frac{3\sin^5 x_0}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

$$\tfrac{1}{2}(Y - Y') = \sin x_0 + \frac{\sin^3 x_0}{3} + \frac{\sin^5 x_0}{5} + \ldots.$$

La différence des axes est donnée en parties du rayon : pour l'exprimer en minutes de longitude équatoriale, il faut diviser par $\sin 1'$. Étant donnés ζ et $\hat{z}$, on peut calculer x_0 et la différence, et s'assurer de l'erreur commise.

En divisant l'équation (44) par $e^{y} e^{y_0}$ il vient

$$e^{y-y_0} - \frac{\cos x}{\cos x_0} + e^{-(y-y_0)} = 0.$$

M. Guyou remarque qu'en faisant $y' = y - y_0$, ce qui revient à transporter l'origine des coordonnées au point de l'axe des x qui a pour ordonnée y_0, on a l'équation de la courbe sous la forme

$$e^{y'} + e^{-y'} - \frac{\cos x}{\cos x_0} = 0.$$

Elle ne contient plus qu'un seul paramètre x_0 ; donc toutes les courbes ayant même axe horizontal, c'est-à-dire qui sont inscrites dans un même fuseau de la sphère, sont superposables quelle que soit la latitude de leur centre. D'ailleurs, en vertu de la for-

mule (45), $Y - Y'$ ou l'axe vertical n'est fonction que de x_0; toutes les courbes ayant même axe horizontal ont donc même axe vertical, et sont, par suite, aussi superposables.

Nous avons dû faire plus haut une restriction importante relative à la condition de réalité de $y' + y''$. Montrons maintenant, d'après M. Guyou, comment la discussion peut être conduite d'une façon plus générale. Pour cela, aux paramètres δ et ζ substituons les angles S et N qui représentent les colatitudes des deux sommets de la courbe; S sera la colatitude du point le plus austral, N celle du point le plus boréal. On aura les relations

$$S = \tfrac{1}{2}(\delta + \zeta), \qquad N = \pm\tfrac{1}{2}(\delta - \zeta).$$

Premier cas. — Si l'on suppose d'abord $\delta > \zeta$, nous sommes dans le cas précédent : la courbe de la sphère est extérieure au pôle, et sa transformée est la courbe fermée que nous venons de discuter. Faisons maintenant croître ζ; le sommet nord se rapprochera du pôle qu'il atteindra avec $\delta = \zeta$; sur la carte ce sommet est à l'infini, la fonction cesse donc d'être continue. ζ croissant au delà de δ, le sommet reviendra à une distance finie, mais sur la carte comme sur la sphère sa longitude diffèrera de 180° de celle du sommet sud, la courbe est ouverte. Dans ce cas, pour que l'auxiliaire N reste positif, on prendra $N = \frac{1}{2}(\zeta - \delta)$. Nous allons indiquer la marche des calculs qui sont fort simples, et les résultats. Reprenons le premier cas.

$$S = \tfrac{1}{2}(\delta + \zeta), \qquad N = \tfrac{1}{2}(\delta - \zeta), \qquad \delta = S + N, \qquad \zeta = S - N.$$

L'équation (39), dans laquelle on substitue ces valeurs, donnera

$$\sin S \sin N e^{2y} - \sin(S + N)\cos x\, e^{y} + \cos S \cos N = 0.$$

Comme $\cot S$ et $\cot N$ sont positives, on peut poser

$$\cot S = e^{s}, \qquad \cot N = e^{n};$$

remplaçant les sinus et cosinus par leurs valeurs en fonction de la cotangente et divisant partout par $e^{y - \frac{1}{2}(s+n)}$, on arrive à

$$e^{y - \frac{1}{2}(s+n)} + e^{-\left[y - \frac{1}{2}(s+n)\right]} = \cos x \left[e^{\frac{1}{2}(s-n)} + e^{-\frac{1}{2}(s-n)}\right].$$

Si nous transportons l'origine au point de l'axe vertical qui a

pour ordonnée $s - n$, ce qui revient à substituer aux ordonnées y les ordonnées η telles que $\eta = y - \frac{1}{2}(s + n)$, l'équation devient, en posant $\frac{1}{2}(s - n) = d$,

$$e^{\eta} + e^{-\eta} = \cos x (e^{d} + e^{-d}).$$

Sous cette forme, l'intervention des fonctions hyperboliques, employées par Yvon Villarceau pour la solution de la question, devient évidente. On vérifie immédiatement que la nouvelle origine est un centre et que la courbe a deux axes; le seul paramètre restant est d.

Or, en comparant les formules $e^{y} = \cot\frac{1}{2}\lambda$ et $e^{s} = \cot S$, on voit que, si l'ordonnée y correspond à la colatitude λ, l'ordonnée s correspond à la colatitude $2S = \hat{\varepsilon} + \zeta$, et de même n à $2N = \hat{\varepsilon} - \zeta$; $s - n$ est donc la hauteur de la courbe, $\frac{1}{2}(s - n)$ son demi-axe vertical : donc toutes les courbes ayant même demi-axe vertical sur la carte sont égales.

En faisant $\eta = 0$, on trouvera la valeur du demi-axe horizontal

$$\cos x_0 = \frac{2}{e^{d} + e^{-d}},$$

et l'équation peut se mettre sous la forme déjà examinée (39).

Deuxième cas. — On écrit ici $\frac{1}{2}(\zeta + \hat{\varepsilon}) = S$, $\frac{1}{2}(\zeta - \hat{\varepsilon}) = N$ pour que cot N ait un logarithme, et, en calculant de même, on arrive à

$$e^{y - \frac{1}{2}(s+n)} - e^{-\left[y - \frac{1}{2}(s+n)\right]} = \cos x \left[e^{\frac{1}{2}(s-n)} - e^{-\frac{1}{2}(s-n)} \right].$$

On fera le même changement de coordonnées que plus haut.

Ici, si l'on change η en $-\eta$, $\cos x$ change de signe : le caractère de la symétrie change, elle n'existe plus par rapport à l'axe horizontal, mais le changement de signe de x n'affecte pas $\cos x$, et l'axe vertical reste un axe de symétrie. Ces paramètres gardent leur signification, et les courbes de cette nature inscrites dans des zones dont la largeur sur la carte est la même, sont superposables : cette propriété concerne aussi bien les grands cercles que les petits.

Pour $x = \pm 90^{\circ}$, la courbe a deux points d'inflexion : pour des valeurs $x = 90^{\circ} \pm \xi$, η a les mêmes valeurs numériques avec des signes contraires.

Le cas intermédiaire est celui des courbes de hauteur passant par le pôle; alors $N = o$ et les deux équations se réduisent à

$$e^{y} \cos x = \cot S \qquad \text{ou} \qquad e^{y-s} \cos x = 1 ;$$

$y - s$ est l'ordonnée rapportée à la tangente au sommet unique; l'équation est alors indépendante de tout paramètre et s ne détermine que la position de la courbe : tous ces cercles sont représentés par une courbe unique de forme, asymptote à deux méridiens situés à 90° de part et d'autre du méridien de l'astre.

Applications pratiques. Revenons maintenant aux équations primitives des courbes fermées du premier cas.

1° La distance zénithale est petite, sans que δ le soit.

On peut alors remplacer approximativement la courbe de hauteur par un cercle tracé sur la carte. Il faut pour cela que l'on puisse négliger la différence des deux axes de la courbe, en se tenant dans les limites de l'approximation requise.

De la formule (45) on déduit

$$\tfrac{1}{2}(Y - Y') = \operatorname{Log} \cot\left(45^\circ - \frac{x_0}{2}\right),$$

ce qui indique que $\frac{1}{2}(Y - Y')$ ou le grand axe est au petit axe x_0 dans le même rapport qu'une latitude croissante x_0 serait à une latitude vraie x_0.

On en conclut que si x_0 est pris comme une latitude vraie avec laquelle on entre dans la Table des latitudes croissantes, $\frac{1}{2}(Y - Y')$ sera le nombre de minutes de latitudes croissantes correspondant. Or on peut trouver immédiatement $Y - Y'$, en remarquant que sur la carte les sommets de la courbe ont pour colatitudes $\delta - \zeta$ et $\delta + \zeta$. Calculons ces deux quantités; entrons avec ces colatitudes sphériques dans la Table; nous trouverons à la colonne des latitudes croissantes deux nombres L et L' dont la différence exprime, en minutes de l'équateur, la longueur $Y - Y'$; on calcule $\frac{1}{2}(Y - Y')$, on le considère comme une latitude croissante qu'on cherche dans la deuxième colonne; la latitude sphérique qui y correspond dans la première colonne est x_0. On prendra

$$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(Y - Y') + x_0\right]$$

pour rayon du cercle qui remplacera la courbe de hauteur sur la

carte. Pour trouver son centre, on calcule λ_0 par la formule (43), ou plus simplement en faisant la moyenne de Y et Y′ trouvés, cherchant cette moyenne dans la colonne des latitudes croissantes et prenant la latitude sphérique correspondante comme latitude du centre, dont la longitude est d'ailleurs G_a. Ayant ainsi le centre et le rayon, le cercle est déterminé. Si les deux parallèles de $\delta + \zeta$ et $\delta - \zeta$ sont sur la carte dont on se sert, le parallèle du centre passe à égale distance des deux. Si l'on prend pour centre le point qui a pour colatitude δ, l'erreur commise est la différence entre δ et la moyenne $\frac{1}{2}(Y - Y')$; elle croît à mesure que δ décroît; elle est nulle à l'équateur.

On voit facilement que l'erreur résultant de la substitution de ce cercle à la courbe est maximum pour les quatre points cardinaux, et que lorsqu'on relève l'astre aux points intercardinaux, elle est sensiblement nulle. On voit aussi qu'on peut aller jusqu'à 10° de distance zénithale sans introduire d'erreur supérieure aux erreurs ordinaires du point à la mer.

Il faut prendre ici les latitudes croissantes calculées pour la sphère telles qu'elles sont données, par exemple, dans les Tables de Callet. Si l'on avait les Tables de Bégat ou de Mendoza calculées avec l'aplatissement $\frac{1}{321}$, on ajouterait aux nombres de la Table les petites corrections du tableau suivant :

Latitudes.	Correction des latitudes croissantes.
0°.....	+ 0′,00
5.....	+ 1 ,86
10.....	+ 3 ,75
15.....	+ 5 ,54
20.....	+ 7 ,28

Pour faciliter les applications, nous avons calculé la petite Table ci-après, donnant pour diverses valeurs de x_0 les valeurs de $\frac{1}{2}(Y - Y') - x_0 = \varepsilon$. ε est toujours positif.

x_0	ε	x_0	ε	x_0	ε	x_0	ε
0°...	+ 0′,00	5°...	+ 0′,38	10°...	+ 3′,10	15°...	+ 10′,46
1....	0 ,01	6....	0 ,66	11....	4 ,12	16....	12 ,72
2....	0 ,04	7....	1 ,06	12....	5 ,34	17....	15 ,29
3....	0 ,08	8....	1 ,59	13....	6 ,79	18....	18 ,20
4....	0 ,19	9....	2 ,26	14....	8 ,49	19....	21 ,45

2° On peut aussi se proposer de substituer à la courbe son cercle osculateur en calculant le rayon de courbure. Alors, sauf le cas que nous venons d'examiner, le centre du cercle en question tomberait généralement en dehors des limites de la carte, ou du moins son rayon serait fort grand. Mais on peut se proposer de tracer le cercle osculateur par points.

Puisque la tangente à la courbe de hauteur est normale à la direction azimutale de l'astre, on a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} A,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dA}{\cos^2 A\, dx},$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\sin A}{\sin \delta} = \frac{\sin x}{\sin \zeta},$$

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{\cos x \sin \delta}{\cos A \sin \zeta}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression du rayon de courbure,

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

il vient

$$\rho = -\frac{\sin \zeta}{\cos x \sin \delta} = -\frac{\sin x_0}{\cos x}.$$

Le point rapproché R est sur la circonférence et le centre du cercle osculateur est en un point C de la normale en R, c'est-à-dire de la direction azimutale de l'astre. Soit à trouver un autre point M de ce cercle. De ce point supposé construit abaissons (*fig.* 69) une perpendiculaire MP sur RC, soient RM $= r$, RP $= \xi$, on aura

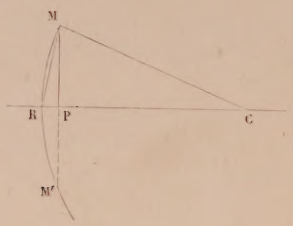
$$r^2 = 2\rho\xi \qquad \text{ou bien} \qquad \xi = \frac{r^2 \cos x}{2 \sin x_0},$$

et en milles

$$\xi = \frac{r^2 \cos x \sin 1'}{2 \sin x_0}.$$

On se donne r évalué en minutes de longitude, on calcule RP : on peut donc placer le point P, élever la perpendiculaire PM, construire M et son symétrique M′ et tracer l'arc de cercle à vue ou avec une règle pliante. Le tracé à vue résulte fort simplement de la remarque que l'arc de cercle est le segment capable de l'angle MRM′. Pour en trouver un point, faites tourner MR autour de M

Fig. 69.



d'un angle ε, puis M′R autour de M′ du même angle en sens inverse ; l'intersection de ces deux droites est un point du cercle.

Cette formule peut évidemment servir à calculer l'erreur commise en employant la droite de hauteur au lieu de la courbe.

Le cercle osculateur peut remplacer la courbe dans un rayon de 400 milles sans qu'il en résulte une erreur de plus de $0',5$.

159. — Routes orthodromiques.

La loxodromie n'est pas le chemin le plus court d'un point à un autre sur la sphère. La Navigation trouve souvent profit à suivre l'arc de grand cercle : mais on perd alors l'avantage d'une route constante. On trace ordinairement l'arc de grand cercle, et on le remplace dans la pratique par une suite d'arcs de loxodromie qui sont les cordes de la projection du grand cercle sur la carte marine. On garde la même route pendant une journée, puis on détermine pour le jour suivant une route nouvelle. On peut opérer graphiquement ou par le calcul.

Un moyen graphique simple consiste dans l'emploi de la projection stéréographique, surtout quand on dispose du planisphère Keller. Le problème à résoudre est celui-ci. Deux points étant

donnés par leurs coordonnées géographiques, déterminer l'arc de grand cercle qui les joint, et les angles que cet arc fait avec les méridiens de départ et d'arrivée. Ce sont ces angles surtout qui sont utiles, car ils déterminent les routes à faire.

Sur la projection stéréographique, nous savons placer les points au moyen de leurs coordonnées; nous savons aussi tracer le grand cercle qui passe par deux points. Pour transporter ce grand cercle sur la carte marine, nous chercherons les colatitudes de ses intersections avec des méridiens connus convenablement espacés, problème que nous avons traité, puisque nous savons déterminer la grandeur de l'arc de grand cercle qui joint deux points : ces deux points sont ici l'intersection donnée et le pôle. En reportant les points d'intersections au moyen de leurs coordonnées sur la carte marine, on aura une série de points que l'on joindra par une courbe continue : les cordes correspondant au point de chaque jour se construisent facilement et l'on relève sur la *carte leur azimut qui est précisément la route à faire.*

On peut aussi recourir à l'Atlas orthodromique universel de M. Keller.

La route orthodromique une fois construite, si l'observation du point démontre qu'on s'en est écarté, il ne sera pas nécessaire, on le comprend bien, de s'astreindre à y revenir : mais, du point de départ nouveau, on calculera une nouvelle route orthodromique vers le méridien de destination. Le tracé précédent donne des indications sur cette route; on la tracera de sentiment, en remarquant que sa forme est à peu près la même que celle de la route primitive, et qu'elle doit passer par le point où l'on se trouve et le point d'arrivée. La *projection gnomonique* (§ 149) fournit aussi un moyen simple de tracer un grand cercle. Sur la projection, le grand cercle est une droite. Si donc on a une projection graduée, sur laquelle méridiens et parallèles sont tracés de degré en degré, on y relève en latitude les intersections successives des méridiens par le grand cercle et l'on reporte ces points sur la carte de Mercator. On peut aussi trouver directement les angles de route, aussi bien en projection stéréographique que gnomonique; mais il est inutile de s'astreindre à ce supplément de calcul : la route tracée donne avec toute la précision nécessaire les caps auxquels on doit gouverner.

Les cartes n^{os} 3680, 3681 et 3682 de l'Hydrographie française sont

construites en projection gnomonique, elles permettent de résoudre tous les problèmes de ce genre.

Voici comment on traiterait la même question par le calcul.

Deux points sont donnés par leurs longitudes G, G′ et leurs colatitudes λ, λ'. On fera la différence G — G′ ou G′ — G; c'est toujours la différence plus petite que 180° qui doit être employée.

Soit P cette différence. On obtient la distance d des deux points par la formule

$$\cos d = \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \cos P,$$

que l'on peut calculer soit directement, soit en posant

$$\sin\lambda' \cos P = m \sin M,$$
$$\cos\lambda' = m \cos M,$$

d'où

$$\cos d = m \cos(\lambda - M),$$

avec

$$\operatorname{tang} M = \frac{\sin\lambda' \cos P}{\cos\lambda'}, \qquad m = \frac{\sin\lambda' \cos P}{\sin M} = \frac{\cos\lambda'}{\cos M}.$$

Les angles de route, qui sont les azimuts de d sur les deux méridiens de départ et d'arrivée, se calculeront par les analogies de Néper

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A_1 + A'_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda - \lambda')}{\cos\frac{1}{2}(\lambda + \lambda')} \cot\tfrac{1}{2} P,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A_1 - A'_1) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\lambda + \lambda')} \cot\tfrac{1}{2} P.$$

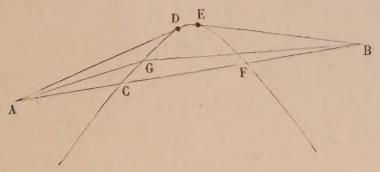
Il va sans dire que l'on commencera par s'assurer que la route en question ne traverse ni terres ni régions inaccessibles. Si une route orthodromique devait faire passer trop près du pôle, dans des régions où l'on fût exposé à rencontrer des glaces, des nuits prolongées ou des mauvais temps persistants, il faudrait la modifier.

On résout habituellement cette difficulté en décomposant la route en trois tronçons : les deux portions extrêmes sont les parties de l'arc de grand cercle en dehors du parallèle limite : la portion intermédiaire est ce parallèle limite lui-même.

Il est aisé de voir que cette solution n'est pas la meilleure. D'une part, elle fait rester assez longtemps sur ce parallèle limite,

c'est-à-dire dans le voisinage des dangers ou des inconvénients qu'on veut précisément éviter; et, d'autre part, elle ne donne pas le plus court chemin. Supposons, en effet, les points placés sur la projection gnomonique en A et B (*fig.* 70), et soit CDEF l'arc d'hyperbole qui représente le parallèle limite qu'on ne doit pas dépasser dans le Sud. De A et B nous menons des tangentes AD, BE à cette courbe, il est clair que l'arc de grand cercle AD est plus court que la somme de l'arc de grand cercle AC et de l'arc de parallèle CD, de même pour EB $<$ BF $+$ FE. En suivant l'arc de grand cercle de A en D, le parallèle de D en E et l'arc de grand cercle EB, on fera donc une route plus courte que celle qui résulte de la

Fig. 70.



règle admise, et l'on sera moins longtemps sur le parallèle limite. Cette simple considération empêchera aussi de chercher à remplacer la route directe AB par deux arcs de grand cercle qui se coupent en un point du parallèle limite. Il est clair, en effet, que si nous joignons A et B à un point quelconque G du parallèle limite, une au moins de ces lignes passera dans la zone défendue.

160. — Levés géodésiques.

Il n'entre pas dans notre programme de traiter avec détail la Topographie proprement dite. Aussi n'avons-nous pas cité, parmi les projections des cartes, le système dit des coordonnées rectangulaires. Si nous l'omettons, aussi bien que les calculs qui s'y rapportent, ce n'est pas tant à cause de son manque de rigueur scientifique, que parce que son application principale est purement graphique, et revient à considérer la Terre comme plane dans l'étendue que l'on envisage.

Il n'existe pourtant pas de ligne de démarcation bien tranchée

entre la Géodésie et la Topographie. En principe, pour faire la description géographique d'un pays, on doit tendre par tous les moyens dont on dispose à se rapprocher du mode de travail employé pour les levés rigoureux et précis.

Voici en résumé la marche à suivre.

On mesure d'abord (¹) une base avec toute la précision possible. Partant de là, on établit un réseau de triangles principaux, dont les côtés sont aussi grands que le permet la configuration du pays, dont la forme se rapproche le plus qu'on peut de celle du triangle équilatéral, dont on observe les trois angles, et dont le premier côté est la base mesurée, de sorte qu'on calcule tous les côtés successivement par la règle de la proportionnalité des sinus. L'orientation de l'ensemble se déduit de la détermination de l'azimut d'un quelconque des côtés de la triangulation. Cette triangulation sert de point de départ à une triangulation secondaire, destinée à rattacher les autres points remarquables, signaux naturels ou artificiels, aux triangles principaux, tant par des relèvements pris aux sommets de ceux-ci, que par des angles mesurés aux points secondaires. C'est à l'ensemble des points ainsi déterminés qu'on rattache par des relèvements tous les détails topographiques et hydrographiques. La topographie se complète par un nivellement, et la détermination d'une ou plusieurs positions géographiques absolues vient couronner l'œuvre en assignant à l'ensemble sa position à la surface du globe.

Nous allons résumer brièvement et sans démonstration les principales formules qu'on aurait à employer, et nous y joindrons l'exposé sommaire des méthodes graphiques qui concourent à fixer les détails.

1° *Calcul des triangles.*

On connaît la base a et les trois angles du triangle ABC, calculer les côtés b et c.

On commence par faire la somme des trois angles; si la ferme-

(¹) L'ordre que nous donnons est celui de l'importance des travaux ou ordre logique : on est souvent amené dans la pratique à suivre une marche différente, à lever par exemple la topographie avant d'établir les grands triangles, ou à former ceux-ci avant d'avoir mesuré la base. Ceci dépend essentiellement des circonstances.

ture du triangle n'est pas exacte, c'est-à-dire si

$$A + B + C = 180^\circ + \varepsilon,$$

on retranche $\frac{1}{3}\varepsilon$ de chaque angle avant de l'employer dans le calcul, puis on cherche les côtés b et c par les formules

$$b = \frac{a}{\sin A}\sin B, \qquad c = \frac{a}{\sin A}\sin C.$$

2° *Réduction des directions observées au centre de la station.*

r distance de l'instrument au centre; C lecture du centre; V lecture du point visé, situé à la distance d; s réduction au centre, c'est-à-dire correction de la lecture :

$$\sin s = \frac{r\sin(V - C)}{d} \qquad \text{ou} \qquad s = \frac{r\sin(V - C)}{d\sin 1''}.$$

En tenant compte des signes algébriques de $\sin(V - C)$, la formule est générale, quel que soit le sens de la graduation.

3° *Calcul des longitudes, colatitudes et azimuts des sommets d'une série de triangles.*

G, longitude du sommet dont la position géographique est donnée; λ sa colatitude, A azimut du côté qui le joint au sommet à déterminer, K distance linéaire des deux points, ou longueur en mètres du côté du triangle;

G', λ', A' mêmes données relatives au point à déterminer;

ρ' rayon de courbure de la section perpendiculaire au méridien, ou grande normale au point de départ.

$$u'' = \frac{K}{\rho'\sin 1''},$$

$$\lambda' = \lambda + u''\cos A(1 + e^2\sin^2\lambda) + \frac{\sin 1''}{2}u''^2\sin^2 A\cot\lambda(1 + e^2\sin^2\lambda),$$

$$G' = G + \frac{u''\sin A}{\sin\lambda'},$$

$$A' = 180^\circ + A - (G' - G)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda').$$

Moyennant l'application des conventions relatives aux signes de A et de G, comptés positivement vers l'Ouest, en partant du Sud pour A, et en comptant les colatitudes du pôle nord, ces formules sont générales pour les deux hémisphères; u'' est toujours positif.

161. — Construction d'un relèvement. Correction Givry.

Si d'un point connu on a déterminé l'azimut d'un autre point, cela donne un lieu géométrique de ce dernier. Inversement, si du point à placer on a déterminé l'azimut d'un point connu, cela détermine encore un lieu du point inconnu.

En Topographie, on ne considère que des points suffisamment rapprochés pour qu'on puisse supposer que la surface de la Terre, dans la région considérée, se confond avec le plan qui lui est tangent. Le plan étant supposé orienté, pour y représenter le lieu fourni par l'observation d'azimut, on trace une droite faisant avec le méridien du point connu un angle égal à cet azimut : si le relèvement a été pris du point inconnu, on le porte encore à partir du point connu, mais après lui avoir ajouté 180°. L'azimut peut être déterminé astronomiquement : il peut aussi être observé à la boussole, mais avec une précision beaucoup moindre. En mer, on se contente de ce degré de précision et l'on admet l'égalité des relèvements inverses à 180° près, au moins pour la Navigation courante.

La sphéricité de la Terre exige qu'on modifie ce procédé quand la distance entre les points dépasse les limites d'un plan topographique. Comme il s'agit principalement de constructions graphiques, on peut faire abstraction de l'aplatissement. Nous ne considérerons ici que le cas où l'on opère sur une projection de Mercator.

Une direction de visée sur le globe est contenue dans un plan vertical, et son intersection avec la surface est un grand cercle : l'angle de ce grand cercle avec le méridien astronomique est l'azimut astronomique de la ligne de visée. En remplaçant, pour la construction, cet arc par la droite loxodromique, on commet une erreur que nous allons évaluer.

Soient A et B deux points de la Terre; A l'azimut de B sur l'horizon de A, et A′ l'azimut de A sur l'horizon de B : le triangle ayant pour sommets ces deux points et pour troisième sommet le pôle a pour angle au pôle la différence P des longitudes de A et B: l'angle en A est $180° - A$, et l'angle en $B = A' - 180°$; en appliquant la troisième analogie de Néper à ce triangle et prenant les

inverses des deux membres, on a

$$\cot\tfrac{1}{2}(A'-A) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')}{\cos\frac{1}{2}(\lambda-\lambda')}.$$

Si A et B étaient infiniment voisins, on aurait $A' - 180^\circ = A$; posons donc $A' - A = 180^\circ - \varepsilon$, ε étant une très petite quantité, remarquons que $\frac{1}{2}(\lambda - \lambda')$ est très voisin de zéro, et que P est petit, on aura

$$\varepsilon = P\cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda').$$

Cette quantité est nommée *convergence des méridiens* (on reconnaît la correction d'azimut donnée plus haut). C'est la différence entre les gisements réciproques de deux signaux, si l'on compte ces gisements des deux points cardinaux opposés. Sur une Carte réduite, les gisements ainsi construits par la loxodromie sont égaux.

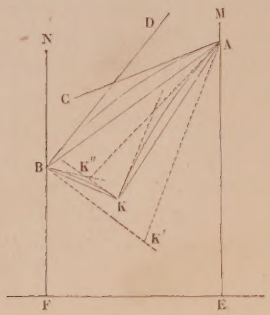
Si nous traçons sur cette Carte la courbe transformée de l'arc de grand cercle, elle peut être considérée comme se confondant avec son cercle osculateur, en raison de la proximité supposée des points, et ses deux angles de contingence sont égaux. Or, en vertu de la propriété de cette projection d'être orthomorphe, et d'après ce qui vient d'être dit, le relèvement de B vu de A est la tangente en A à cet arc; celui de A vu de B est la tangente en B. La somme de ces deux angles représente donc la différence ε ci-dessus, et l'on a $CAB = DBA = \frac{1}{2}\varepsilon$. L'azimut réellement observé en A est CAE; pour que la droite partant de A passe par la projection de B, il faut retrancher $\frac{1}{2}\varepsilon$ de l'azimut observé. La différence P étant exprimée en minutes d'arc, ε le sera également. Cette correction est connue sous le nom de *correction Givry,* du nom de l'ingénieur hydrographe qui, le premier, en a montré la nécessité et calculé l'expression.

Pour en trouver la valeur numérique, il faut avoir déduit d'une première construction approchée la différence de longitude et les colatitudes des deux points.

Pour se rappeler le signe de la correction, il suffit de remarquer que les transformées des arcs de grand cercle sont concaves vers l'équateur. En appliquant la correction au relèvement pris de A, elle doit avoir pour effet de mettre B plus près de l'équateur que ne ferait le relèvement vrai.

Un signal peut être placé par deux azimuts déterminés en deux points connus, en appliquant la correction comme il vient d'être dit. Il peut être également fixé par les azimuts de deux points connus qu'on aura observés du signal à déterminer. Mais, dans ce dernier cas, il faut appliquer à l'azimut mesuré la correction Givry en sens inverse. Si donc du point K on a déterminé les azimuts de A et de B, il faut leur appliquer la correction de manière à trouver pour K une position plus élevée en latitude que celle K′ que donneraient les azimuts qu'on y a observés. Si, au contraire, on a pris en A et

Fig. 71.



en B les azimuts de K, la correction doit être appliquée de manière à rapprocher de l'équateur le point K″ que donneraient sans correction les relèvements observés en A et en B.

Cette même correction doit encore s'appliquer à la construction dont il va être parlé tout à l'heure, du segment capable d'un angle donné : on part toujours d'une première position approximative, et l'on corrige l'angle total d'une quantité égale à la somme ou à la différence des corrections afférentes à ses côtés, selon les situations respectives en longitude et latitude.

Pour calculer la position d'un point, on forme le triangle ABK au moyen des différences entre l'azimut de AB et ceux du point K. On connaît dans ce triangle la base AB et les deux angles adjacents : on peut donc calculer les côtés AK et BK par l'analogie des sinus ; connaissant la distance BK et l'azimut de cette ligne, le point K est déterminé. On peut évaluer AB en mètres ou mieux en minutes

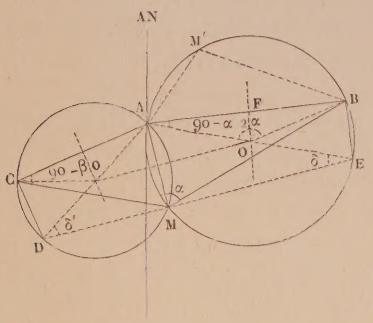
équatoriales. Ce procédé de calcul sera avantageusement remplacé par celui que nous donnons plus loin. La correction Givry a surtout de l'intérêt au point de vue des constructions graphiques.

162. — Construction et calcul d'un point par les segments capables.

Le problème est celui-ci : deux points étant placés sur un plan, décrire le lieu des points d'où l'on a mesuré entre ces deux points un angle donné.

Soient A et B les points entre lesquels on a mesuré un angle α. Au milieu de la droite AB on élève une perpendiculaire FO. On

Fig. 72.



fait l'angle $BAE = 90° - \alpha$; de l'intersection de AE avec FO comme centre, et avec $AO = OB$ comme rayon, on décrit un cercle : on voit immédiatement que d'un point quelconque M de l'arc AMB, la droite AB est vue sous l'angle α. D'un point M′ de l'arc opposé, on voit cette droite sous l'angle $180° - \alpha$. Du point M, le point A est vu à gauche : donc pour choisir celle des deux portions de la circonférence qui convient à la solution cherchée, on prendra pour point de départ le point de gauche; on observera que, pour que A soit vu à gauche de B, il faut être en dessous de la droite AB : c'est donc à partir de AB vers la droite qu'on mesurera l'angle $90° - \alpha$.

Si α est plus grand que 90°, le point O sera au-dessus de AB : on fait rentrer ce cas dans le précédent en convenant de compter les angles positivement de A vers la droite de l'observateur et négati-

vement vers sa gauche, la ligne AB étant le zéro. Il n'y a d'ailleurs jamais à considérer d'angles supérieurs à 180°, car ce n'est que pour des angles inférieurs à deux droits que les mots : objet de gauche et de droite ont une signification. Si l'on avait mesuré de A vers B un angle de 230° en allant vers la droite, il y aurait à considérer un angle de 130°, B devenant le point de gauche.

Si donc d'un point inconnu M on a mesuré les distances angulaires d'un point A à deux autres points B et C situés dans le même plan, on obtiendra la position du point M en effectuant la construction précédente d'abord pour AB, avec l'angle α, puis pour AC avec l'angle β : l'intersection des deux circonférences donnera le point M.

On connaît un grand nombre de solutions de ce problème, qui est désigné à l'étranger sous le nom de problème de Pothenot (*Voir* le *Traité d'Hydrographie* de M. Germain.) : nous en indiquerons encore une qui peut être construite sans le secours du compas.

Remarquons que la ligne des centres OO' est perpendiculaire au milieu de la droite AM. Si nous prolongeons les rayons AO et AO' jusqu'aux points E et D des circonférences respectives, les angles AME, AMD, ABE, ACD inscrits dans des demi-circonférences, sont droits : de là la construction : élever en B une perpendiculaire BE à AB, et déterminer le point E tel que EAB soit égal à $90° - \alpha$; faire de même $CAD = 90° - \beta$ et déterminer le point D; joindre DE, et abaisser de A une perpendiculaire sur cette droite; le pied de cette perpendiculaire sera le point M.

La construction montre :

1° Que le point O est d'autant mieux déterminé que α diffère moins d'un droit ;

2° Que si α est petit, le centre s'éloigne beaucoup de AB, et se trouve de moins en moins bien déterminé ;

3° Que cette indétermination produit une incertitude correspondante sur le rayon du cercle ;

4° Mais que l'incertitude qui en résulte pour le point M lui-même est maximum quand M se trouve voisin de la perpendiculaire FO, tandis qu'elle diminue à mesure que M restant sur le même lieu se rapproche de A ou de B ;

5° Que pour un angle très obtus, l'incertitude sur le rayon est du

même ordre, mais que l'incertitude sur le lieu même est très réduite;

6° Que le problème est indéterminé quand les points A, B, C, M sont sur une même circonférence;

7° Que l'intersection M est d'autant mieux déterminée, toutes autres choses égales, que les deux cercles se coupent sous un angle plus voisin d'un droit.

Cette construction peut se traduire en calcul. Soient données les distances $AB = a$, $AC = b$ et l'angle $CAB = A$. Les diamètres des cercles sont respectivement

$$AE = \frac{a}{\sin\alpha} = a', \qquad AD = \frac{b}{\sin\beta} = b'.$$

L'angle DAE est égal à

$$A - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = A + \alpha + \beta - 180^\circ = A'.$$

On peut donc calculer les angles $ADE = \delta'$ et $AED = \delta$ par les relations connues

$$\delta + \delta' = 180^\circ - A',$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = \frac{b' - a'}{b' + a'}\cot\frac{A'}{2},$$

et l'on obtiendra alors $AM = a' \sin\delta = b' \sin\delta'$.

Pour que A, B, C soient placés sur la carte, il faut connaître de plus l'azimut de l'un des côtés, AB par exemple; on en déduira l'azimut de AM en remarquant que la différence des gisements AB et AM est l'angle $BAM = 180^\circ - (\alpha + \delta)$.

Le point M est ainsi complètement déterminé.

L'inconvénient de cette méthode est de ne pas se prêter facilement aux généralisations de signes et d'exiger la construction d'une figure pour se guider dans chaque cas particulier.

Il existe une méthode plus générale, due à Gauss : nous ne l'indiquons pas, parce qu'elle se rapporte plus spécialement à la représentation des points par coordonnées rectangulaires dont nous avons, à dessein, omis la théorie.

163. — Construction de trois points inaccessibles par trois stations.

Il est un cas assez simple dans lequel il est possible de construire une figure semblable à celle du terrain au moyen de trois stations indépendantes les unes des autres. Cette construction a été employée d'abord pour le levé sous voiles, et la solution rigoureuse en est due à l'ingénieur hydrographe Vincendon-Dumoulin. Elle s'appliquera pourtant très bien et avec plus d'exactitude à terre, par exemple si l'on parcourt un pays boisé, et qu'on fasse station à des points qui ne se voient pas les uns des autres, mais d'où l'on découvre des sommets lointains inaccessibles. Ceci dit, nous allons donner la solution en supposant, pour la clarté du langage, qu'on effectue un levé sous voiles ou vapeur.

Le problème se pose ainsi :

Des trois points à la mer A, B, C, on a pris les angles que font deux à deux trois points de terre D, E, F et les relèvements astronomiques d'un de ces points (d'où l'on déduit ceux des autres); construire sur le papier un hexagone ABCDEF semblable à celui du terrain.

Dans des *Considérations sur le levé sous voiles,* MM. Ploix et Halphen ont montré que ce problème est en général déterminé et n'admet qu'une solution, sauf le cas où les six points appartiennent à une courbe du second degré. On ne peut pas savoir *a priori* si l'on est dans ce cas d'exception, mais on peut éviter dans la pratique de s'y mettre. Il suffit pour cela, après avoir fait les deux premières stations, de construire grossièrement, avec la route estimée, ces deux stations et les trois points de terre, de tracer la courbe du second degré qui passe par ces cinq points, et de faire la troisième station en dehors de cette courbe. On se rappellera que les systèmes de deux lignes droites parallèles ou non, sont des cas particuliers des courbes du second degré. On sera dans de bonnes conditions si, par exemple, la station intermédiaire B à la mer fait avec les deux autres un angle dont les côtés soient dirigés dans le même sens que ceux de l'angle formé par les droites ED et EF.

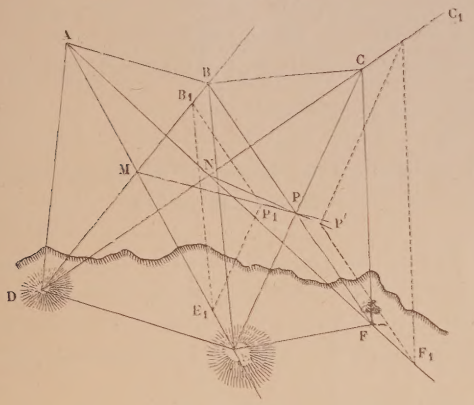
Néanmoins, comme on ne peut pas toujours choisir les points de terre d'une façon convenable, il est bon, en prévision du cas

d'indétermination, et aussi pour se ménager une vérification toujours nécessaire, de prendre plus de trois points principaux à terre et de faire plus de trois stations principales à la mer. L'expérience prouve qu'on n'est jamais embarrassé de la surabondance des données recueillies, tandis que souvent, faute d'une station ou d'un angle, on éprouve la plus grande difficulté à construire sa Carte.

Nous allons maintenant donner la solution graphique du problème posé plus haut.

Supposons le problème résolu et la figure construite. Puisqu'on

Fig. 73.



s'est donné arbitrairement la base AD (*fig.* 73) et que les gisements de toutes les droites joignant chacune des stations à la mer à chacun des points de terre sont connus, on peut d'abord tracer en direction les lignes AE, AF, BD et CD, qui aboutissent en A et en D. Il reste à placer les droites BE, BF, CE, CF dont la direction est connue, mais dont la position ne l'est pas. Si l'on connaissait le point P d'intersection de BF et de CE, le problème serait résolu, puisqu'en menant par ce point ces deux droites dans la direction connue, elles couperaient les droites déjà tracées aux points B, C, E, F.

Le point P se trouve sur le lieu des sommets d'un triangle semblable à BPE, inscrit dans l'angle BME, et de même sur le lieu des sommets des triangles semblables à CPF, inscrits dans l'angle CNF.

Chacun de ces lieux est une droite aisée à construire : prenons le premier. Soit B_1 un point arbitraire sur DB; menons, par B_1, B_1E_1 dans la direction connue BE, et B_1P_1 dans la direction BF, et par E_1, E_1P_1 parallèle à EC; le lieu cherché passe évidemment par P_1 et par M : c'est donc la droite MP_1. On construira d'une manière analogue la droite NP′ et l'intersection de ces deux droites donnera P. Le problème sera ainsi résolu.

On voit que, pour que la construction puisse se faire, les deux droites MP, NP doivent se couper. Si elles étaient parallèles, le problème serait impossible : mais cela n'arriverait que s'il y avait erreur dans les données, puisqu'avec des angles exacts le problème a nécessairement une solution. Seulement il peut être indéterminé, et alors les droites MP, NP se confondent : c'est précisément ce qui arrive quand les points A, B, C, D, E, F sont sur une même conique.

164. — Mesure des bases par les moyens rapides. Calcul des points.

La mesure d'une base est une opération longue et délicate. Quand on ne peut pas s'en procurer une par les méthodes classiques, ce qui est généralement le cas en voyage, on arrivera encore à des résultats très acceptables par une des méthodes que nous allons exposer.

1° *Mesure d'une base par des observations astronomiques.*

L'opération consiste à déterminer les coordonnées géographiques des deux points et l'azimut de la direction qui les joint, et à en conclure leur distance. Elle suppose la connaissance des résultats de la Géodésie, relativement à la forme et aux dimensions de la Terre. Mais ces résultats viendraient à être modifiés, que cela n'aurait pas d'influence sensible sur les positions géographiques des points de la triangulation appuyée sur cette base.

Pour le calcul, on part des formules du n° 160. Dans ces formules la distance des deux points est

$$K = u'' \rho' \sin 1''$$

et sera déterminée si l'on connaît u''. Or, dans les valeurs des

λ', G′ et A′, on voit qu'il suffit de connaître deux des quantités $\lambda' - \lambda$, G′ − G, A′ (ou A) pour pouvoir calculer u''.

Si l'on connaît G′ − G, λ et A, on calculera u'' par la formule qui donne G′, et en le portant dans la précédente, on trouvera λ'. Si l'on a déterminé les colatitudes et l'azimut A, la formule en λ' donnera u''; pour la facilité du calcul, on cherchera d'abord u'' approché en négligeant le dernier terme de λ', puis on substituera dans ce terme cette valeur approchée, ce qui fournira une nouvelle approximation.

2° *Calcul d'un triangle sphéroïdique et de la position géographique du troisième sommet.*

Si maintenant, des extrémités A et B d'une base ainsi obtenue, on a observé les azimuts d'un troisième point C, on pourra calculer la longitude et la latitude de ce point. On commence par calculer, si l'on ne les a déjà tirés d'un calcul antérieur, la valeur de u'' et les angles A et A′ par les formules données au n° 160.

Ce calcul se simplifie beaucoup quand le deuxième terme de $\lambda' - \lambda$ est plus petit que les erreurs d'observation de λ et λ', ce qui permet de poser

$$\operatorname{tang} A = \frac{G' - G}{\lambda' - \lambda} \sin\lambda' (1 + e^2 \sin^2\lambda),$$

$$\operatorname{tang} A' = \frac{G' - G}{\lambda' - \lambda} \sin\lambda (1 + e^2 \sin^2\lambda'),$$

et la troisième formule donne une vérification du calcul. On trouve alors, avec vérification,

$$u'' = \frac{(G' - G)\sin\lambda'}{\sin A} = \frac{\lambda' - \lambda}{\cos A (1 + e^2 \sin^2\lambda)}.$$

Cela posé, on formera les angles en A et B du triangle ABC. L'angle α en A est la différence entre la direction AB et l'azimut mesuré A_1, du point C. L'angle β en B est la différence entre A′ et l'azimut A'_1 de C, mesuré en B. On calcule ensuite

$$u''_1 = \frac{u'' \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \qquad u''_2 = \frac{u'' \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)};$$

et les coordonnées géographiques de C sont données, avec vérifi-

cation, par les formules

$$\lambda_c = \lambda + u''_1 \cos A_1 (1 + e^2 \sin^2 \lambda) = \lambda' + u''_2 \cos A'_1 (1 + e^2 \sin^2 \lambda'),$$

$$G_c = G + \frac{u''_1 \sin A_1}{\sin \lambda_c} = G' + \frac{u''_2 \sin A'_1}{\sin \lambda_c}.$$

La Table V donne les logarithmes de $1 + e^2 \sin^2 \lambda$.

Voici un exemple de détermination de base et de calcul de triangle sphéroïdique.

De Camranh et de Thré, deux points dont la position géographique a été déterminée directement, on a relevé le sommet de l'île Hon-Naï. Les azimuts de Hon-Naï ont été calculés, et les données sont résumées dans le tableau qui suit :

Thré A ...	$\lambda = 77°47'10'',0$	$G = 253°6'5'',0$	$A_1 = 339°16'2''$
Camranh B	$\lambda' = 78\ 8\ 14\ ,8$	$G' = 253\ 4\ 21\ ,4$	$A'_1 = 197\ 50\ 5$
	$\lambda' - \lambda = 21'\ 4'',8$	$G' - G = -1'43'',6$	

La différence en longitude entre A et B est assez petite pour qu'on puisse négliger le dernier terme de la colatitude. Alors

$$\tang A = \frac{G' - G}{\lambda' - \lambda} \sin \lambda' (1 + e^2 \sin^2 \lambda').$$

Calcul de la base et des angles.

$\log (G' - G)$.....	2,01536 (−)		
$\log (\lambda' - \lambda)$.. ...	3,10202 (+)		
	8,91334 (−)		8,91334 (−)
$\log (1 + e^2 \sin^2 \lambda')$	0,00269	$\log (1 + e^2 \sin^2 \lambda)$	0,00269
$\log \sin \lambda$.....	9,99006 (−)	$\log \sin \lambda'$	9,99062 (−)
$\log \tang A'$.....	8,90609	$\log \tang A$.....	8,90665
$A' = 175°23'40''$		$A = 355°23'19''$	
$A'_1 = 197.50.5$		$A_1 = 339.16.2$	
$\beta = 22°26'25''$		$\alpha = 16°7'17''$	

$16°7'17''$
$22.26.25$

$38°33'42'' = \alpha + \beta.$

$\log (G' - G)$	2,01536	$\log (\lambda' - \lambda)$.....	3,10202
$\log \sin \lambda'$....	9,99062	$\operatorname{colog} \cos A$.....	0,00141
$\operatorname{colog} \sin A$..	1,09476	$\operatorname{colog} (1 + e^2 \sin^2 \lambda)$	9,99731
$\log u''$.....	3,10074		3,10074 Vérification du calcul.

Calcul du triangle (la désignation log est sous-entendue).

u''.....	3,10074		
$\sin(\alpha+\beta)$	9,79474		
	3,30600		
$\sin\beta$.....	9,58175		
u''_1	2,88775		2,88775
$\sin A_1$.....	9,54901 (—)	$\cos A_1$.....	9,97092 (+)
$\frac{1}{\sin\lambda_c}$	0,00962	$1+e^2\sin^2\lambda$	0,00269
	2,44638 (—)		2,86136
	$-4'39'',5$		$+12'\ 6'',7$
G	$253°\ 6\ \ 5\ ,0$	λ	$77°\ 47\ 10$
G_c	$253°\ 1'\ 25'',5$	λ_c	$77°\ 59'\ 16'',7$

	3,30600		
$\sin\alpha$..	9,44353		
u''_2....	2,74953		2,74953
$\sin A'_1$	9,48611 (—)	$\cos A'_1$.....	9,97861 (—)
$\frac{1}{\sin\lambda_c}$.	0,00962	$1+e^2\sin^2\lambda'$	0,00269
	2,24526 (—)		2,73083 (—)
	$-2'55'',9$		$-8'58'',1$
G'	$253°\ 4.21\ ,4$	λ'	$78°\ 8\ 14\ ,8$
G_c	$253°\ 1'\ 25'',5$	λ_c	$77°\ 59'\ 16'',7$

On remarquera que ce résultat a été obtenu sans avoir égard à la longueur de la base exprimée en mètres. Cette longueur serait d'ailleurs très facile à trouver comme il a été dit. En voici le calcul :

$\log u''$.....	3,10074	
$\log\frac{1}{2'\sin 1''}$.....	8,50964	
$\log K$	4,59110	$K = 39005^m$

Quand le dernier terme de λ' n'est pas négligeable, on procède au calcul de la base par approximations successives. On peut se dispenser de ce surcroît de travail en calculant dès l'abord ce dernier terme au moyen des valeurs approchées de A et de u'' obtenues par une construction graphique, qui doit toujours pré-

céder le calcul, ne fût-ce que pour reconnaître et éviter des erreurs grossières.

Si, au lieu d'avoir observé les azimuts de C, vus de A et B, on avait observé en C les azimuts de A et B, on en déduirait les azimuts inverses en construisant C d'une manière approximative, ce qui permettrait de trouver sa colatitude et sa distance en longitude à A et B. L'application de la dernière formule du n° 160 donnerait alors la correction à faire subir aux azimuts pris en C pour avoir ceux qu'on aurait observés en A et B, et la suite du calcul se conduirait de la même manière.

L'inspection de ces formules, et au besoin une simple figure nous apprend immédiatement les conditions de précision dans lesquelles une base astronomique est obtenue. Si le gisement de la ligne AB est voisin d'un méridien, l'observation des colatitudes combinée avec celle de l'azimut donnera une bonne base : elle manquerait de précision si ce gisement était voisin de la direction est-ouest. Dans ce dernier cas, il convient de recourir à la différence de longitude, qui ne donnerait pas de bon résultat dans le premier. Il est bon d'observer que dans une traversée rapide en mer on peut avoir la différence de longitude chronométrique des deux points voisins avec une très grande précision, parfaitement comparable à celle que comportent les observations de latitude. Si l'on a observé matin et soir en chaque point, on a même l'avantage de calculer deux distances méridiennes et d'obtenir une vérification, qui sera surtout complète si, après avoir observé en A et B, on revient en A.

Les différences de latitude de points voisins, obtenues par l'observation du Soleil, sont souvent plus précises que les latitudes absolues parce qu'elles résultent de distances zénithales peu différentes, et qui sont par conséquent affectées de la même manière, ou à peu près, par les erreurs constantes de l'instrument employé.

3° Il est bon de mentionner encore la méthode de mesure des bases par la *vitesse du son*. Un observateur se place à l'une des extrémités de la longueur à déterminer; à l'autre extrémité, on tire un coup de canon à poudre (1). L'observateur note l'instant auquel

(1) Des expériences récentes ont montré que, dans les tirs à boulets, lorsque la vitesse initiale du projectile dépasse la vitesse du son dans l'air, la vitesse de propagation du son n'est pas uniforme.

il voit la lumière, puis celui auquel il perçoit le son, en se servant soit d'un chronomètre, soit d'un compteur à pointage. On connaît ainsi la durée τ de la propagation du son entre les deux stations, et leur distance est donnée en multipliant cette durée par la vitesse de propagation V du son dans l'air.

Si θ et θ' sont les températures aux deux stations, f et f' les tensions en millimètres de la vapeur d'eau, mesurées avec l'hygromètre ou le psychromètre, on a

$$V = 341^{m},3 + 0,6058\left(\frac{\theta+\theta'}{2} - 15^{\circ}\right) + 0,085\left(\frac{f+f'}{2}\right).$$

On voit que le dernier terme est généralement petit.

Si deux observateurs tirent chacun des coups de canon de leur côté, on prendra pour τ la moyenne des nombres obtenus par chacun, et l'on n'aura pas à tenir compte de la vitesse du vent. Si l'on ne dispose que d'un canon, il faut mesurer cette vitesse aux deux stations, ainsi que l'angle qu'elle fait avec la direction de ces stations; soit ω la moyenne des vitesses, α la moyenne des angles, la vitesse du son à employer dans les calculs sera

$$V' = V + \omega \cos\alpha.$$

On remarquera qu'une erreur de 1 seconde sur τ en donne une de 340 mètres sur la distance : comme ces erreurs sont sensiblement constantes, il s'en suit que la méthode ne s'applique bien qu'aux grandes distances. De nuit, par temps calme, on peut l'employer jusqu'à 60 kilomètres. (Voir *Annales maritimes de* 1837, un Mémoire sur ce sujet par M. Chazallon.)

165. — Détermination des altitudes et problème inverse.

Pour la description complète d'une contrée, il ne suffit pas d'en tracer la projection horizontale : il faut y joindre la connaissance du relief du sol.

Si l'on suppose le niveau moyen des mers prolongé sous les continents, il formera par hypothèse un ellipsoïde parfait, et l'altitude d'un point quelconque sera la distance de ce point à cet ellipsoïde. Dans les travaux de haute précision, il y aura à vérifier si le niveau moyen des mers satisfait bien à cette condition : il y

aura surtout à définir ce niveau moyen, et à le distinguer de la moyenne des niveaux observés. Mais cette recherche n'a aucun intérêt au point de vue qui nous occupe, et nous ne ferons que mentionner pour mémoire les méthodes précises du nivellement topographique. Dans beaucoup de cas, nous ferons même abstraction du mouvement de la marée, bien qu'on doive en tenir compte toutes les fois que cela est possible : en pratique, on admettra que la moyenne entre une basse mer et une haute mer contiguë est le niveau moyen.

En Géodésie, on nivelle par distances zénithales. Le procédé le plus exact, celui qui affranchit le mieux des erreurs dues à la réfraction, consiste dans l'observation des distances zénithales réciproques et simultanées.

Si du point A on a pris la distance zénithale ζ de B, et au même instant, de B la distance zénithale ζ' de A, la différence de niveau z de ces deux points est donnée par la formule

$$z = \frac{K \sin \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta)}{\cos \frac{1}{2}(\zeta' - \zeta + C)},$$

dans laquelle K est la longueur en mètres et C la valeur en secondes de l'arc de grand cercle terrestre qui joint les deux points,

$$C = \frac{K}{\rho \sin 1''},$$

ρ étant le rayon terrestre. Cette formule suppose que les réfractions sont les mêmes aux deux points, ce qui aurait besoin d'être vérifié.

En général, on se contente d'observer en un des points la distance zénithale de l'autre. Si de A on a pris la distance zénithale ζ de B, l'élévation z de B au-dessus de A est donnée par

$$z = K \cot \zeta + 0,42 \frac{K^2}{\rho}.$$

Si ζ est plus grand que 90°, $\cot \zeta$ est négatif, et, abstraction faite du deuxième terme, B est plus bas que A.

Le coefficient $0,42 = \frac{1}{2} - 0,08$ se compose de deux parties, la première provenant de la courbure de la Terre, la deuxième introduite par la considération de la réfraction géodésique. Dans les pays tropicaux, il vaut mieux prendre 0,44.

On peut aussi résoudre cette équation par rapport à K, connaissant z, et trouver la distance à laquelle on est d'un point d'altitude connue. Mais les incertitudes qui affectent les altitudes ne permettent pas d'attribuer à ces mesures une grande précision. Pourtant, quand il s'agit de relever rapidement le contour d'une côte, au moyen d'une seule station faite en un point élevé, on peut recourir à la méthode des dépressions, recommandée par M. Mouchez. Sans présenter généralement le degré de précision qu'on obtient par un cheminement, elle peut être utile quand les dépressions mesurées sont de plusieurs degrés. Avec un bon théodolite, donnant les angles à 10″ près, si l'on a soin de déterminer exactement la correction de niveau, l'erreur sur la distance, *résultant du pointé*, et pour des dépressions de 3° à 4°, ne déplacera les points que de $\frac{1}{1000}$ de leur distance absolue. L'erreur sur l'altitude z se multiplie au contraire par la cotangente de la dépression, c'est-à-dire par un facteur qui est ici voisin de 15. Mais on peut encore obtenir de bonnes positions relatives, si l'on fait dépendre l'altitude employée de la distance d'un point voisin de ceux qu'on relève, car alors ce sont en réalité les différences de dépression qui interviennent. On peut encore mesurer les dépressions au-dessous de l'horizon de la mer, au moyen du micromètre, et connaissant la dépression apparente, en déduire les dépressions des points visés.

Pour calculer K, on résoudra l'équation par approximations successives, en négligeant d'abord le terme $0,42\,\frac{K^2}{\rho}$, puis y remplaçant K par $z\tang\zeta$, d'où

$$K = z\tang\zeta - 0,42\,\frac{z^2\tang^3\zeta}{\rho}.$$

Voici la formule pour évaluer la distance d'un point, par sa dépression angulaire au-dessous de l'horizon de la mer, prise d'un point d'altitude connue. Soient K la distance cherchée exprimée en mètres, δ la dépression apparente de l'horizon, z la hauteur de l'œil, α la distance angulaire de la ligne d'horizon au point à déterminer, et mesurée au micromètre ou au sextant ; K sera donné par l'équation

$$\frac{0,44\,K^2}{\rho\sin 1''} - (\alpha+\delta)\,K + \frac{z}{\sin 1''} = 0,$$

qui peut se résoudre par approximations successives en prenant pour première valeur approchée

$$K_1 = \frac{z}{(\alpha + \delta)\sin 1''},$$

que l'on substitue dans l'équation, ce qui donne ensuite

$$K = \frac{z}{(\alpha + \delta)\sin 1''} - \frac{0{,}44\,K_1^2}{(\alpha + \delta)\rho \sin^2 1''};$$

ρ est la longueur du rayon terrestre employée pour le calcul de la dépression. On a construit des Tables à double entrée pour éviter le calcul (¹).

On peut déterminer l'altitude d'un lieu duquel on aperçoit l'horizon de la mer, en mesurant la double distance zénithale de cet horizon. (*Voir* § 32.)

La hauteur en mètres du point de station est donnée par

$$z = 0{,}5773\,\rho\,\mathrm{tang}^2(\zeta - 90^\circ);$$

ρ est le rayon de courbure de la Terre. Comme ce rayon varie avec l'azimut, il faudrait noter l'azimut de l'observation. Mais, eu égard aux incertitudes qui existent sur la réfraction, il suffit de prendre la valeur moyenne

$$\log\rho = 6{,}80534.$$

Le calcul des altitudes par le baromètre se ramène dans tous les cas à l'application de la formule de Laplace, qui peut s'écrire d'après M. Mathieu :

$$z = \left(18366^m \log\frac{H}{h} - 1^m,2843\,(T - T')\right)\left(1 + \frac{2\,(t + t')}{1000}\right)$$

$$\left(1 + 0{,}00265\cos 2L + \frac{z + 15926}{6366198}\right)\left(1 + \frac{s}{3183099}\right).$$

Station inférieure { H hauteur du baromètre ; T température du baromètre ; t température de l'air } et { h ; T' ; t' } Station supérieure.

(¹) Voir : *Recherches sur les chronomètres et instruments nautiques*, 8ᵉ cahier; et Germain : *Traité d'Hydrographie*, Table IX.

z différence d'altitude en mètres, s altitude de la station inférieure au-dessus du niveau de la mer, L latitude. Le deuxième terme du premier facteur représente la réduction du baromètre à mercure au zéro. Il disparaîtrait si l'on observait des baromètres anéroïdes compensés pour les variations de température. En général, les baromètres métalliques ne donnent pas de résultats d'une grande précision, mais leur usage en voyage est bien plus commode. z se calcule encore par approximations successives.

Si l'on suppose les indications des baromètres réduites à la même température par la formule

$$H' = H\,[1 - 0{,}00061\,(T - T')],$$

on peut se servir de la formule de Babinet

$$z = 16000^{m}\,\frac{H' - h}{H' + h}\left[1 + \frac{2\,(t + t')}{1000}\right],$$

qui est bonne pour les faibles hauteurs, et dont l'erreur ne dépasse pas 5 mètres pour une différence de 2000. Ces résultats du nivellement barométrique n'ont vraiment de valeur que si l'on fait des observations très précises, en comparant soigneusement les deux instruments entre eux, à la même heure (midi convient bien), par temps calme, en deux lieux pas très éloignés l'un de l'autre.

M. Angot a proposé une méthode un peu différente, dont nous ne donnerons pas le détail et pour laquelle nous renvoyons aux sources. On trouve dans diverses publications des Tables pour faciliter le calcul de z (¹).

166. — Indications pratiques sur les méthodes de levé.

Ce qui précède comprend sous une forme abrégée tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour effectuer le levé d'une Carte. Un point quelconque ne peut être en effet déterminé que par une des quatre méthodes suivantes :

1° Détermination de la position géographique par les méthodes astronomiques ;

(¹) Voir *Annuaire de la Société météorologique de France*, 1880, t. XXVIII. — *Annuaire des marées des côtes de France*. — *Annuaire du Bureau des Longitudes*. — GERMAIN, *Traité d'Hydrographie*, etc..

2° Construction ou calcul par relèvements pris de points connus;

3° Ou par des angles pris au point même entre des points connus, ces deux méthodes pouvant être combinées;

4° Enfin mesure directe de sa distance et de son gisement en partant d'un point connu, cette mesure pouvant être faite avec plus ou moins de précision.

Nous n'avons pas, répétons-le, à faire ici un Traité de Géodésie et de Topographie, et nous devons nous borner à quelques indications sommaires.

La précision des déterminations par l'observation d'azimut est en règle plus grande que celle des déterminations directes : elle doit donc tenir partout la première place.

On a vu la marche à suivre quand on fait un levé régulier. Il faut tendre à se rapprocher le plus possible de cette marche, en tant que les circonstances le permettront.

Tout point remarquable peut servir de signal. Les signaux principaux sont ceux qui peuvent se voir aux plus grandes distances : arbres isolés, constructions, rochers, etc. Les surfaces blanchies à la chaux se voient bien de très loin.

Les sommets de montagnes sont des signaux excellents : il est rare qu'ils soient assez peu nets pour que l'indécision sur le pointé donne lieu à des erreurs appréciables sur la carte. Quand on peut faire station en un de ces points et en déterminer la position géographique, on y fera un *tour d'horizon*, c'est-à-dire qu'on relèvera au théodolite tous les points remarquables en vue. Si l'on ne peut pas y faire la station astronomique, mais que celle-ci puisse être faite en un point voisin, on tâchera de déterminer directement sa distance et son gisement, pour conclure sa position de celle de la station astronomique.

Plus généralement, à chaque station astronomique on fera un tour d'horizon, et les points relevés de deux stations se trouveront ainsi déterminés par l'intersection des azimuts observés. Des stations intermédiaires avec simple tour d'horizon serviront à rattacher entre eux les points astronomiques par une des méthodes que nous avons données. Ils se fixeront généralement eux-mêmes par la méthode des segments capables, en procédant des points connus aux points inconnus. Ordinairement les points remarquables ne sont pas facilement accessibles; mais on pourra souvent les placer

en faisant, aux environs de la station astronomique, une petite triangulation locale, avec mesure rapide de base. On obtiendra de la sorte les éléments d'une réduction au signal des angles observés à une certaine distance.

La pratique seule peut enseigner quels sont les points qu'il faut relever en une station. Il ne faut pas craindre de les multiplier, et ne jamais manquer une occasion de pointer les plus importants. S'il faut éviter, en effet, d'accumuler trop de matériaux inutiles, il importe, surtout quand on n'a pas le loisir de revenir sur ses pas, de ne pas compromettre le résultat par des omissions irréparables. Des vues prises rapidement permettent d'économiser beaucoup d'écritures, en notant les angles près des points; elles sont d'un grand secours pour la rédaction de la Carte.

Les relèvements de signaux situés à 90° de l'astre qu'on observe pour azimut sont particulièrement intéressants, puisqu'ils fournissent des lieux géométriques bien déterminés, toutes les fois qu'on connaît l'heure du premier méridien. On relèvera avec soin les points situés dans la direction de la route qu'on suit : car si, de deux stations, un même sommet, par exemple, est relevé à des gisements dont la différence est voisine de deux angles droits, ou au même gisement, il est très propre à relier ces points entre eux, lors même que sa propre position ne serait pas déterminée avec une certitude absolue : la vérification est encore meilleure par deux points situés des deux côtés de la direction considérée.

Cette recommandation se rattache au principe général d'après lequel on doit toujours tendre vers les méthodes de levé exactes : le relèvement *réciproque* de deux points, obtenu directement ou indirectement, est une donnée de la plus haute importance.

On aura soin aussi de prendre les distances zénithales des points principaux. Outre les données relatives au relief qu'on en déduira, on obtiendra par la mesure de ces distances des moyens de vérification pour l'estime des routes parcourues. Il est très utile de prendre l'azimut des alignements que les points principaux forment entre eux.

La vraie difficulté réside généralement dans l'estimation des distances. Nous avons dit comment on pratique l'estime en mer, et comment elle peut se faire à terre en comptant ses pas (avec un podomètre, par exemple) ou par l'allure de sa monture. L'estime

doit être vérifiée par tous les moyens possibles. Quand on dispose d'une bonne lunette micrométrique, on évalue facilement la distance d'un point en y faisant transporter une mire de longueur connue l et observant l'angle sous-tendu par cette mire, la distance est

$$K = l \cot \alpha,$$

α peut aussi se mesurer au sextant ou au théodolite. La mesure des bases par la hauteur de la mâture au-dessus de la flottaison est un cas particulier : on peut lui donner beaucoup de précision en opérant comme suit : en un lieu bien disposé pour cela, on mesure une base à terre à la chaîne ou au ruban. Deux observateurs font station aux extrémités de cette base : à un signal convenu, ils prennent chacun l'angle entre l'autre observateur et le mât, ainsi que la hauteur angulaire de celui-ci : un troisième observateur, placé au pied du mât, prend l'angle entre les deux observateurs à terre. On a ainsi un triangle fermé, première vérification, et l'on calcule la distance du mât aux deux observateurs : on peut alors trouver sa hauteur l par la formule ci-dessus mise sous la forme

$$l = K \operatorname{tang} \alpha,$$

et l'on doit trouver par les deux observations la même hauteur, deuxième vérification. Le mât se trouve être ainsi une base bien mesurée dans les conditions mêmes où on l'emploiera, et il suffira de tenir compte ultérieurement des variations du tirant d'eau total, et aussi de la différence de tirant d'eau et de la bande, qui déterminent l'inclinaison sur la verticale.

Les micromètres Lugeol et Rochon sont bien appropriés à cet usage. Si l'on connaît l'altitude du point où l'on se trouve, et l'altitude d'un point que l'on aperçoit, une mesure de distance zénithale permet de trouver la distance. Le nivellement géodésique doit être préféré au nivellement barométrique lorsque cela est possible : il est utile de vérifier l'un par l'autre, car les causes d'erreurs qui les affectent ne sont pas les mêmes.

La mesure des distances zénithales combinée avec les tours d'horizon donnera de nombreuses vérifications des routes estimées. Quand on fait station en un lieu élevé dont l'altitude est connue, on arrivera ainsi à fixer de nombreux détails topographiques : cette méthode est surtout à recommander dans le voisinage de la mer, car

alors les altitudes des points de la ligne de côte sont bien déterminées, et l'on a la ressource de déterminer directement l'altitude absolue du point de station par la mesure de la distance zénithale de l'horizon de la mer. On obtiendra encore de bons résultats pour l'exploration d'une plaine vue d'un lieu dominant, pour le tracé d'une rivière, etc.

Nous n'avons pas à parler ici en détail des procédés de construction et de rédaction. Rappelons seulement que, si les deux extrémités d'un cheminement ou d'une route estimée sont déterminées, la meilleure manière de réduire cette route sera de la construire d'abord par distances et azimuts en partant du point de départ supposé connu : la distance au point d'arrivée et le gisement relatif des deux points se déduisent de cette construction : comme ils sont connus d'avance, on fera la réduction des longueurs proportionnellement au rapport des deux distances vraie et estimée, puis on fera tourner la figure ainsi construite de l'angle dont le gisement estimé de l'ensemble s'est trouvé erroné.

On consultera avec fruit, pour plus de détails, le *Guide du marin* (*Hydrographie,* par M. Boutroux); le *Traité d'Hydrographie* de M. Germain; et, pour les voyages par terre, on trouvera des renseignements précieux dans les Ouvrages de M. d'Abbadie sur la Géodésie de la Haute Éthiopie, et dans les instructions pour les voyages d'exploration que ce même savant a publiées dans le *Bulletin de la Société de Géographie,* en 1867.

Enfin, nous rappellerons avec insistance que si deux éléments, pris dans le sens le plus général, suffisent pour fixer la position d'un point, il est indispensable d'en avoir au moins un de plus pour la vérification et pour se rendre compte de l'approximation obtenue : une position qui n'est pas contrôlée ne devrait jamais figurer sur une Carte.

167. — Procédés pour reconnaître une étoile.

Si l'on n'a pas à sa disposition une Carte du ciel, ou si l'on n'y trouve pas une étoile qu'on a observée, il faut se ménager le moyen de la reconnaître plus tard pour trouver ses coordonnées dans les Catalogues. Pour cela, on la compare à une étoile connue. Quand

on observe au théodolite, voici la manière la plus rapide d'opérer. A l'instant t du chronomètre, on pointe simultanément l'étoile cherchée en hauteur et en azimut, en l'amenant sous la croisée des fils, et l'on fait les deux lectures; puis à l'instant t' on effectue la même opération sur l'étoile de comparaison γ. On calcule avec cette deuxième observation, et en se servant de la correction approchée du chronomètre, la distance zénithale et l'azimut de l'étoile γ à l'instant t', ou mieux encore, on observe ces données; on en déduit, par les différences de lecture, la distance zénithale et l'azimut de l'étoile inconnue, à l'instant t. Dans le triangle pôle-zénith-astre on connaît donc, approximativement du moins, la colatitude λ, la distance zénithale ζ et l'azimut A. On aura la distance polaire δ par la relation

$$\cos\delta = \cos\lambda\cos\zeta - \sin\lambda\sin\zeta\cos A,$$

(A étant l'azimut compté du Sud vers l'Ouest). δ est bien déterminé, sauf pour les étoiles voisines des pôles.

On trouve ensuite l'angle horaire, soit par la formule connue, soit par l'analogie des sinus, au cas où l'on n'a pas observé trop près du premier vertical,

$$\sin P = \frac{\sin A\sin\zeta}{\sin\delta}.$$

Connaissant l'angle horaire et approximativement le temps sidéral, la relation connue

$$\alpha = S - P$$

donnera l'ascension droite, avec laquelle on entrera dans le Catalogue : la distance polaire fixera le choix parmi les étoiles d'ascension droite voisine; une construction graphique suffirait dans la plupart des cas pour trouver P et δ. Il est à peine nécessaire de rappeler qu'il serait inutile de recourir au calcul si la précision avec laquelle on connaît la colatitude était égale ou inférieure à celle de la construction graphique.

Le navisphère de Magnac permet de reconnaître facilement les étoiles de première et deuxième grandeur.

Quand on se sert d'instruments à réflexion, la mesure de la différence d'azimut sera remplacée par la mesure de la distance angulaire. Il faut alors reprendre après l'observation la hauteur de la

première étoile, et interpoler les hauteurs pour l'instant de l'observation de la distance. Si d est cette distance, la différence des azimuts sera D, donnée par la relation

$$\cos d = \cos\zeta \cos\zeta' + \sin\zeta \sin\zeta' \cos D,$$

et se calculera ou se construira comme un angle horaire. La suite des opérations est la même que ci-dessus. Il est nécessaire de noter la grandeur approximative de l'étoile pour être guidé dans le choix à faire. Les étoiles de comparaison les plus voisines de l'étoile cherchée sont les plus avantageuses.

Il est d'ailleurs assez facile, avec un peu d'habitude, d'estimer à vue les ascensions droites et les distances polaires des étoiles, surtout par comparaison avec des astres voisins connus, ce qui aide à rendre la recherche plus rapide.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION.

168. — Généralités. Classification des erreurs.

L'étude des erreurs s'impose à toutes les Sciences d'observation : dans celles qui opèrent sur des nombres, elle est susceptible d'être traitée avec une certaine précision qui lui a fait prendre rang parmi les Sciences mathématiques (1).

La théorie nous donne des relations entre certaines quantités, les unes directement mesurables, les autres devant s'en déduire par des formules exactes. Le zénith et le pôle ne sont pas directement observables, mais si l'on connaît la distance polaire d'un astre, la mesure de sa distance zénithale méridienne permet de trouver la colatitude. Une dimension linéaire se mesure en lui superposant une règle de longueur connue et évaluant le nombre de longueurs et de fractions de cette règle qui y sont contenues. Ces deux cas sont des plus simples, puisque l'inconnue est une somme ou une différence de résultats d'observation. Voici un exemple plus complexe. Pour trouver la formule des marches d'un chronomètre et en déterminer les constantes, il faut observer des états absolus, des températures, noter des dates. La détermination de l'état absolu exige elle-même des observations diverses, telles que mesure des distances zénithales, observation du niveau, appréciation du

(1) Après les lumineux travaux dont M. Bertrand vient d'enrichir cette théorie, il était peut-être superflu d'insister, comme nous le faisons, sur les incertitudes qu'elle présente. Nous n'avons pourtant cru devoir rien changer à ce Chapitre, écrit depuis déjà deux ans. Nous nous bornerons à constater, avec une profonde satisfaction, la confirmation de nos vues par la haute autorité de notre ancien maître, qui, avec la clarté incisive dont il possède le secret, a soumis les idées courantes à une critique sévère, et replacé ainsi cette branche de la Science sur ses véritables bases. La théorie ne vient plus contredire l'expérience et le bon sens.

temps, détermination de la réfraction; puis il faut combiner avec ces quantités la colatitude du lieu, l'ascension droite et la distance polaire des astres, etc.

On supposera toujours qu'il existe une relation analytique entre les quantités à déterminer et celles que l'on se procure par les mesures directes ou que l'on connaît *a priori*. Ces relations, en ce qui concerne notre objet, ont été développées dans les Chapitres qui précèdent. A défaut de relations de ce genre, on aurait recours aux formules d'interpolation, aux divers développements en série ou à la méthode des coefficients indéterminés.

Toute quantité mesurée est nécessairement affectée d'erreurs. — C'est là un fait d'expérience qui résulte de ce qu'on ne trouve jamais identiquement le même résultat en répétant une mesure. Ces erreurs tiennent à des causes multiples qu'il est du plus haut intérêt de reconnaître toutes. D'abord l'imperfection des instruments de mesure dont la forme et les dimensions varient par l'effet de la pesanteur, de la température, de toutes les circonstances physiques. Dans cette catégorie se rangent : les défauts de compensation des chronomètres, les anomalies et irrégularités de leur marche, provenant de l'épaississement des huiles, des altérations moléculaires, des imperfections de construction, des chocs, des mouvements imprimés par des forces extérieures, de l'électricité, du magnétisme, des altérations chimiques; les défauts optiques des lunettes, leurs flexions; les erreurs instrumentales de diverses sortes, erreurs de division des cercles, jeu des vis, inertie des niveaux, excentricité.

Il y a ensuite les erreurs extérieures, celles sur la température et la pression, les réfractions, normales ou non; puis celles qui sont dues à d'autres propriétés de la lumière, diffraction, irradiation, dispersion, aberration, scintillation, vision moins nette à cause des milieux interposés.

Il y a enfin les erreurs propres à l'observateur et à l'imperfection de ses sens, les équations personnelles pour l'appréciation des temps et des pointés, la fatigue des organes, les erreurs de lecture.

On pourrait allonger indéfiniment cette longue liste; il est même permis de dire qu'à mesure que la Science progresse, le nombre des causes d'erreur connues augmente; que l'on compare seulement les calculs que nécessitent de nos jours les opérations de Géodésie

et la prédiction des éphémérides avec les opérations que faisaient autrefois les arpenteurs et les rédacteurs de calendriers.

Parmi ces erreurs, il en est qui se produisent indifféremment dans un sens ou dans un autre; on les qualifie d'*accidentelles* ou *fortuites;* d'autres, au contraire, dont les causes sont plus ou moins connues, agissent d'une façon régulière; celles-là sont *systématiques* et parfois *constantes*.

A première vue, ces définitions paraissent très claires; il n'est pourtant pas possible, en fait, d'établir une véritable classification; rien n'est plus délicat que de tracer la limite des deux domaines et de trouver la qualification qui convient. En réalité, il n'y a pas d'erreurs fortuites : le mot de hasard n'a été inventé que pour exprimer notre ignorance des causes, il ne devrait jamais servir à déguiser cette ignorance. Tout phénomène naturel obéit à des lois qui règlent sa manifestation; il n'y a pas de raison pour qu'il n'en soit pas de même de l'écart entre l'observation et la réalité. De même que le progrès de la Science amène à reconnaître un nombre croissant de causes perturbatrices, il a aussi pour résultat d'étendre la classe des erreurs systématiques aux dépens de celle des erreurs fortuites. Tant qu'on n'a pas égard au mouvement d'ensemble du système solaire, on peut considérer comme accidentelles certaines inégalités des coordonnées stellaires; elles deviennent systématiques le jour où l'observation réussit à dégager leur loi, qui n'est autre que celle du mouvement relatif.

Nous sommes forcés de ranger dans la catégorie des erreurs fortuites les anomalies de la dépression de l'horizon; elles dépendent pourtant de causes météorologiques connues, mais qu'on n'a pas encore réussi à mettre en équation. Il en est de même des réfractions dans le sens horizontal, qui ont une importance réelle en Géodésie : des irrégularités des niveaux à liquide, par lesquelles se manifestent des phénomènes capillaires et électriques; ce sont toujours les effets de causes naturelles dont la théorie reste à faire. Les erreurs de graduation des cercles nous en offrent un exemple très instructif. Elles ont été fort longtemps considérées comme fortuites. Une étude plus attentive a montré qu'elles peuvent être représentées par des séries périodiques; une fois cette constatation faite, on en a cherché l'explication, et on l'a trouvée dans les machines à diviser, dans les vis micrométriques, dans l'inclinaison

des plans des cercles, dans les changements de température. Tant que l'étude d'un cercle divisé n'est pas faite, force est de traiter comme fortuites toutes les erreurs de graduation. Si l'on mesure plusieurs fois un même angle avec la même position du limbe, les erreurs commises se composent d'une erreur constante, l'erreur de division, et d'erreurs que l'on traitera provisoirement d'accidentelles et qui proviennent de la lecture, du pointé, des circonstances extérieures. Mais celles-ci peuvent elles-mêmes être systématiques, et dues, par exemple, à une imperfection de l'éclairage. L'habileté de l'observateur consiste à découvrir les erreurs systématiques, et, s'il ne peut parvenir à les isoler, à les éliminer du moins par une combinaison d'observations qui en fasse des erreurs fortuites; telle est la justification de la méthode de la réitération, qui consiste, on l'a vu, à faire servir successivement les diverses parties du limbe à la mesure des mêmes angles. Telle est aussi la raison d'être des observations croisées ou symétriques; elles sont destinées à atténuer l'effet de la collimation et de l'inclinaison des axes. Une erreur de zéro d'un instrument à réflexion mal déterminée est constante; elle deviendra accidentelle si l'on opère avec plusieurs instruments différents; elle s'éliminera en croisant les observations.

Les observateurs anciens s'efforçaient d'obtenir pour le cercle répétiteur et le théodolite un nivellement parfait; quand le niveau se dérangeait, on rectifiait à nouveau, et l'on ne notait pas les lectures de la bulle, traitant ainsi les erreurs de niveau comme accidentelles. Or, si l'un des pieds de l'instrument, par exemple, plus exposé au Soleil que les autres, se dilate davantage, cela donne lieu à une dénivellation systématiquement progressive des axes, et l'erreur de niveau n'est plus accidentelle.

Donnons encore un exemple d'une inégalité systématique qu'on est obligé, faute de données, de traiter comme fortuite. Supposons une côte orientée à peu près dans le sens d'un méridien. La différence des conditions thermiques de la terre et de la mer fait qu'on ne peut plus admettre l'uniformité de pression et de température sur un même parallèle. Il résulte de là une irrégularité des réfractions et des dépressions moyennes. Si l'on détermine maintenant les longitudes d'une série de points, rattachés entre eux par des azimuts, en observant des hauteurs à l'horizon de la mer et opérant

tous les jours dans des conditions analogues, on trouvera, si les observations sont bien faites, des différences de longitude peu différentes de celles que donne l'azimut, et la comparaison de ces chiffres conduira à se faire une idée très avantageuse de la précision du résultat, et pourtant il pourra se faire que toutes ces longitudes soient en erreur de quantités très appréciables, grâce aux anomalies systématiques de la réfraction. Nous avons pu soupçonner un effet de ce genre sur la côte d'Annam. En général, dans les pays où règnent des vents de direction constante, rien ne dit que les réfractions soient les mêmes à tous les azimuts.

Il est nécessaire de se pénétrer de cet ordre de considérations, afin de s'ingénier en toute circonstance à démêler le plus grand nombre possible d'erreurs systématiques, en vue de trouver les méthodes d'observation propres, sinon à les évaluer, du moins à les éliminer du résultat. On pourra être ainsi conduit à faire fléchir en apparence les principes exacts de la théorie, pour avoir plus de rigueur dans la pratique. Dans les cas dont nous venons de parler, où la réfraction est fonction de l'azimut, il faudra éviter les observations dans lesquelles intervient le maximum de différence, et lors même que la théorie indique que les meilleures observations d'angle horaire se font au premier vertical, on pourra recourir à des hauteurs plus voisines du méridien et répondant à des azimuts moins écartés et à des réfractions plus faibles.

En résumé, il faut diriger l'observation de manière à ramener le plus possible les erreurs à pouvoir être traitées comme fortuites. Cela est plus difficile, sans doute, que de traiter brutalement des nombres quelconques par une méthode de calcul uniforme, mais les résultats acquièrent une certitude qu'on poursuivrait en vain en procédant autrement.

169. — Examen général des circonstances favorables aux observations. Calcul des erreurs.

La détermination expérimentale d'une quantité u suppose la connaissance d'une relation

$$u = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

entre cette quantité et d'autres $x, y, z, \ldots$ dont les unes doivent

être trouvées par l'observation directe, et les autres considérées comme des données de la question, quoique résultant elles-mêmes d'autres observations. Chacune de ces variables est supposée affectée d'erreurs, que l'on est généralement en droit de supposer assez petites pour qu'il soit permis de les traiter comme des différentielles : on peut écrire dans cette hypothèse

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz + \ldots,$$

et l'erreur finale sera la somme des erreurs isolées dues à l'intervention des diverses variables dont u est fonction. Les circonstances favorables à l'observation sont celles pour lesquelles du est un minimum. Si l'on peut annuler un ou plusieurs de ces coefficients par le choix de la méthode, cela constituera une circonstance favorable. Exemple : λ est fonction de ζ et P, mais en observant dans le méridien, le coefficient de dP est nul.

Parmi ces quantités $x, y, z, \ldots$, il en est dont on peut disposer, tandis que d'autres sont imposées par les circonstances. Ainsi, comme on l'a vu, la colatitude d'un lieu entre dans les équations à l'aide desquelles on calcule l'azimut et l'angle horaire; il n'est pas possible de disposer de cette quantité, et le choix des circonstances favorables en ce qui la concerne ne peut s'opérer que par le choix de l'heure, de la méthode et de l'instrument. On est au contraire maître de disposer de la distance zénithale et de la distance polaire par le choix de l'astre.

Dans cette étude, il convient encore de rechercher dans chaque cas douteux si c'est seulement la méthode qui ne s'applique pas bien ou si le problème lui-même est mal déterminé. Les observations de la colatitude par le temps que le Soleil met à se coucher donnent une très faible précision dans le voisinage de l'équateur, sans qu'il en résulte que, dans ces conditions, la colatitude elle-même soit indéterminée : la méthode seule est en défaut. Par contre, le tracé de la méridienne dans le voisinage des pôles ne saurait être effectué avec précision par aucun procédé, puisqu'au pôle même il n'y a plus de méridien, ou que plutôt ils y passent tous ; il ne saurait donc y être question ni d'azimut ni de longitude.

Toutes les observations astronomiques reviennent à des pointés combinés avec une évaluation de l'heure. Un pointé est d'autant

plus exact, toutes choses égales d'ailleurs, que le mouvement relatif du point visé est plus lent, puisqu'alors une mauvaise appréciation du temps a le minimum d'influence sur le résultat. La précision avec laquelle on estime l'heure qui correspond à un pointé est, au contraire, d'autant plus grande que le mouvement de l'astre est plus rapide, car alors l'erreur sur l'heure résultant d'une erreur sur le pointé est minima. La plus grande vitesse apparente observable est celle d'une étoile équatoriale dans le plan de l'équateur; à l'instant de la culmination, la composante verticale en est nulle, la composante horizontale égale à la vitesse même; il en résulte, comme nous le savons déjà, que l'observation du passage d'une pareille étoile derrière les fils verticaux de la lunette méridienne donne l'heure avec beaucoup d'exactitude, et que son pointé sous le fil horizontal au même instant donne la colatitude indépendamment de l'heure. De même l'observation des circompolaires aux digressions donne les meilleures mesures d'azimut.

La discussion analytique et numérique des circonstances favorables se fait par le moyen des formules différentielles du Paragraphe 3. Cette discussion devient beaucoup plus claire en la rattachant à des considérations géométriques, soit qu'on résolve les problèmes graphiquement, par les méthodes du Paragraphe 11, soit que l'on considère les courbes de hauteur.

Pour se servir des formules différentielles, on choisit une de celles dans lesquelles entrent, avec la différentielle de la quantité cherchée, celle des quantités dont elle dépend. On considère d'abord le coefficient de la différentielle de la quantité inconnue. Toutes choses égales d'ailleurs, la plus grande précision correspond au maximum de ce coefficient, puisqu'il entre en diviseur dans les facteurs des autres erreurs. On examine ensuite ces facteurs qui montrent l'influence spéciale de chacune de ces erreurs, et dont, au contraire, c'est le minimum qu'il faut rechercher.

Il est ordinairement permis dans la pratique de considérer $d\delta$ comme négligeable et les éphémérides comme exactes : la seule cause d'incertitude proviendrait, dans le cas où l'on a observé le Soleil, la Lune ou une planète, de la connaissance imparfaite de la longitude et de l'heure, d'où résulterait une interpolation fautive; une deuxième approximation corrigerait généralement le résultat d'une façon satisfaisante. Il faut supposer, au contraire, que λ, ζ, A

et P sont affectés d'erreurs et en examiner l'influence sur le résultat. Au point de vue des signes algébriques, on se rappellera que les formules différentielles sont relatives aux angles et aux côtés des triangles sphériques, tandis que l'azimut A est l'angle extérieur au triangle. Nous allons résumer les résultats de cette discussion, dont quelques-uns ont déjà été traités à l'occasion des problèmes auxquels ils se rapportent, et nous ajouterons quelques applications numériques tirées des exemples que nous avons développés.

En mettant aux sommets du triangle général ABC, auquel se rapportent les formules différentielles du Paragraphe 3, le pôle nord en A, le zénith en B, la formule (5) deviendra, avec nos notations habituelles,

$$(5a) \qquad d\zeta = \cos\varpi\, d\delta - \cos A\, d\lambda + \sin\lambda \sin A\, dP.$$

La même substitution dans la formule (7) donnera

$$(7a) \qquad -\sin\zeta\, dA = \sin\varpi\, d\delta - \cos\zeta \sin A\, d\lambda - \sin\delta \cos\varpi\, dP.$$

En permutant le pôle et le zénith, c'est-à-dire en mettant le zénith en A, le pôle en B, la formule (5) sera

$$(5b) \qquad d\delta = \cos\varpi\, d\zeta + \cos P\, d\lambda - \sin\lambda \sin P\, dA,$$

et la formule (7)

$$(7b) \qquad \sin\delta\, dP = \sin\varpi\, d\zeta - \cos\delta \sin P\, d\lambda + \sin\zeta \cos\varpi\, dA.$$

Telles sont les équations qui serviront à notre discussion.

Colatitude. — La relation (5*a*) montre par le facteur cos A que l'observation de distance zénithale donne le mieux λ quand elle est faite dans le méridien, où cos A est égal à l'unité en valeur absolue, c'est-à-dire maximum. Elle ne peut pas le donner dans le premier vertical, conséquence à laquelle on arrive encore par la considération de la courbe de hauteur. Lorsqu'on observe dans le méridien, le centre du cercle de hauteur y est contenu, et ce cercle coupe le méridien à angle droit. A mesure que l'azimut de l'astre croît, la droite de hauteur qui est normale à cette direction coupe le méridien sous des angles de plus en plus aigus, c'est-à-dire avec une précision décroissante : quand l'azimut est 90° ou 270°, la droite de hauteur est tangente au méridien et l'intersection indéterminée.

Pour l'observation de hauteur méridienne, une erreur sur l'heure est sans influence sur λ, puisque l'angle de position étant nul, $\sin\varpi$, coefficient de dP est nul. L'erreur sur δ se reporte intégralement sur λ.

Si l'on fait, au contraire, intervenir la mesure de l'azimut et de l'angle horaire pour déterminer λ, on voit par la formule $(7a)$ qu'on doit opérer loin du méridien pour donner à $\cos\zeta \sin A$ sa plus grande valeur, dans le premier vertical ($\sin A = 1$), ou à la digression, où le facteur de dP, $\cos\varpi = 0$, et où $\sin A$ est le plus grand pour l'astre donné. De là les méthodes du passage au premier vertical et des digressions.

Pour la première, $\sin A = 1$, et alors le maximum de précision est obtenu pour $\cos\zeta = 1$, c'est-à-dire au zénith et dans son voisinage. C'est ce que nous savons déjà.

Le coefficient de dA est nul pour $\zeta = 0$; en effet, une étoile zénithale, à quelque azimut qu'on observe sa hauteur, donne une distance zénithale nulle, une colatitude égale à sa distance polaire, et le cercle de hauteur se réduit à un point.

Dans tous les cas, mesures de hauteur ou d'azimut, une mesure unique ne peut pas donner la colatitude indépendamment de la distance polaire, les coefficients de $d\lambda$ et de $d\delta$ s'annulant ensemble.

Pour calculer les erreurs, nous substituerons aux différentielles les valeurs numériques des erreurs.

Circonméridiennes (§ 92). — Les erreurs commises dans cette observation peuvent porter sur P, ζ et δ. On voit immédiatement que les facteurs de $d\zeta$ et $d\delta$ sont $(5a)$: $\frac{1}{\cos A}$ et $\frac{\cos\varpi}{\cos A}$, et sensiblement égaux à l'unité près du méridien; les erreurs de ζ et δ se reportent donc intégralement sur λ.

Dans l'exemple numérique $P = 2^\circ 33'$, $\lambda = 72^\circ 3'$, $\delta = 100^\circ 32'$, $\zeta = 57^\circ 6'$, on calcule $\sin A = \frac{\sin P}{\sin\zeta}\sin\delta$, et l'on trouve $A = 2^\circ 41'$; si nous faisons $dP = 10^s = 150''$, on trouve

$$d\lambda = 0'',744;$$

l'erreur sur λ est donc ici $\frac{1}{200}$ de celle de P.

Quand on observe le colatitude par la durée du passage du Soleil

dans un vertical donné (§ 404), on peut, pour la discussion de l'erreur, prendre comme valeur approchée de δ_1 celle de δ, d'autant que cette quantité étant supposée connue sera traitée comme constante dans la différentiation ; en différentiant la formule (c) du Paragraphe cité par rapport à λ, ζ et ϖ, il vient

$$-\sin\lambda\, d\lambda = -\cos\delta\sin\zeta\, d\zeta + \sin\delta\cos\zeta\cos\varpi\, d\zeta - \sin\delta\sin\zeta\sin\varpi\, d\varpi,$$

et en différentiant la formule (b)

$$-\sin\varpi\, d\varpi = -\frac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{D}}{\sin\delta}\frac{\cos p}{\sin^2 p}\, dp + \frac{\cos\frac{1}{2}\mathrm{D}\, d(\frac{1}{2}\mathrm{D})}{\sin\delta\sin p},$$

et, après substitution et une réduction facile à apercevoir,

$$-\sin\lambda\, d\lambda = \sin\lambda\cos\mathrm{A}\, d\zeta + \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{D}\sin\zeta\frac{\cos p}{\sin^2 p}\, dp - \frac{\sin\zeta\cos\frac{1}{2}\mathrm{D}}{\sin p}\, d(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}).$$

Les meilleures conditions sont $\sin\lambda = 1$, c'est-à-dire le voisinage de l'équateur :

L'erreur sur ζ a d'autant moins d'effet qu'on est plus près du premier vertical, où $\cos\mathrm{A} = 0$.

Les erreurs sur p et $\frac{1}{2}\mathrm{D}$ diminuent d'influence quand on se rapproche du zénith et quand la durée p augmente, ce qui arrive quand λ croît, c'est-à-dire encore près de l'équateur.

Dans l'exemple cité on trouve, pour le coefficient de $d\zeta$, 0,008, ce qui est négligeable : mais les coefficients de dp et $d(\frac{1}{2}\mathrm{D})$ sont respectivement 75,4 et 119, ce qui indique *a posteriori* qu'on n'est pas dans des conditions favorables. Par 80° de colatitude, le coefficient de dp descendrait à 5,7, une erreur de 1^s sur l'appréciation de p ferait 1′25″ sur λ.

Heure. — Si l'on se propose de trouver l'heure en fonction de la colatitude et de la distance zénithale, on emploiera la formule $(5a)$. Le coefficient de $d\mathrm{P}$ est $\sin\lambda\sin\mathrm{A}$. Les meilleures conditions sont celles qui correspondent au maximum de $\sin\mathrm{A}$, c'est-à-dire à l'observation au premier vertical, quand elle est possible, ou aux digressions. La précision, en raison du facteur $\sin\lambda$, croît à mesure qu'on se rapproche de l'équateur : au pôle, on ne peut pas déterminer l'heure par ζ qui reste constant. On ne le peut pas davantage dans le méridien, où $\mathrm{A} = 0$. L'erreur $d\lambda$ est sans influence pour $\cos\mathrm{A} = 0$, c'est-à-dire encore au premier vertical, $d\delta$ est sans influence aux digressions. La formule $(7b)$, où $d\mathrm{P}$ a pour facteur $\sin\delta$, montre que

les astres équatoriaux sont les plus avantageux, ce qui résulte de la rapidité de leur mouvement.

Cette discussion se fait aussi par les courbes de hauteur. L'heure du premier méridien étant supposée connue, la recherche de la longitude et celle de l'angle horaire reviennent au même : or la première se ramène à celle de l'intersection du cercle de hauteur avec le parallèle de latitude. Le résultat est d'autant plus précis que cette intersection a lieu sous un angle plus voisin d'un droit, ce qui ramène aux environs du premier vertical, tant par les erreurs sur λ que par celles sur ζ : c'est dans ce cas, en effet, qu'un petit déplacement du cercle de hauteur (ζ) ou du parallèle (λ) déplace le moins le point d'intersection.

La détermination de l'heure par l'azimut se discute par $(7a)$, qui montre que $\sin\delta$ doit être grand (étoiles équatoriales à mouvement rapide), et $\cos\varpi$ maximum, ce qui conduit à observer dans le méridien, où $\varpi = 0$. C'est dans ce cas aussi que ζ est le plus petit, et que $d\mathrm{A}$ par conséquent a le facteur minimum. Les facteurs de $d\delta$ et $d\lambda$ s'annullent, et cela prouve, ce que nous savons déjà, que les observations de passages méridiens donnent l'heure indépendamment de la colatitude et de la distance polaire. Mais ici peuvent intervenir d'autres considérations. La correction due à la déviation azimutale de la lunette est nulle pour les étoiles zénithales. Là où le mouvement de celles-ci est suffisamment rapide, c'est-à-dire sous les moyennes et basses latitudes, on pourra les préférer comme étoiles horaires aux étoiles équatoriales, l'incertitude sur l'orientation de la lunette n'intervenant pas dans les résultats.

Si l'on a des doutes sur la détermination de l'inclinaison, on choisira au contraire des étoiles voisines de l'horizon.

Pour calculer les erreurs sur l'heure dans le deuxième exemple du Paragraphe 108, la formule $(5a)$ nous donne

$$d\mathrm{P} = \frac{d\zeta}{\sin\lambda\sin\mathrm{A}} - \frac{\cos\varpi}{\sin\lambda\sin\mathrm{A}}\,d\delta + \frac{\cot\mathrm{A}}{\sin\lambda}\,d\lambda.$$

Avec les données $\zeta = 58°43'$, $\delta = 72°12'$, $\lambda = 69°8'$, $\mathrm{P} = 62°32'$ on trouve d'abord

$$\sin\mathrm{A} = \frac{\sin\mathrm{P}}{\sin\zeta}\sin\delta, \qquad \sin\varpi = \frac{\sin\mathrm{P}}{\sin\zeta}\sin\lambda,$$

d'où

$$A = 81°20', \qquad \varpi = 76°3',$$

et les coefficients sont

$$dP = 1,08\,d\zeta - 0,261\,d\delta + 0,163\,d\lambda.$$

Ainsi une erreur de 1′ sur ζ donne $4^s,32$; sur δ, $1^s,04$; sur λ, $0^s,65$ sur l'angle horaire.

Si nous prenons maintenant l'exemple de l'heure par les circonméridiennes du Paragraphe 110, où $\zeta = 8°46', \delta = 86°0', \lambda = 77°30'$, $P = 2°15'$, nous trouvons $A = 14°54'$, $\varpi = 14°27'$, par les formules ci-dessus, et après calcul fait

$$dP = 4,12\,d\zeta - 3,89\,d\delta - 3,85\,d\lambda,$$

et les erreurs sur l'heure, pour 1′ d'erreur des données, sont

par $d\zeta$, $16^s,48$; par $d\delta$, $15^s,56$; par $d\lambda$, $14^s,40$.

Mais ces deux dernières disparaissent par le fait que les hauteurs sont à peu près correspondantes. Il en est de même des erreurs *systématiques* sur $d\zeta$.

Azimut. — Dans la formule (5*b*), dA a pour coefficient $\sin\lambda \sin P$. Il en résulte que d'une façon générale on doit éviter les angles horaires trop petits, et de plus, que l'azimut se détermine d'autant plus mal qu'on est plus voisin du pôle.

Si l'on détermine l'azimut par la distance zénithale, l'observation de la distance zénithale méridienne répond à $\cos\varpi = 1$, et comme $\sin P = 0$, le coefficient de $d\zeta$ est infini. On ne peut donc pas déterminer l'azimut, qui varie, par l'observation du maximum de la hauteur, qui, elle, ne varie pas à ce moment. Les meilleures observations se font dans le premier vertical.

Si l'azimut est cherché en fonction de l'heure et de la colatitude, nous employons la formule (7*a*). Elle montre en tout état de cause que $\sin\zeta$ doit être assez grand ; c'est une condition de l'observation même, puisqu'une étoile au zénith n'a pas d'azimut. D'ailleurs les erreurs d'observation au théodolite vont croissant à mesure qu'on se rapproche du zénith. Le coefficient de $d\lambda$, $\cot\zeta \sin A$, y devient infini. Celui de dP est le plus grand dans le méridien, où $\cos\varpi = 1$, mais il peut être réduit en prenant $\sin\delta$ très

petit : application à l'azimut par la Polaire qui est très précis. Ce coefficient est nul avec $\cos\varpi$, ce qui correspond aux digressions : alors une erreur sur l'heure est sans influence sur l'azimut, de même qu'une erreur sur l'heure du passage méridien est sans influence sur la colatitude.

Les conditions relatives à l'azimut sont évidentes sur la *fig.* 3 du Paragraphe 11. A mesure qu'on se rapproche du zénith, l'almicantarat CMC′ diminue de rayon, et la droite MD est de moins en moins bien déterminée. La longueur du rayon est aussi déterminée avec une précision décroissante quand on n'a pas mesuré ζ directement, puisque l'intersection avec le cercle extérieur devient de plus en plus aiguë.

Enfin, si m est voisin de C, un très petit déplacement de ce point en entraîne un très grand sur la direction du rayon azimutal : c'est ce qui arrive près du méridien.

Pour le calcul de l'exemple du Paragraphe 115 (azimut par l'angle horaire), on trouve par $(7a)$

$$-dA = \frac{\sin\varpi}{\sin\zeta}\,d\delta - \cot\zeta\sin A\,d\lambda - \frac{\sin\delta\cos\varpi}{\sin\zeta}\,dP;$$

avec $A = 299°30'$, $P = 57°7'$, $\delta = 68°35'$, $\lambda = 73°53'$, les analogies des sinus donnent $\zeta = 64°22'$ et l'on trouve

$$-dA = 1,105\,d\delta - 0,418\,d\lambda - 0,086\,dP.$$

En multipliant chaque erreur par son coefficient, on aura l'erreur qu'elle introduit dans l'azimut. La faiblesse du coefficient de dP tient à ce qu'on est voisin de la digression. A noter que c'est l'erreur sur δ dont l'effet est le plus sensible dans les observations d'azimut.

Dans l'exemple du n° 116,

$$(5b) \qquad dA = \frac{d\delta}{\sin\lambda\sin P} + \cos P\,d\lambda - \sin\lambda\sin P\,dA,$$

et, en prenant les données citées,

$$dA = 1,12\,d\delta - 0,37\,d\zeta - 0,45\,d\lambda.$$

170. — Équations de condition. Manière de les établir.

Rappelons qu'une observation quelconque est faite en vue de déterminer une ou plusieurs quantités inconnues par une ou plusieurs mesures.

Divers cas peuvent se présenter :

1° *La quantité cherchée est mesurée directement.* L'exemple le plus simple est fourni par l'évaluation d'une longueur à l'aide d'une règle graduée. C'est le cas de toutes les mesures de grandeurs angulaires et linéaires, abstraction faite du but en vue duquel les mesures sont faites. Une observation au théodolite donne directement la double distance zénithale d'un astre. Le compas azimutal permet de lire directement le relèvement magnétique d'un point. On trouve sans calcul la division du cercle qui répond au nadir, c'est-à-dire la direction de la verticale, par l'observation du bain de mercure, l'heure du passage méridien des astres par l'observation à la lunette méridienne.

On peut faire rentrer dans cette catégorie toutes les mesures qui se traduisent par une équation de la forme

$$x = a,$$

dans laquelle x est l'inconnue, et a une quantité numérique obtenue en combinant, par voie d'addition ou de soustraction, une quantité observée directement, avec des quantités connues.

Ainsi de l'observation de la colatitude par la hauteur méridienne d'un astre résulte une équation

$$\lambda = \delta + \zeta,$$

λ est l'inconnue, ζ est observé et δ supposé connu.

2° *L'observation fournit des quantités qui ont, avec les inconnues, une ou plusieurs relations linéaires.* Nous avons vu des exemples de ce genre en traitant des corrections instrumentales. L'observation d'un passage méridien nous donne (§ 49) la relation

$$C_p + \frac{c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} = \alpha - t,$$

et si l'inclinaison i a été déterminée, cette équation est de la forme

$$C_p + Aa + Bc = M,$$

C_p, a et c sont les inconnues, A, B des paramètres connus, M une quantité déduite directement de la mesure opérée.

La marche d'un chronomètre peut être représentée (§ 88), par

$$m = m' + at + a't^2 + b'\theta + b\theta^2 + ct\theta;$$

t, θ, m sont donnés par l'observation : m', a, a', b, b', c sont les inconnues. On obtient alors les valeurs de ces inconnues par la résolution des équations.

Dans les deux cas que nous venons d'examiner, si l'on a autant d'équations, c'est-à-dire d'observations, que d'inconnues, le problème est en général déterminé, et sa solution résulte des méthodes connues de résolution des équations du premier degré à une ou plusieurs inconnues. Si le nombre d'observations est surabondant, les équations qu'on en tire sont généralement incompatibles en raison même des erreurs de mesure. Mais, comme on peut supposer *a priori* toutes les observations également entachées d'erreur (nous ne disons pas d'erreurs égales), rien n'autorise à opérer parmi les données un choix quelconque, et le bon sens indique qu'on doit chercher à faire concourir tous les résultats au calcul des inconnues. Le problème est, de sa nature, un peu vague; il peut se poser ainsi :

Trouver un système de valeurs des inconnues qui, sans satisfaire rigoureusement à aucune des équations particulières, satisfasse le mieux possible à leur ensemble.

C'est sur le sens de ces mots : *le mieux possible,* que porte l'indétermination du problème ; nous dirons même qu'on n'a pas encore réussi à se mettre complètement d'accord sur la manière de les interpréter.

Il est généralement admis comme un axiome que lorsqu'on a mesuré plusieurs fois une même quantité, en prenant chaque fois les mêmes précautions pour assurer au résultat la plus grande précision possible, la moyenne arithmétique des mesures effectuées donne la valeur la plus *plausible* de cette quantité, et par conséquent que c'est la quantité qui satisfait le mieux possible aux observations.

Celles-ci étant supposées débarrassées de toute erreur systématique, cela revient à admettre que les erreurs fortuites d'un certain nombre de mesures sont indifféremment positives ou négatives, et qu'il n'y a pas de raison pour que les premières soient plus grandes ou plus petites que les secondes.

Il y a loin pourtant de ce prétendu axiome aux vérités évidentes de la Géométrie. M. Bertrand a pu dire qu'on a pris depuis longtemps l'habitude d'attribuer aux moyennes une sorte de vertu mystérieuse bien supérieure à leur vrai mérite. M. Faye a montré sur un exemple (*Comptes rendus,* 19 mars 1888) que la moyenne arithmétique peut ne pas donner le résultat le plus probable. Les fortes erreurs ne se compensent pas toujours bien, précisément parce qu'elles sont rares.

Si quelque chose a lieu d'étonner, c'est que cette objection à la théorie des erreurs n'ait pas été faite plus tôt. La probabilité d'une erreur est fonction à la fois de la grandeur absolue de cette erreur et de sa grandeur relative, c'est-à-dire, par là, de la quantité à mesurer. Cette remarque est évidente quand il s'agit d'estimations; or il y a peu de mesures dans lesquelles l'estimation n'entre pas pour une certaine part, quelquefois peu sensible, d'autres fois très notable. Une estimation de distance ou de durée est sujette à de grosses erreurs : il n'est pas rare qu'on s'y trompe du simple au double. Dans les cas de cette espèce, ce n'est plus la moyenne arithmétique, mais la moyenne géométrique qui représente la valeur la plus probable. Une même distance de 1 kilomètre peut être évaluée par un observateur novice à 2000 mètres, et par un autre à 500 ; dans ce cas, ces deux erreurs sont également probables ; la moyenne 1250 mètres n'est pourtant pas la distance vraie, mais c'est le logarithme de celle-ci qui est la moyenne arithmétique des logarithmes des mesures.

Ces réserves posées, et nous y reviendrons, le principe des moyennes est assez généralement admis en pratique, et nous le prendrons comme point de départ.

Supposons qu'on ait déterminé plusieurs jours de suite, en un même lieu, les distances zénithales méridiennes d'une même étoile, avec le même instrument et dans les mêmes conditions de bon pointé. On pourra en déduire autant de valeurs de la colatitude,

$$\lambda = \delta + \zeta,$$

à condition que les valeurs de ζ soient affranchies d'erreurs systématiques, corrigées de la réfraction, etc. On est conduit alors à prendre pour colatitude la moyenne arithmétique des résultats trouvés.

Admettons maintenant qu'on ait mesuré les distances zénithales méridiennes de plusieurs étoiles, on sera porté encore à prendre la moyenne des colatitudes conclues. Cela ne va pourtant pas de soi.

La distance zénithale vraie d'une étoile résulte de l'application, à la distance observée, de plusieurs corrections : réfraction, flexion, niveau ou nadir, erreur de division ; dans le cas d'un instrument répétiteur, on doit tenir compte du temps perdu des vis ; avec un sextant, il faut connaître la collimation.

Dans ce cas, on prendra comme première valeur approchée la moyenne des résultats. On fera la différence entre cette moyenne et chacune des valeurs partielles, c'est ce qui s'appelle calculer les *erreurs résiduelles*. On affectera chacune de ces erreurs du signe qui lui convient, en la considérant comme la correction à faire subir à une observation isolée pour trouver la moyenne. Ce Tableau une fois dressé servira à estimer la valeur des observations.

On examinera avant tout si les grandeurs absolues des résidus d'erreur sont comprises entre les limites que l'on peut tolérer, étant données la précision de l'instrument employé, l'habileté de l'observateur, les circonstances plus ou moins favorables de l'observation. S'il n'en est pas ainsi, si certaines différences dépassent les limites que l'expérience ou le raisonnement permettent d'admettre, il y a présomption que l'on n'a plus affaire uniquement à des erreurs accidentelles, et dès lors il faudra rechercher les erreurs systématiques. Pour dégager les erreurs de réfraction et de flexion, qui croissent toutes deux avec la distance zénithale, on groupera les observations dans l'ordre des distances zénithales. Si alors les résidus varient d'une façon continue avec cette distance et diminuent avec elle, on aura à soupçonner l'existence d'une cause de ce genre ; on la recherchera en mesurant directement l'erreur de flexion avec un collimateur. On applique aux observations les corrections ainsi trouvées et l'on recommence les calculs déjà indiqués. Si le temps perdu des vis est supposé avoir une influence, on groupera les observations en deux catégories : étoiles au nord

et au sud du zénith. Si la moyenne des étoiles au Nord donne une différence notable avec la moyenne des étoiles au Sud, une erreur de ce genre sera possible, ou bien une erreur de collimation du sextant, si c'est de cet instrument qu'on se sert; il est aisé de voir, en effet, qu'une erreur constante sur la distance zénithale produit des erreurs de signes opposés sur la colatitude, selon qu'on observe au nord ou au sud du zénith.

C'est en suivant une marche analogue que les astronomes ont découvert successivement un grand nombre d'inégalités des mouvements célestes, parmi lesquelles nous ne citerons que la précession des équinoxes, la nutation et l'aberration.

Mais l'observation ne donne pas toujours directement la valeur de l'inconnue, ou une relation linéaire à laquelle elle satisfait.

Soit à régler un chronomètre par des observations de distances zénithales. Admettons qu'on ait éliminé toutes les erreurs systématiques. Aux heures $t, t', t'', \ldots$ du chronomètre, on a observé les distances zénithales $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ supposées également bien mesurées, également précises. Cela ne veut pas dire qu'elles sont toutes affectées d'erreurs égales, mais seulement qu'il n'y a pas raison de croire que l'une d'elles est moins bien observée que les autres.

Par le calcul connu, on trouvera les angles horaires P, P', P'', ...; supposons la marche du chronomètre connue, et, à l'aide de cette marche, corrigeons les intervalles entre $t, t', t'', \ldots$ pour les ramener à ce qu'ils auraient été si la marche était nulle. Soient $t_1, t'_1, t''_1, \ldots$ les heures chronométriques ainsi obtenues. En appelant C_p la correction du chronomètre, on devrait avoir

$$\begin{aligned} P - C_p - t_1 &= 0, \\ P' - C_p - t'_1 &= 0, \\ P'' - C_p - t''_1 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais comme les ζ sont affectés d'erreurs, il en résulte des erreurs correspondantes sur les P, et, au lieu de cette équation, on aura

$$\begin{aligned} P - C_p - t_1 &= \Delta, \\ P' - C_p - t'_1 &= \Delta', \\ P'' - C_p - t''_1 &= \Delta'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les Δ étant des quantités inconnues dont nous savons seulement qu'elles sont petites.

Si tous les P étaient également précis, on aurait à prendre la moyenne arithmétique, ce qui se traduirait ici par la relation

$$C_p = \frac{\Sigma (P - t)}{m},$$

m étant le nombre des observations, d'où l'on déduirait l'équation

$$\Sigma \Delta = 0.$$

Mais on a vu que l'erreur dP sur l'angle horaire résultant d'une erreur $d\zeta$ sur la distance zénithale, est sensiblement égale à

$$dP = \frac{d\zeta}{\sin \lambda \sin A}.$$

A des erreurs égales $d\zeta$ correspondent des erreurs inégales dP; si donc les $d\zeta$ sont également probables, ce seront les produits $dP \sin \lambda \sin A$ qui garderont le même caractère. Pour que les Δ soient également précis, il faut multiplier chacun d'eux par $\sin \lambda \sin A$, ce qui conduit à multiplier par le même facteur le premier membre de l'équation en Δ; en sommant alors les équations et posant

$$\Sigma \Delta \sin \lambda \sin A = 0,$$

on aura la valeur la plus plausible de l'inconnue C_p par la relation

$$C_p = \frac{\Sigma (P - t) \sin A}{\Sigma \sin A}.$$

Ce n'est qu'ainsi que chaque équation interviendra avec sa valeur propre. On voit en effet, *a priori*, que les observations voisines du méridien qui ne sont pas aptes à donner l'heure, entreront dans la somme avec un coefficient très petit, $\sin A$, et influeront peu sur le résultat final, ce qui doit être.

3° Ceci nous amène à envisager un *troisième genre d'équations de condition sous la forme générale*

$$F(x, y, z) = \text{quantité observée}.$$

Dans le cas précédent, par exemple, si l'on considérait comme inconnue, non plus seulement l'angle horaire P, mais encore la

colatitude λ, ces équations de condition se présenteraient sous la forme

$$\cos\zeta - \cos\delta\cos\lambda - \sin\delta\sin\lambda\cos P = 0,$$
$$\cos\zeta' - \cos\delta\cos\lambda - \sin\delta\sin\lambda\cos P' = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et leur résolution offrirait de grandes difficultés. Il arrivera même des cas où la résolution explicite sera impossible et où l'on devra procéder par approximation. Il est toujours possible, en suivant les méthodes ordinaires, d'avoir des valeurs approchées des inconnues. Soient x', y', z' ces valeurs; α, β, γ les corrections qu'elles doivent recevoir pour être exactes, c'est-à-dire

$$x' + \alpha = x, \qquad y' + \beta = y, \qquad \ldots.$$

On a alors

$$F(x, y, z) = F(x', y', z') + \frac{dF}{dx'}\alpha + \frac{dF}{dy'}\beta + \frac{dF}{dz'}\gamma + \ldots.$$

La forme analytique de la fonction F est supposée connue; elle peut être une formule d'interpolation; si les quantités x', y', z' sont suffisamment approchées, il sera permis de négliger les puissances supérieures et les produits des petites corrections α, β, γ, et de borner le développement aux termes que nous avons écrits.

Dans ce cas, $F(x, y, z)$ est donnée par l'observation directe comme valeur numérique; d'autre part, la forme de la fonction F étant connue, on peut trouver ses dérivées partielles et y substituer, ainsi que dans la fonction F elle-même, les valeurs approchées x', y', z', de sorte qu'en définitive les équations prennent la forme linéaire

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots - l = 0$$

et les nouvelles inconnues sont α, β, γ, ..., c'est-à-dire les petites corrections des valeurs approchées.

Nous allons donner un exemple de cette manière d'établir les équations de condition sous la forme linéaire.

Plusieurs distances zénithales d'un même astre étant observées à divers instants de la journée, déterminer la colatitude et la correction du chronomètre.

Nous admettrons que les distances zénithales peuvent être affec-

tées d'une erreur constante (erreur de collimation, etc.), mais que, pour le reste, les erreurs sont purement accidentelles.

Commençons par réduire toutes les heures des observations à ce qu'elles auraient été si la marche de la montre avait été nulle; s'il s'agit du Soleil, réduisons les intervalles de temps à partir de la première observation en intervalles de temps vrai, connaissant la marche de la montre sur ce temps. On choisirait d'ailleurs aussi bien une autre heure que celle de la première observation; c'est à l'heure choisie que se rapportera la correction calculée.

Nous admettrons qu'on ait des valeurs approchées de la colatitude λ_0 et de la correction C_0. Cette dernière servira à calculer l'angle horaire P_0 de chaque observation.

On calculera ensuite, pour chaque observation, une distance zénithale ζ_0 par la formule

$$\cos\zeta_0 = \cos\delta\cos\lambda_0 + \sin\delta\sin\lambda_0\cos P_0,$$

ou par une formule équivalente calculable par logarithmes. Si nos données approchées étaient exactes et s'il n'y avait pas d'erreurs d'observation, les valeurs de ζ_0 ainsi trouvées seraient égales aux valeurs ζ observées. S'il n'en est pas ainsi, soient ∂P la correction d'angle horaire, $\partial\lambda$ celle de la colatitude, les valeurs approchées

$$\zeta_0, \qquad \lambda_0, \qquad P_0, \qquad C_0$$

doivent être remplacées par les valeurs vraies

$$\zeta = \zeta_0 + \partial\zeta, \qquad \lambda = \lambda_0 + \partial\lambda, \qquad P = P_0 + \partial P, \qquad C = C_0 + \partial P,$$

cette dernière résultant de nos conventions relativement aux signes de P et de C.

Puisque nos corrections ∂ sont petites, nous pouvons les traiter comme des différentielles. La différentiation de notre équation nous donnera, en y faisant varier ζ, λ et P, la formule $(5\,a)$ du Paragraphe 169, dépouillée du terme en $d\delta$, puisque nous avons admis que la distance polaire est bien connue,

$$d\zeta + \cos A\, d\lambda - \sin A\sin\lambda\, dP = 0.$$

Soit maintenant $\partial\zeta$ l'erreur constante des distances zénithales, telle que

$$\zeta' \text{ mesuré} = \zeta \text{ vrai} - \partial\zeta;$$

remplaçons les différentielles par les ∂. On calculera d'abord $\zeta' - \zeta_0 = a$, et l'on aura

$$d\zeta = \zeta - \zeta_0 = a + \partial\zeta.$$

L'équation de condition sera

$$a + \partial\zeta + \cos A\,\partial\lambda - \sin A \sin\lambda\,\partial P = 0$$

dans laquelle on a trois inconnues, $\partial\zeta$, $\partial\lambda$ et ∂P. On aura autant d'équations de cette forme que d'observations.

On remarquera que chaque équation pourrait s'appliquer à un astre différent. La méthode trouverait par conséquent son emploi pour une série quelconque d'observations de distances zénithales.

171. — Résolution des équations de condition. Méthode de Mayer. Application aux déviations des compas.

Nous avons vu que la résolution d'un système d'équations en nombre supérieur à celui des inconnues doit généralement conduire à des résultats incompatibles. Il est clair pourtant que la multiplicité des observations ne peut qu'être favorable à la précision des résultats. On s'est donc préoccupé d'imaginer des méthodes qui utilisent *toutes* les observations pour obtenir les résultats les plus plausibles et qui se ramènent toujours à obtenir, par la combinaison des équations de condition entre elles, des équations finales qui les contiennent toutes et qui soient en nombre égal à celui des inconnues.

La méthode de Mayer est la plus ancienne et la plus simple. Soient n équations que, pour plus de clarté, nous supposerons ne contenir que trois inconnues x, y, z.

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= m_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= m_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= m_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nous pouvons combiner ces équations par voie d'addition ou de soustraction terme à terme, et si nous cherchons x, il est clair qu'on le trouvera avec une précision d'autant plus grande que son

coefficient dans l'équation finale sera plus grand. Car soit

$$Ax + By + Cz = M$$

cette équation ; on en tirera

$$x = \frac{M - By - Cz}{A},$$

et l'erreur sur x résultant de celles commises sur M, y et z, sera d'autant plus faible que A sera plus grand.

Pour cela, on change les signes de tous les termes dans les équations où x a le signe — ; dans l'ensemble des équations ainsi transformées, tous les termes en x seront positifs, et le coefficient de cette inconnue dans l'équation somme atteindra ainsi la plus grande valeur qu'il puisse avoir quand on s'impose d'employer les équations telles qu'elles sont données, sans les multiplier par aucun facteur.

On formera l'équation finale relative à y en préparant de même les équations données, de manière que le coefficient de y soit positif dans toutes. L'on fera de même encore pour obtenir la troisième équation finale en z.

On arrivera par là à trois équations de la forme

$$\begin{aligned} A\ x + B\ y + C\ z &= D, \\ A'x + B'y + C'z &= D', \\ A''x + B''y + C''z &= D'', \end{aligned}$$

qu'on résoudra par les méthodes connues (substitution, comparaison, coefficients indéterminés). Il est clair que toutes les observations ont concouru à la formation des équations et à la détermination des inconnues. On voit de plus que, si les observations sont suffisamment variées, il y a de grandes chances, d'après le mode de formation des équations finales, pour que le coefficient de l'inconnue par rapport à laquelle on a formé l'une de ces équations soit prépondérant dans cette équation. Il sera toujours beaucoup plus grand que dans une équation primitive isolée : et l'on se rend bien compte que cette manière de calculer augmente la précision des résultats.

Cette méthode très simple s'emploie avantageusement pour la détermination des coefficients d'une série périodique, quand on

connaît des valeurs de la fonction correspondantes à des valeurs équidistantes de l'argument. M. Faye en a fait une application très élégante à la formule qui donne les déviations des compas.

Nous allons donner ici cette application qui montrera comment on peut procéder dans des cas analogues.

La déviation d'un compas sous l'influence du fer du navire peut être représentée par la formule

$$\delta = A + B\sin\theta + C\cos\theta + D\sin 2\theta + E\cos\theta,$$

dans laquelle θ est le cap au compas, c'est-à-dire l'azimut de la ligne médiane du navire compté à partir de la direction de l'aiguille aimantée déviée; δ est la déviation, et A, B, C, D, E sont des constantes qu'il suffit de connaître pour calculer la déviation à un cap quelconque. Supposons maintenant que la circonférence soit divisée en un nombre $2p$ de parties égales x, et qu'on ait observé les déviations $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots, \delta_{2p}$, qui correspondent à des valeurs de θ égales à

$$x, \quad 2x, \quad \ldots, \quad nx, \quad \ldots, \quad 2px,$$

on aura une suite d'équations de condition de la forme

$$\delta_1 = A + B\sin x + C\cos x + D\sin 2x + E\cos 2x$$
$$\delta_2 = A + B\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 4x + E\cos 4x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_n = A + B\sin nx + C\cos nx + D\sin 2nx + E\cos 2nx.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour appliquer la méthode de Mayer à ces équations, dans lesquelles A, B, C, D, E sont les inconnues, on formera l'équation finale en A en les ajoutant membre à membre : l'équation finale en B se formera en changeant les signes de tous les termes des équations dans lesquelles $\sin nx$ est négatif, et additionnant membre à membre avec l'ensemble des équations dans lesquelles $\sin nx$ est positif. On formera d'une manière analogue les équations finales en C, D, E. Il résulte de l'hypothèse que nous avons faite, de valeurs de nx croissant en progression arithmétique, que dans les équations finales relatives à l'une des inconnues, toutes les autres inconnues auront des coefficients nuls.

Pour le faire voir, nous remarquerons qu'en vertu de la formule

connue qui donne la somme de deux cosinus, on a

$$\cos(m-1)x - \cos(m+1)x = 2\sin x \sin mx.$$

Faisons dans cette formule m successivement égal à 1, 2, 3, ..., p, ($px = 180^\circ$) nous aurons

$$\begin{aligned}
\cos 0 - \cos 2x &= 2\sin x \sin x,\\
\cos x - \cos 3x &= 2\sin x \sin 2x,\\
\cos 2x - \cos 4x &= 2\sin x \sin 3x,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cos(p-3)x - \cos(p-1)x &= 2\sin x \sin(p-2)x\\
\cos(p-2)x - \cos px &= 2\sin x \sin(p-1)x\\
\cos(p-1)x - \cos(p+1)x &= 2\sin x \sin px.
\end{aligned}$$

Comme $\cos 0 = 1$ et $\cos px = -1$, on aura, en additionnant membre à membre toutes ces égalités,

$$2 + \cos x - \cos(p+1)x = 2\sin x \Sigma_1^p \sin nx.$$

D'ailleurs $\cos(p+1)x = -\cos x$, il vient après réductions

$$\Sigma_1^p \sin nx = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 \frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \cot\tfrac{1}{2}x.$$

Pour l'autre moitié de la circonférence la somme est $-\cot\frac{1}{2}x$. La somme algébrique des sinus pour toute la circonférence est donc nulle; et si l'on change de signes les sinus de la deuxième moitié et qu'on additionne avec ceux de la première, la somme est $2\cot\frac{1}{2}x$.

Comme à chaque sinus correspond dans la liste un cosinus égal et de même signe, on a aussi zéro pour la somme de tous les cosinus, et en changeant de signe ceux qui ont le signe $-$ (deuxième et troisième quadrants), la somme numérique est $2\cot\frac{1}{2}x$.

Pour avoir les mêmes sommes relatives aux multiples pairs de x, remarquons que cela revient à prendre, pour raison de la progression, $2x$ au lieu de x; alors la somme des valeurs absolues des sinus des multiples pairs de x sera $2\cot x$, répété deux fois, de même que pour le cosinus.

Voyons maintenant ce que sera l'équation finale en A. Son coefficient 1 étant positif, on n'aura qu'à faire la somme de toutes les équations, ce qui donnera, $2p$ étant le nombre des équations,

$$(\delta) = 2p\,\mathrm{A} + \mathrm{B}\,\Sigma_1^{2p}\sin nx + \mathrm{C}\,\Sigma_1^{2p}\cos nx + \mathrm{D}\,\Sigma_1^{2p}\sin 2nx + \mathrm{E}\,\Sigma_1^{2p}\cos 2nx.$$

D'après ce qui a été dit, on voit facilement que les coefficients de B, C, D, E s'évanouissent.

Pour former l'équation finale en B, nous conservons telles quelles les équations dans lesquelles $\sin nx$ est positif, c'est-à-dire $nx < 180°$, et nous changeons les signes de celles où nx appartient aux troisième et quatrième quadrants. On verra alors disparaître A ; C, D, E auront aussi des coefficients nuls, et B sera multiplié par $2\cot\frac{1}{2}x$. On arrive en définitive aux équations toutes résolues

$$\begin{aligned} 2p\,\mathrm{A} &= (\delta), \\ 2\,\mathrm{B}\cot\tfrac{1}{2}x &= (\delta_1), \\ 2\,\mathrm{C}\cot\tfrac{1}{2}x &= (\delta_2), \\ 4\,\mathrm{D}\cot x &= (\delta_3), \\ 4\,\mathrm{E}\cot x &= (\delta_4), \end{aligned}$$

dans lesquelles la signification des symboles (δ_1), (δ_2) est facile à établir : (δ_4), par exemple, s'obtient en faisant la somme algébrique de tous les δ observés dans les deux premiers quadrants, et y ajoutant la somme algébrique changée de signe des δ des troisième et quatrième quadrants, etc.

Les équations une fois résolues, afin de se faire une idée nette de la valeur du résultat, on substituera les valeurs trouvées pour les inconnues dans les équations primitives. Dans le cas présent, on trouvera ainsi des valeurs de la déviation qu'on mettra en regard des valeurs observées ; la série des différences ou erreurs résiduelles fera voir le plus ou moins d'accord du calcul et de l'observation. Cette comparaison est surtout nécessaire lorsque, comme c'est le cas ici, la formule elle-même demande à être vérifiée. Ainsi, pour des compas compensés au moyen de barreaux aimantés très rapprochés, des observations très exactes mettraient en évidence une périodicité de ces erreurs, d'où l'on pourrait conclure à la nécessité d'ajouter des termes 3θ correspondant à une déviation *sextantale*.

Remarquons à ce propos que la précision des observations courantes de déviation est rarement assez grande pour révéler rien de semblable ; les erreurs sur les δ (et par suite sur les arguments θ eux-mêmes) dépassent facilement 1° d'arc dans les circonstances les plus favorables, et comme les coefficients A et E sont habituellement de cet ordre de grandeur, ils seront généralement déterminés avec de grandes erreurs relatives.

172. — Méthode de Legendre ou des moindres carrés. Loi des erreurs.

Afin de faire comprendre comment on a été conduit à substituer à la méthode de Mayer celle des moindres carrés, nous allons exposer brièvement les considérations par lesquelles Gauss a cherché à rattacher la théorie des erreurs d'observation au calcul des probabilités.

Admettons qu'on ait un certain nombre de mesures d'une quantité donnée x, et que chacune de ces mesures soit affectée d'une erreur Δ. Proposons-nous de chercher la loi de ces erreurs, c'est-à-dire une formule donnant la *probabilité* d'une erreur de grandeur déterminée. On admet :

1° Que la grandeur des erreurs est limitée; la limite dépend de l'exactitude du système d'observations, mais l'erreur ne peut jamais être infinie.

2° Que les erreurs positives et négatives sont également probables, ou que dans la mesure on peut aussi bien se tromper en moins qu'en plus, ce qui suppose éliminée toute cause d'erreur systématique. Cette condition, nous l'avons vu, est difficile à remplir; mais nous devons la supposer satisfaite. Elle entraînera cette conséquence, que deux erreurs égales et de signes contraires peuvent se présenter aussi bien l'une que l'autre, que leur probabilité est égale. La fonction est paire.

3° Que la probabilité d'une erreur donnée est une fonction continue de l'erreur seule; une erreur quelconque comprise entre les limites admises est possible : la formule qui donne la probabilité des erreurs doit donc donner cette probabilité pour une erreur quelconque dont on assigne la grandeur entre les limites admises. M. Bertrand a fait voir que cette hypothèse n'est pas permise. La probabilité d'une erreur n'est pas fonction seulement dans la grandeur de cette erreur, mais encore de la grandeur à mesurer. Si l'on mesure une longueur d'un nombre exact de millimètres avec une règle divisée en millimètres, l'erreur à craindre est moindre que si l'on mesure une longueur d'un nombre exact de millimètres, plus $\frac{1}{2}$ millimètre; cette dernière elle-même est moindre que si l'excès sur le nombre entier est $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ de millimètre.

4° Que sur une série d'observations chaque erreur se reproduit un nombre de fois proportionnel à sa probabilité : c'est l'application du théorème de Bernouilli sur les épreuves répétées ; on sait que ce théorème n'est démontré en rigueur que pour un nombre infini d'épreuves.

5° Que la moyenne d'un très grand nombre de mesures d'une quantité est la valeur la plus probable de cette quantité, ce qui suppose encore qu'on n'a affaire qu'à des erreurs accidentelles. Nous avons présenté plus haut la critique sommaire de ce prétendu axiome dont l'évidence est contestable.

Tels sont les principes sur lesquels Gauss s'est appuyé pour sa première démonstration. On peut y ajouter la supposition implicite que les erreurs sont infiniment petites, qui seule permet de négliger leurs puissances supérieures à la première et de mettre les équations de condition sous forme linéaire.

On comprend après cela que M. Faye ait préféré établir la loi de probabilité par la voie empirique. Mais comme ce mode de démonstration ne vaut que pour les observations mêmes sur lesquelles il se base, son extension par voie d'induction à d'autres mesures ne serait pas suffisamment légitimée. Nous allons donc essayer, en partant de nos hypothèses, de construire la loi de probabilité des erreurs, ce qui aura l'avantage, en indiquant la marche suivie par les premiers inventeurs et constituant un corps de doctrine complet, de rappeler du même coup les restrictions contenues dans les prémisses.

Soient $\pm k$ les limites des erreurs possibles. Divisons cet intervalle $2k$ en un nombre quelconque de parties égales $d\Delta$, $d\Delta$ étant assez petit pour que toutes les erreurs comprises entre Δ et $d\Delta$ soient également probables. Soit $\varphi(\Delta)$ la facilité relative d'une de ces erreurs; leur nombre est proportionnel à $d\Delta$, et par suite $\varphi(\Delta)\,d\Delta$ est la probabilité élémentaire d'une erreur Δ. La somme de ces probabilités élémentaires prise entre $-k$ et $+k$ est une certitude, c'est-à-dire l'unité, puisqu'elle représente la probabilité totale de toutes les erreurs qui ont dû être effectivement commises, aucune autre erreur n'étant possible. Mais puisqu'il n'y a pas d'erreurs supérieures à k en valeur absolue, il est indifférent de conserver les limites $\pm k$, ou de prendre $\pm\infty$; enfin puisque la constance de $\varphi(\Delta)$ entre Δ et $\Delta + d\Delta$ ne peut être supposée qu'à la condition

de prendre $d\Delta$ infiniment petit, nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1.$$

La probabilité d'une de ces erreurs est $\varphi(\Delta)\, d\Delta$, et d'après les principes du calcul différentiel $d\Delta$ est constant.

La probabilité de l'existence *simultanée,* dans une série donnée de m observations, des erreurs Δ, Δ', ... est une probabilité composée, que nous pouvons écrire

$$w = \varphi(\Delta)\, d\Delta\, \varphi(\Delta')\, d\Delta\, \varphi(\Delta'')\, d\Delta, \ \ldots = \varphi(\Delta)\, \varphi(\Delta') \ldots d\Delta^m.$$

Nous ferons une nouvelle hypothèse, et nous considérerons comme évident que les valeurs les plus acceptables d'un sytème de mesures sont celles qui rendent maximum la probabilité que les erreurs dont ces mesures sont affectées ont été réellement commises; comme $d\Delta^m$ est constant, c'est le produit $\varphi(\Delta)\ \varphi(\Delta') \ldots$ qui doit être maximum, ou, ce qui revient au même, son logarithme

$$\mathrm{Log}\varphi(\Delta) + \mathrm{Log}\varphi(\Delta') + \ldots.$$

La condition du maximum s'obtient en différentiant et égalant la différentielle à zéro, soit

$$\frac{1}{\varphi(\Delta)} \frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} + \frac{1}{\varphi(\Delta')} \frac{d\varphi(\Delta')}{d\Delta} + \ldots = 0.$$

D'ailleurs, si la moyenne arithmétique des observations est la valeur la plus probable d'une inconnue, comme alors les différences entre la moyenne et les observations sont les erreurs mêmes, la moyenne de ces erreurs doit être nulle, donc

$$\Delta + \Delta' + \Delta'' + \ldots = 0.$$

Ces deux équations définissent séparément la probabilité maximum, elles doivent donc être identiques à un facteur constant près k,

$$\frac{1}{\varphi(\Delta)} \frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta} + \frac{1}{\varphi(\Delta')} \frac{d\varphi(\Delta')}{d\Delta} + \ldots = k(\Delta + \Delta' + \ldots),$$

et comme les Δ, Δ', Δ'', ... sont arbitraires et ne sont liés entre

eux par aucune relation, on doit avoir séparément

$$\frac{1}{\varphi(\Delta)}\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}=k\Delta, \qquad \frac{1}{\varphi(\Delta')}\frac{d\varphi(\Delta')}{d\Delta}=k\Delta'\ldots,$$

d'où, en intégrant,

$$\operatorname{Log}\varphi(\Delta)=k\frac{\Delta^2}{2}+\text{const.},$$

$$\varphi(\Delta)=Ce^{\frac{k}{2}\Delta^2}$$

Puisque nous admettons que la probabilité d'une erreur infinie est nulle, k doit être négatif; soit $-\frac{1}{2}k=h^2$, alors

$$\varphi(\Delta)=Ce^{-h^2\Delta^2}.$$

Pour définir la constante C nous aurons la relation

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)\,d\Delta=1 \qquad \text{ou} \qquad C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=1.$$

Or, on sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi};$$

posant donc $z=h\Delta$, il viendra après substitution

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta=\frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

ce qui, comparé avec la relation (1), donne $C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, et enfin

$$(2) \qquad \varphi(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}.$$

Introduisons maintenant cette expression dans celle de w, on aura

$$w=\frac{h^m}{\pi^{\frac{m}{2}}}e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2)}\,(d\Delta)^m,$$

et l'on voit que cette fonction sera maximum si $\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2$ est minimum. Tel est le principe de la méthode des moindres carrés : *La valeur la plus probable d'une quantité est celle pour laquelle la somme des carrés des erreurs est un minimum.*

Le coefficient h peut servir à mesurer la *précision* d'un système

d'observations. En effet, la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre $\pm\delta$ est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h\delta}^{+h\delta} e^{-z^2}\,dz$$

en posant $h\Delta = z$.

De même pour un autre système d'observations, de précision différente, la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre $\pm\delta'$ est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h'\delta'}^{+h'\delta'} e^{-z^2}\,dz.$$

Si l'on veut exprimer que dans le premier système une erreur δ est aussi probable qu'une erreur δ' dans le second, on égalera ces deux intégrales, ce qui exige l'égalité des limites

$$h\delta = h'\delta',$$

d'où

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{h'}{h};$$

h étant en raison inverse de la grandeur de l'erreur est donc la mesure de la *précision*.

Si l'on suppose maintenant les erreurs rangées par ordre de grandeur, sans avoir égard aux signes, l'erreur qui occupera le milieu de la série sera telle qu'il y ait autant de chances pour une erreur plus grande que pour une erreur plus petite; si r est sa valeur, la probabilité totale des erreurs comprises entre $-r$ et $+r$ sera donc égale à $\frac{1}{2}$, et l'on posera

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{+r} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

On trouve en faisant le calcul

$$r = \frac{0,47694}{h}.$$

Telle est la valeur de l'erreur *probable*.

L'erreur probable, par la relation qui la fait dépendre de la précision, est propre à représenter la valeur d'un système d'obser-

vations, mais elle ne donne pas une idée exacte de la valeur moyenne des erreurs véritablement commises.

Soit m le nombre des observations, et n le nombre d'erreurs égales à Δ. Par définition de la probabilité des erreurs,

$$\frac{n}{m} = \varphi(\Delta)\, d\Delta \qquad \text{ou} \qquad n\Delta = m\Delta\varphi(\Delta)\, d\Delta.$$

Si nous faisons la somme des valeurs analogues se rapportant à toutes les erreurs, nous aurons

$$\Sigma n\Delta = m\int \Delta\varphi(\Delta)\, d\Delta$$

le signe $\int$ pouvant, comme on l'a vu, s'étendre aux limites $\pm\infty$, et par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{\Sigma n\Delta}{m}$$

est la valeur moyenne arithmétique de Δ. Cette moyenne représente une erreur constante : elle est nulle quand toutes les erreurs sont accidentelles. Cette intégrale ne peut donc donner une idée de la valeur moyenne absolue des erreurs commises.

On verra de même que

$$\frac{\Sigma n\Delta^2}{m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2\varphi(\Delta)\, d\Delta$$

est la moyenne des carrés des erreurs ; on définit l'*erreur moyenne* M ou erreur à craindre : la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs. Elle donne bien la mesure de la grandeur moyenne des erreurs, car, en supposant le cas particulier où toutes les erreurs seraient égales en valeur absolue, on aurait

$$\Sigma\,\frac{n\Delta^2}{m} = \frac{m\Delta^2}{m},$$

et la racine carrée serait Δ.

Soit donc

$$\mathrm{M}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2\varphi(\Delta)\, d\Delta.$$

Substituons la valeur trouvée de $\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h\Delta^2}$, et posons

$h\Delta = z$, on aura

$$M^2 = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz.$$

On trouve, en intégrant par parties,

$$2\int z^2 e^{-z^2} dz = \int e^{-z^2} dz - z e^{-z^2},$$

et introduisant les limites $\pm\infty$,

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

et enfin

$$(4) \qquad M^2 = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2h^2}, \qquad M = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Si l'on remplace h par sa valeur en fonction de l'erreur probable, on voit que l'erreur moyenne sera

$$M = \frac{r}{0,674},$$

elle est donc environ les $\frac{3}{2}$ de l'erreur probable.

L'intégrale $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$ indique, comme on l'a vu, la probabilité P que l'erreur est comprise entre $\pm\delta$; son calcul numérique se fait en développant en série $e^{-h^2\Delta^2}$, et l'on trouve

$$(5) \qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(h\delta - \frac{h^3\delta^3}{1.3} + \frac{h^5\delta^5}{1.2.5} - \frac{h^7\delta^7}{1.2.3.7} + \cdots \right),$$

série dont la loi est évidente.

173. — Équations normales de la méthode des moindres carrés Erreurs des résultats.

Nous avons vu comment on forme les équations de condition linéaires en nombre égal à celui des observations distinctes et supérieur à celui des inconnues. Il s'agit maintenant de combiner ces équations entre elles et d'en tirer un nombre d'équations égal à celui des inconnues, et donnant par suite les valeurs de ces inconnues,

en s'imposant la condition de rendre minimum la somme des carrés des erreurs résiduelles. Les équations ainsi obtenues donneront, d'après ce qui précède, et sous réserve des restrictions faites, le système des valeurs les plus probables de ces quantités.

Supposons d'abord que toutes les équations résultent d'observations de même précision. Nous les avons établies sous la forme

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots - l = 0,$$

dans laquelle l est la différence $F(x, y, z, \ldots) - F(x', y', z', \ldots)$ entre la quantité observée (premier terme) et le résultat de la substitution, dans la fonction analytique qui représente le résultat de l'observation, des valeurs approchées $x', y', z', \ldots$ des inconnues; l est donc un nombre, a, b, c sont des coefficients numériques connus, α, β, γ, les corrections de x', y', z'. Pour simplifier les écritures, ne considérons encore que le cas de trois inconnues. Puisque les équations de condition sont supposées incompatibles, il en résulte que lorsqu'on aura trouvé les valeurs de α, β, γ satisfaisant à la condition du minimum d'erreur, la substitution de ces valeurs dans les équations ne donnera pas un premier membre nul; la valeur de ce premier membre sera précisément l'erreur résiduelle Δ. La somme des carrés de ces erreurs est

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma - l)^2 + (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma - l')^2 + \ldots.$$

Pour la rendre minimum, il faut égaler à zéro les coefficients de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dans la différentielle totale

$$\begin{aligned} &2(a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma - l) \\ &+ 2(a'd\alpha + b'd\beta + c'd\gamma)(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma - l') \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ce qui fournira autant d'équations que d'inconnues.

Gauss emploie les symboles

$$[aa] = aa + a'a' + a''a'' + \ldots\ (^1),$$
$$[ab] = ab + a'b' + a''b'' + \ldots;$$

en les introduisant et effectuant les calculs, on voit que les trois

(1) La notation aa remplaçant a^2 pour plus de symétrie.

équations finales seront

$$[aa]\alpha + [ab]\beta + [ac]\gamma = [al],$$
$$[ab]\alpha + [bb]\beta + [bc]\gamma = [bl],$$
$$[ac]\alpha + [bc]\beta + [cc]\gamma = [cl],$$

On les appelle *équations normales*. La règle s'énonce ainsi : Pour former l'équation normale relative à l'inconnue α, on multiplie chacune des équations par le coefficient de α dans cette équation pris avec son signe et l'on fait l'équation somme; pour former l'équation normale relative à β, on multiplie chaque équation par le coefficient de β, etc.

Les équations normales se résoudront par les formules algébriques connues.

Si l'on veut se rendre compte du degré de précision obtenu, on remplace α, β, γ par leurs valeurs dans les équations de condition; les valeurs des premiers membres après cette substitution seront les erreurs résiduelles Δ des observations; elles permettent de calculer l'erreur moyenne à craindre sur une observation par la formule

$$M = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}},$$

ou plutôt

$$M = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m - i}},$$

i étant le nombre des inconnues.

On motive cette substitution par ce fait que les Δ calculés ne sont pas les erreurs elles-mêmes, mais seulement les écarts de la moyenne. On s'en rend bien compte en considérant le cas le plus simple, celui où l'on a autant d'observations que d'inconnues, $m = i$. Dans ce système, chaque inconnue a une valeur déterminée et unique qu'on adopte; la différence Δ entre les résultats trouvés et adoptés est donc nulle, et par suite le degré de précision de l'observation est indéterminé. Or si $[\Delta\Delta]$ est nul, M ne peut être indéterminé que si le dénominateur est nul; c'est ce qui arrive avec la deuxième formule, tandis que la première donnerait $M = 0$, et conduirait à ce résultat absurde qu'une quantité est d'autant plus exactement déterminée qu'on a fait moins d'observations.

Mais ce n'est pas là ce dont on a besoin pour apprécier l'erreur du résultat; il faut calculer l'erreur à craindre, non sur chaque observation isolée, mais sur le résultat lui-même.

Soit une fonction U de plusieurs quantités observées O, O', O'', ..., dont les erreurs moyennes sont respectivement ε, ε', ε'', ...; on démontre que l'erreur moyenne ou l'erreur à craindre sur U est exprimée par

$$\pm\sqrt{\left(\frac{dU}{dO}\right)^2\varepsilon^2+\left(\frac{dU}{dO'}\right)^2\varepsilon'^2+\left(\frac{dU}{dO''}\right)^2\varepsilon''^2}.$$

On en déduit que l'erreur à craindre sur la moyenne de m mesures, dont chacune a pour erreur moyenne ε, est égale à

$$\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},$$

c'est-à-dire que la précision des mesures n'est pas proportionnelle au nombre des observations, mais à la racine carrée de ce nombre. (Application à la méthode de la réitération.)

Nous donnerons aussi, sans démonstration, la règle indiquée par Gauss pour évaluer la précision des résultats déduits de la méthode des moindres carrés.

Ayant trouvé les valeurs α, β, γ déduites des équations normales, on remplace dans chaque équation primitive de condition α, β, γ par ces valeurs; on calcule

$$a\alpha+b\beta+c\gamma-l=\varepsilon, \qquad a'\alpha+b'\beta+c'\gamma-l'=\varepsilon',$$

et ainsi de suite. Puis on calcule les carrés ε^2, ε'^2, ..., et l'erreur moyenne

$$\varepsilon_1=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-3}} \quad \text{(cas de trois inconnues)}.$$

Puis on calcule trois quantités X, Y, Z, en opérant comme suit :

Dans les équations normales, remplaçons les seconds membres par 1, 0, 0, calculons la valeur de α qui résulte de ce système, appelons-la X.

Dans les mêmes équations, remplaçons les seconds membres par 0, 1, 0, calculons la valeur de β, appelons-la Y.

Z se trouvera de même en remplaçant les seconds membres par 0, 0, 1. Les erreurs moyennes des résultats seront :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } \alpha\ldots \quad \varepsilon_1\sqrt{X},\\ &\text{Pour } \beta\ldots \quad \varepsilon_1\sqrt{Y},\\ &\text{Pour } \gamma\ldots \quad \varepsilon_1\sqrt{Z}. \end{aligned}$$

Le dénominateur commun D a déjà dû être calculé pour la résolution des équations normales; les numérateurs de X, Y, Z se simplifient notablement.

La méthode des moindres carrés ne s'applique qu'au cas où les erreurs suivent bien la loi des erreurs fortuites. Comme on ne connaît pas les erreurs elles-mêmes, on ne saura généralement pas *à priori* si l'application est permise. On ne saura donc généralement pas si l'on n'a pas affaire à quelque erreur constante. On peut pourtant essayer de le découvrir par la manière dont se comportent les résidus d'erreurs. En se rappelant que, les erreurs étant rangées par ordre de grandeur absolue, l'erreur probable doit occuper le milieu de la série, on calculera

$$M=\sqrt{\frac{(\Delta\Delta)}{m-i}} \qquad \text{et} \qquad r=0{,}674\,M.$$

On écrira les erreurs par ordre de grandeur, et l'on verra si celle du milieu est bien égale à r.

On peut aller plus loin. En faisant dans la formule (5) δ successivement égal à $\frac{1}{2}r$, r, $\frac{3}{2}r$, ..., on trouve les probabilités des erreurs inférieures à $\frac{1}{2}r$, r, ... On construit ainsi la Table suivante des probabilités.

Sur 1000 observations dont l'erreur probable est r, il y en a

264	dont l'erreur est inférieure à..	$\frac{1}{2}r$
500	»	r
688	»	$\frac{3}{2}r$
823	»	$2r$
908	»	$\frac{5}{2}r$
956	»	$3r$
982	»	$\frac{7}{2}r$

993	dont l'erreur est inférieure à..	$4r$
998	»	$\frac{9}{2}r$
999	»	$5r$

On s'assurera si les nombres déduits de la liste d'erreurs qu'on aura dressée suivent bien cette loi.

M. Faye a montré que cette loi se vérifie pour certaines observations : il a choisi notamment des déterminations d'ascensions droites du Soleil effectuées par Bradley, et des résultats de tir à la cible. Dans ce dernier cas, on avait l'avantage de connaître directement l'erreur elle-même, au lieu de n'avoir que la valeur la plus probable de la quantité cherchée.

On peut encore appliquer un autre criterium qui revient d'ailleurs au même. Si l'on calcule l'intégrale $\int_0^\infty \Delta\varphi(\Delta)\,d\Delta$ on obtient la moyenne des erreurs positives : or, en posant $\Delta = \frac{z}{h}$, on ramène cette intégrale à

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty ze^{-z^2}dz,$$

qui peut être obtenue explicitement (l'intégrale indéfinie est $\frac{1}{2}e^{-z^2}$), et la valeur est $\frac{1}{2h\sqrt{\pi}}$ = moyenne des Δ positifs, qui est aussi la même pour les écarts négatifs, et par conséquent la moyenne des Δ pris en valeur absolue. Le carré de cette moyenne est $\frac{1}{4\pi h^2}$.

D'autre part, on a trouvé

$$M^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

De là la règle : lorsque les écarts d'une série de nombres avec leur moyenne satisfont à la loi de fréquence des erreurs fortuites, le double quotient de la moyenne des carrés des écarts, pris en valeur absolue, par le carré de l'écart moyen est égal à π.

Nous allons montrer par un exemple comment on applique ces règles. Par le transport du temps, aller et retour entre Saïgon, Quinhone et Haïphong, on a obtenu les nombres suivants pour

longitude du lieu d'observation à Quinhone, rapportée à Saïgon :

A l'aller.		Au retour.	
834 Bréguet...	$10^m\ 8^s,80$	834 Bréguet...	$10^m\ 9^s,16$
339 Vissière...	$2^s,75$	339 Vissière...	$3^s,82$
529 Winnerl ..	$6^s,62$	529 Winnerl ..	$7^s,37$
268 Vissière...	$9^s,70$	253 Vissière...	$10^s,57$
1049 Dumas....	$10^s,90$	51 Winnerl ..	$9^s,65$
Compteur.	$2^s,00$	271 Winnerl ..	$8^s,43$
		Compteur.	$13^s,45$

Les discordances qui précèdent sont assez grandes; mais il est à remarquer que les traversées entre Saïgon et Haï-Phong ont duré : la première, vingt-cinq jours, et la deuxième, vingt-huit jours.

Pour chercher l'erreur probable de la moyenne de ces résultats, on commence par s'assurer que leur série suit bien la loi des erreurs fortuites. Pour cela, on prend la différence en valeur absolue de chaque résultat avec la moyenne qui est de $10^m 7^s,94$.

On obtient ainsi par ordre de grandeur les chiffres suivants :

0,49
0,57
0,86
1,22
1,32
1,71
1,76
2,63
2,96
4,12
5,19
5,51
5,94

L'erreur probable, qui occupe le milieu, serait donc $1^s,76$. Or, en la calculant d'après l'erreur moyenne, on trouve $2^s,18$, plus près de $1^s,76$ que du nombre immédiatement suivant, $2^s,63$.

Appliquons le deuxième criterium.

Grandeur de l'erreur ε.		Nombre des erreurs inférieures à cette grandeur. théoriquement.	en fait.
$\frac{1}{2}r$.....	$1^s,09$	3,4	3
r.....	$2^s,18$	6,5	7
$\frac{3}{2}r$.....	$3^s,27$	8,9	9
$2r$.....	$4^s,36$	10,7	10
$\frac{5}{2}r$.....	$5^s,45$	11,8	11
$3r$.....	$6^s,54$	12,4	13

Cette concordance est suffisante.

On a d'ailleurs :

Moyenne du carré des écarts.	10,44	Double.	20,88
Écart moyen.....	2,637	Carré..	6,95

$$\frac{20,88}{6,95} = 3,00 \text{ peu différent de } \pi = 3,14.$$

On peut donc admettre, malgré le petit nombre d'observations, que les erreurs suivent bien la loi normale, et qu'en conséquence il est permis d'appliquer la méthode ordinaire au calcul de l'erreur probable de la moyenne. Cette erreur est

$$\frac{2^s,18}{\sqrt{13}} = \pm 0^s,61.$$

On trouve ainsi pour l'observatoire à Quinhone :

$$0^h\,10^m\,7^s,94 \pm 0^s,61.$$

Mais on voit que s'il y a eu une erreur commise sur l'état observé à Quinhone, elle se reporte intégralement sur le résultat, sans rien changer à la concordance obtenue, et une telle erreur, qui peut se monter à 2^s et plus, ne serait révélée par rien dans ces calculs.

Nous avons dû supposer dans ce qui précède qu'on ne comparait ensemble que des observations de même précision. Pour ramener tous les cas possibles à celui-là, on introduit la considération des poids. Le *poids* d'une grandeur mesurée est le nombre d'observations également précises, nécessaire pour que leur moyenne ait la même précision que la valeur considérée.

On a vu plus haut que l'erreur à craindre sur la moyenne de m observations affectées d'erreurs ε est

$$M = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Une observation qui a une erreur moyenne M peut donc être remplacée par m observations dont l'erreur moyenne est ε, et m sera le poids de cette observation unique.

Le poids d'une observation unique dont l'erreur serait M', composée avec m' observations d'erreur ε serait tel que

$$M' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m'}},$$

d'où

$$\frac{m}{m'} = \frac{M'^2}{M^2},$$

donc les poids des observations M et M' sont en raison inverse des carrés des erreurs moyennes, ou en raison directe des carrés des mesures de précision h.

Pour chercher la valeur la plus probable d'une quantité dont on possède des mesures de précisions différentes, il faut multiplier chaque mesure par son poids, ajouter les produits et diviser la somme par la somme des poids. On voit facilement qu'on peut remplacer les poids par des nombres entiers qui leur sont proportionnels.

La notion des poids est des plus délicates à appliquer judicieusement. Un examen superficiel de la question peut facilement induire en erreur. De ce qu'avec un instrument donné les pointés ont une précision fixe, on ne peut pas conclure que deux angles quelconques mesurés dans les mêmes circonstances, avec le même nombre de réitérations, ont les mêmes erreurs. Les petits angles sont mesurés avec plus d'exactitude que les grands, et dans la pratique, quand un angle d'un triangle est très aigu, nous n'hésitons pas à sacrifier le principe qui répartit également sur les trois angles l'erreur de fermeture.

La même règle s'applique encore à la formation des équations de condition : chaque équation doit être multipliée par son poids, de

manière que les erreurs moyennes des termes constants soient égales.

Nous devons rappeler encore une fois que toutes ces conséquences n'ont que la valeur des prémisses dont elles découlent et dont on a vu le peu de rigueur. Il était intéressant d'exposer l'ensemble d'une méthode très célèbre, ne fût-ce qu'au point de vue historique : le lecteur bien prévenu saura, nous l'espérons, se tenir en garde contre les applications abusives ; il n'oubliera pas d'ailleurs que les mesures prises en voyage présentent rarement le caractère de régularité qui peut quelquefois être supposé appartenir aux travaux des Observatoires.

174. — Méthode de Cauchy.

La méthode des moindres carrés donne les résultats les plus probables, quand toutes les hypothèses qui lui servent de base sont réalisées. Elle permet aussi, dans ces conditions, le calcul systématique des erreurs qui affectent ces résultats. Mais à mesure que le nombre des inconnues augmente, le calcul devient plus pénible. Il arrive aussi que l'on ait, pour premiers membres des équations de condition primitives, des séries indéfinies plus ou moins convergentes; dont on doit déterminer un nombre de termes suffisant, sans que rien dise *a priori* combien de ces termes sont nécessaires. Si l'on applique la méthode des moindres carrés à des équations où le nombre des termes conservés est insuffisant, et qu'on vienne à se convaincre de la nécessité d'adjoindre des termes nouveaux, il est nécessaire de recommencer tous les calculs. On a donc quelquefois intérêt à employer une méthode qui n'expose pas à cette éventualité.

La méthode de Cauchy, reprise par Yvon Villarceau, est à proprement parler une méthode d'interpolation, c'est-à-dire de calcul des coefficients numériques d'une série. Les équations de condition sont mises sous la forme linéaire, comme pour l'application des méthodes précédentes.

Soit un système d'équations de la forme

$$(1) \qquad y = Aa + Bb + Cc + Dd + \ldots,$$

dans lequel les y sont des quantités données par l'observation,

A, B, C, D des coefficients constants connus, et a, b, c, d, ... des constantes inconnues qu'il s'agit de déterminer.

Comme première approximation de a, prenons la valeur qui résulte du système d'équations réduites aux premiers termes des seconds membres, ou

$$y = \mathrm{A}a.$$

Multiplions chaque équation par une constante k, égale ou inférieure à l'unité en valeur absolue et faisons la somme

$$\Sigma ky = a\Sigma k\mathrm{A}, \qquad a = \frac{\Sigma ky}{\Sigma k\mathrm{A}}.$$

Soit Y la valeur vraie de y, et η l'erreur inconnue de l'observation, telle que

$$\mathrm{Y} = y + \eta.$$

La valeur calculée sera donc

$$y(\text{calc.}) = \frac{\Sigma k\mathrm{Y}}{\Sigma k\mathrm{A}} - \frac{\Sigma k\eta}{\Sigma k\mathrm{A}}. \tag{2}$$

Le premier terme est la vraie valeur de y, et le deuxième est l'erreur de la valeur calculée.

Pour rendre ce dernier terme minimum, donnons à k sa valeur maximum, l'unité, et le même signe que A. Le dénominateur sera ainsi maximum. Quant au numérateur, il sera toujours inférieur à la somme des valeurs arithmétiques d'η : et même, par suite du caractère fortuit de ces erreurs, dont le signe n'a pas de relation avec celui des A, on admettra que si l'on traite un nombre d'équations suffisamment grand, et que l'on groupe séparément les $\mathrm{A}\eta$ positifs et les $\mathrm{A}\eta$ négatifs, chaque groupe sera près d'être nul, et qu'il en sera ainsi *a fortiori* de leur différence.

Le calcul que nous venons de faire pour trouver une première valeur d'y revient à changer les signes de tous les termes dans les équations dans lesquelles A est négatif, et à faire la somme algébrique des y ainsi obtenus et la somme arithmétique des A rendus tous positifs. Si, au lieu de considérer les équations réduites à leurs premiers termes, nous considérons plusieurs termes

$$y = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + \ldots,$$

en changeant les signes de tous les termes des équations dans les-

quelles A est négatif et sommant les coefficients, il viendra une relation

$$\mathrm{S}y = a\mathrm{SA} + b\mathrm{SB} + c\mathrm{SC} + d\mathrm{SD};$$

le symbole S désigne la sommation, et les sommes S seront dites *subordonnées* à A, qui est la *dominante*. (Yvon Villarceau.)

La valeur approchée obtenue pour a sera d'après cela

$$a = \frac{\mathrm{S}y}{\mathrm{SA}},$$

et en la substituant dans chacune des équations primitives réduites à leur premier terme, il viendra une série de valeurs d'y de la forme

$$y = \mathrm{A}\frac{\mathrm{S}y}{\mathrm{SA}},$$

qui devront être corrigées de quantités inconnues Δy, pour avoir égard à l'influence des termes négligés en B, C, ..., de sorte qu'en réalité

$$y = \mathrm{A}\frac{\mathrm{S}y}{\mathrm{SA}} + \Delta y.$$

Reprenons maintenant les équations complètes, changeons les signes de tous les termes dans celles où A est négatif; sommons les coefficients de même rang, nous aurons

$$\mathrm{S}y = a\mathrm{SA} + b\mathrm{SB} + c\mathrm{SC} + \ldots;$$

les S seront ainsi des sommes subordonnées à A.

Cette équation sera satisfaite par les valeurs qui satisfont au système

$$y = a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \ldots.$$

Multiplions-la par $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{SA}}$ et retranchons-en successivement chacune des équations primitives, il viendra un nombre d'équations égal à celui des proposées, qui leur seront encore équivalentes, et de la forme

$$y - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{SA}}\mathrm{S}y = a\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{SA}}\mathrm{SA}\right) + b\left(\mathrm{B} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{SA}}\mathrm{SB}\right) + c\left(\mathrm{C} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{SA}}\mathrm{SC}\right) + \ldots,$$

dans lesquelles, comme on voit, a aura un coefficient nul, d'où

cette inconnue sera par suite éliminée, et dont le premier membre sera Δy.

En posant de même par analogie

$$B - \frac{A}{SA} SB = \Delta B, \qquad C - \frac{A}{SA} SC = \Delta C,$$

les équations nouvelles seront de la forme

$$\Delta y = b\Delta B + c\Delta C + \dots.$$

En recommençant sur ces équations les mêmes opérations que sur les proposées, on éliminera b.

On est amené ici à subordonner les sommes à ΔB, à en tirer des valeurs analogues aux Δ, que nous dénommerons $\Delta^2 y$, $\Delta^2 C$, $\Delta^2 D$, ..., et des nouvelles équations obtenues on éliminera c, et ainsi de suite.

Les Δy, $\Delta^2 y$, ..., ΔC, $\Delta^2 C$, ... ont des valeurs numériques que nous calculons; les Δ successifs de y sont les différences successives entre y calculé et y observé. Quand on sera amené par la marche des opérations à une série de valeurs $\Delta^p y$, telles que leurs grandeurs ne dépassent pas les erreurs moyennes du genre d'observations dont il s'agit, on sera autorisé à arrêter l'élimination; la valeur trouvée pour la dernière inconnue sera considérée comme exacte, et servira à calculer les autres en remontant.

Résumons la marche à suivre.

Former d'abord les équations de condition de la forme

$$y = Aa + Bb + Cc + Dd + \dots$$

dans lesquelles $a, b, c, \dots$ sont les inconnues à déterminer, et les écrire les unes sous les autres.

Adoptons pour le coefficient A le signe $+$; changeons de signe tous les termes des équations dans lesquelles A a le signe $-$.

Faisons alors la somme algébrique de tous les coefficients A, puis des coefficients y, B, C, ... dans les équations ainsi transformées, ce seront les sommes subordonnées à A. Nous obtiendrons une équation unique de la forme

$$Sy = aSA + bSB + cSC + \dots.$$

Tirons-en la valeur *approchée*

$$a = \frac{Sy}{SA}.$$

Remplaçons a par cette valeur dans les termes de la forme Aa de toutes les équations primitives et faisons les différences

$$\Delta y = y - A\frac{Sy}{SA} = y - \frac{A}{SA}Sy.$$

L'inspection des Δy nous fera connaître, d'après les règles que l'on jugera devoir adopter pour les conditions dans lesquelles on opère, si l'on doit s'en tenir au premier terme ou pousser les calculs plus loin. Dans ce dernier cas, calculons les différences

$$\Delta B = B - \frac{A}{SA}SB, \qquad \Delta C = C - \frac{A}{SA}SC,$$

pour chaque équation de condition et écrivons les n équations de la forme

$$\Delta y = b\Delta B + c\Delta C + d\Delta D + \ldots, \tag{2}$$

résultat de l'élimination de a.

Donnons à ΔB le même signe dans toutes ces équations; additionnons membre à membre et désignons par S' les sommes *subordonnées* à ΔB, il viendra

$$S'\Delta y = bS'\Delta B + cS'\Delta C + \ldots.$$

Tirons-en la valeur approchée

$$b = \frac{S'\Delta y}{S'\Delta B}.$$

Calculons encore pour chacune des n équations les quantités suivantes

$$\Delta^2 y = \Delta y - \frac{\Delta B}{S'\Delta B}S'\Delta y$$

et

$$\Delta^2 C = \Delta C - \frac{\Delta B}{S'\Delta B}S'\Delta C, \qquad \Delta^2 D = \Delta D - \frac{\Delta B}{S'\Delta B}S'\Delta D.$$

Si l'inspection des $\Delta^2 y$ nous apprend qu'il faut continuer, for-

mons les n équations

$$\Delta^2 y = c\Delta^2 C + d\Delta^2 D + \dots . \qquad (3)$$

Donnons à $\Delta^2 C$ le même signe dans toutes les équations, et soient S'' les sommes subordonnées à $\Delta^2 C$. Additionnons membre à membre, il viendra l'équation

$$S''\Delta^2 y = cS''\Delta^2 C + dS''\Delta^2 D + \dots .$$

Tirons de là la valeur *approchée*

$$c = \frac{S''\Delta^2 y}{S''\Delta^2 C},$$

Substituant dans les n équations de la forme (3) et calculant

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - \Delta^2 C \frac{S''\Delta^2 y}{S''\Delta^2 C} = \Delta^2 y - \frac{\Delta^2 C}{S''\Delta^2 C} S''\Delta^2 y,$$

nous verrons à l'inspection des $\Delta^3 y$ s'il faut continuer.

Dans ce cas, on calculerait les coefficients

$$\Delta^3 D = \Delta^2 D - \frac{\Delta^2 C}{S''\Delta^2 C} S''\Delta^2 D, \qquad \Delta^3 E = \Delta^2 E - \frac{\Delta^2 C}{S''\Delta^2 C} S''\Delta^2 D$$

des n équations de la forme

$$\Delta^3 y = d\Delta^3 D + e\Delta^3 E + \dots ,$$

d'où l'on tirerait d, en *subordonnant* les sommes S''' à $\Delta^3 D$.

Une fois que l'on est arrivé au point où l'inspection des $\Delta^p y$ indique qu'on doit s'arrêter, la valeur de la dernière inconnue trouvée ne doit plus être considérée comme approchée, mais comme exacte. Supposons, par exemple, que l'inspection des $\Delta^4 y$ indique que l'on peut s'en tenir à d. Nous obtiendrons alors les valeurs de a, b, c par les relations suivantes, qui sont déjà calculées et dont la loi de formation est facile à saisir,

$$\begin{aligned} a\,SA + b\,SB + c\,SC + d\,SD &= Sy, \\ b\,S'\Delta B + c\,S'\Delta C + d\,S'\Delta D &= S'\Delta y, \\ c\,S''\Delta^2 C + d\,S''\Delta^2 D &= S''\Delta^2 y, \\ d\,S'''\Delta^3 D &= S'''\Delta^3 y. \end{aligned}$$

La dernière équation donne directement d; on substitue cette

valeur dans l'avant-dernière et l'on en tire c; c et d substitués dans l'équation immédiatement précédente fournissent b, et ainsi de suite en remontant.

On rencontre au courant du calcul des vérifications utiles.

De l'équation

$$Sy = a\,SA + b\,SB + c\,SC + \dots$$

on tire la valeur de a

$$a = \frac{Sy}{SA} - b\frac{SB}{SA} - c\frac{SC}{SA} - \dots,$$

et, en la substituant dans une des proposées, on a

$$y = \frac{Sy}{SA}A - \frac{SB}{SA}Ab - \frac{SC}{SA}Ac - \dots + Bb + Cc + \dots$$

ou bien

$$y - \frac{A}{SA}Sy = b\left(B - \frac{A}{SA}SB\right) + c\left(C - \frac{A}{SA}SC\right) + \dots,$$

et de même pour toutes les autres. Ce sont les équations que nous avons obtenues et desquelles a est éliminé par substitution. Mettons cette équation sous la forme

$$y\,SA - A\,Sy = b\,(BSA - ASB) + c\,(CSA - ASC) + \dots,$$

écrivons les autres équations

$$y'SA - A'Sy = b\,(B'SA - A'SB) + c\,(C'SA - A'SC) + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et sommons; il vient, en ayant égard aux définitions des S,

$$Sy\,SA - SA\,Sy = b\,(SB\,SA - SA\,SB) + c\,(SC\,SA - SA\,SC) + \dots;$$

par conséquent, lorsqu'on aura éliminé une inconnue, en faisant, avant de changer les signes, la somme des coefficients de chaque inconnue dans les équations nouvelles, ces sommes doivent être toutes nulles. Il est nécessaire de faire cette vérification des calculs avant d'aller plus loin.

On voit que cette méthode est une méthode d'élimination. Appliquée à des équations en nombre égal à celui des inconnues, elle en donnerait les solutions rigoureuses. Les éliminations succes-

sives font disparaître des inconnues sans diminuer le nombre des équations. Le calcul des résidus d'erreur Δy, $\Delta^2 y$, ... est très instructif pour le choix du nombre des inconnues. La méthode s'applique d'ailleurs sans changement quand le nombre de celles-ci est limité *a priori;* les résidus d'erreur font connaître alors le degré de précision des observations employées.

Pour la détermination des coefficients d'une série, sachant d'avance qu'on ne calculera pas un nombre illimité de termes, l'habileté du calculateur consiste à commencer par les plus importants; on voit par l'examen des résidus si l'on dispose d'un nombre suffisant d'observations. Ces avantages seront surtout appréciables si, en formant l'équation qui détermine la première inconnue, les autres inconnues disparaissent à peu près d'elles-mêmes, car alors on peut former l'équation relative à l'inconnue suivante sans éliminer la première. On peut appliquer alors avec avantage une remarque due à Le Verrier, et discutée par M. Tisserand : c'est qu'on obtient de cette méthode la plus grande précision en supprimant les équations dans lesquelles le coefficient de l'inconnue cherchée est inférieur au tiers de la valeur maximum de ce coefficient. Dans ces conditions, les erreurs probables des diverses méthodes sont entre elles comme les chiffres suivants :

Moindres carrés.....	17
Cauchy ou Mayer.....	20
Le Verrier.....	18 (1)

175. — Détermination simultanée du temps, de la colatitude et de l'erreur de hauteur.

Nous allons montrer sur quelques questions spéciales comment on doit appliquer la méthode des moindres carrés.

Nous sommes arrivés (§ 170, 3°) à la formule des équations de condition relatives au cas qui nous occupe,

$$a + \partial\zeta + \partial\lambda \cos A - \partial P \sin A \sin\lambda = 0.$$

(1) Consulter : *Connaissance des Temps*, pour 1852, Additions, page 121 et suivantes (Yvon Villarceau), et *Recherches sur les chronomètres et instruments nautiques*, 9e Cahier (A. de Magnac).

Comme il s'agit ici de petites corrections, des valeurs approchées de A et λ suffisent pour calculer les coefficients.

Soit n le nombre d'observations, les équations normales seront

$$[a] + n\partial\zeta + [\cos A]\,\partial\lambda - [\sin A \sin\lambda]\,\partial P = 0,$$
$$[a\cos A] + [\cos A]\,\partial\zeta + [\cos A\cos A]\,\partial\lambda - [\cos A \sin A \sin\lambda]\,\partial P = 0,$$
$$[a \sin\lambda \sin A] + [\sin A \sin\lambda]\,\partial\zeta + [\cos A \sin A \sin\lambda]\,\partial\lambda - [\sin^2 A \sin^2\lambda]\,\partial P = 0.$$

On peut leur donner une forme plus claire en posant

$$\partial\zeta = x, \qquad \partial\lambda = y, \qquad \partial P \sin\lambda = z$$

et effectuant quelques réductions, alors

$$[a] + nx + [\cos A]\,y - [\sin A]\,z = 0,$$
$$[a\cos A] + [\cos A]\,x + [\cos^2 A]\,y - \tfrac{1}{2}[\sin 2A]\,z = 0,$$
$$[a\sin A] + [\sin A]\,x + \tfrac{1}{2}[\sin 2A]\,y - [\sin^2 A]\,z = 0.$$

Pour déterminer l'erreur sur x, on aura à tirer X des équations

$$1 + n\mathrm{X} + [\cos A]\,y - [\sin A]\,z = 0,$$
$$[\cos A]\,\mathrm{X} + [\cos^2 A]\,y - \tfrac{1}{2}[\sin 2A]\,z = 0,$$
$$[\sin A]\,\mathrm{X} + \tfrac{1}{2}[\sin 2A]\,y - [\sin^2 A]\,z = 0,$$

et l'on formerait les équations donnant les erreurs sur y et z, comme au Paragraphe 173.

Des valeurs approchées de l'azimut A et de la colatitude λ suffisent pour le calcul des coefficients. Nous ferons ici une remarque générale. Dans tous les problèmes de détermination de l'heure en fonction de la distance zénithale, ∂P a pour coefficient sinλ. Il en résulte, comme on l'a déjà vu, que la précision de l'évaluation de l'heure, et par suite, de la longitude, décroît à mesure qu'on se rapproche des pôles. Mais l'erreur itinéraire correspondante, ou l'erreur absolue de position sur le globe, reste la même à toutes les latitudes, puisque la longueur linéaire du degré de longitude est justement proportionnelle à sinλ. C'est pour cette raison que ce facteur n'intervient pas dans le calcul du point rapproché où l'erreur p est une longueur exprimée en milles.

176. — Détermination des corrections de la lunette méridienne.

On ne peut pas déterminer en même temps l'azimut et l'inclinaison. Supposons donc les observations corrigées de l'erreur d'inclinaison de l'axe horizontal, ce qui est toujours facile, puisqu'on a fait la lecture du niveau. La collimation aussi peut se déterminer séparément, mais nous allons montrer comment elle peut se tirer de l'ensemble des observations des passages. Soient maintenant prises les notations du Paragraphe 170, on a la formule

$$C = \alpha - t - \frac{c + i\cos(\delta - \lambda) + a\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta}.$$

Les inconnues sont : C correction de la pendule; c collimation, et a azimut de la lunette.

Soit C_0 une valeur approchée de la correction et $C = C_0 + w$. Cette équation peut s'écrire

$$w + a\frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} + c\frac{1}{\sin\delta} = \alpha - \left[t + i\frac{\cos(\delta - \lambda)}{\sin\delta} + C_0\right].$$

On connaît C_0, ne fût-ce qu'en calculant le passage sans les corrections; on peut calculer $\frac{i\cos(\delta - \lambda)}{\sin\delta}$; t est le passage au fil moyen, et α l'ascension droite; le second membre est donc connu. On le calculera et nous le représenterons par p : c'est, par hypothèse, une petite quantité.

Chaque étoile observée fournira une équation de la forme

$$(1) \qquad w + a\frac{\sin(\delta - \lambda)}{\sin\delta} + c\frac{1}{\sin\delta} = p,$$

p est affecté de l'erreur sur i, que l'on peut supposer négligeable si les nivellements sont bien faits, ou que du moins il est permis de traiter comme une erreur accidentelle : il est aussi affecté de l'erreur sur t, c'est-à-dire sur l'observation même du passage. Cette dernière erreur ne peut plus être considérée comme accidentelle : elle comprend l'équation personnelle, et elle est d'autant plus grande que le passage a lieu plus lentement, c'est-à-dire que δ est

plus petit. Avec un cercle méridien portatif, Laugier l'admettait égale à $0^s,1$ pour une étoile équatoriale, et à 4^s pour la Polaire.

M. Faye la représente par

$$\pm\sqrt{(0^s,07)^2+\left(\frac{3^s,2}{G\sin\delta}\right)^2},$$

G étant le grossissement de la lunette, ce qui ferait :

Avec un grossissement de 200,	$\pm 0^s,07$	étoile équatoriale	$\pm 0^s,70$ la Polaire.
» 60,	$\pm 0^s,10$	»	$\pm 2^s,04 (\delta = 1°30')$
» 40,	$\pm 0^s,11$	»	$\pm 3^s,06$

Comme le sinus de $1°30'$ est égal à $\frac{1}{38}$, on peut admettre avec assez d'approximation que l'erreur d'observation du passage à la lunette méridienne portative est en raison inverse du sinus de la distance polaire.

Pour rendre tous les p comparables entre eux, il convient donc de multiplier chaque équation par le sinus de la distance polaire, et il viendra

$$w\sin\delta + a\sin(\delta-\lambda) + c = p\sin\delta.$$

Telle est la forme des équations de condition.

Les équations normales seront, n étant le nombre d'observations,

$$[\sin^2\delta]w + [\sin\delta\sin(\delta-\lambda)]a + [\sin\delta]c = [p\sin^2\delta],$$
$$[\sin\delta\sin(\delta-\lambda)]w + [\sin^2(\delta-\lambda)]a + [\sin(\delta-\lambda)]c = [p\sin(\delta-\lambda)\sin\delta],$$
$$[\sin\delta]w + [\sin(\delta-\lambda)]a + nc = [p\sin\delta].$$

On remarquera que c change de signe, selon qu'on observe cercle à l'Ouest ou cercle à l'Est. La quantité employée t étant une moyenne, sa précision est proportionnelle à la racine carrée du nombre de fils observés. Ainsi la précision du passage observé à cinq fils étant 1, on aura

Pour l'observation à	4 fils	0,90
» »	3	0,78
» »	2	0,63
» »	1	0,45

Il faudra donc multiplier les équations de condition par les facteurs qui correspondent au nombre de fils observés.

Si l'on a calculé les équations sous la forme (1) et qu'il ne s'agisse que de tenir compte de leurs poids, on aura une précision suffisante, sans trop compliquer les coefficients, en prenant pour $\sin\delta$ les nombres entiers de 1 à 10 d'après le Tableau ci-après :

δ	δ	Poids
0° à 8°	180° à 172°	1
8 à 15	172 à 165	2
15 à 21	165 à 159	3
21 à 27	159 à 153	4
27 à 33	153 à 147	5
33 à 40	147 à 140	6
40 à 48	140 à 132	7
48 à 58	132 à 122	8
58 à 72	122 à 108	9
72 à 90	108 à 90	10

177. — Application au point rapproché. Point le plus probable.

On a vu que l'intersection de deux droites de hauteur donne une position géographique. Si l'on a plus de deux droites, elles ne se couperont généralement pas au même point, à cause des erreurs d'observation. Quant à celle qui affecte l'heure du premier méridien d'après le chronomètre, elle est constante pour un groupe donné d'observations et elle a pour résultat de déplacer l'intersection des courbes en longitude : on ne peut donc songer à l'éliminer par la multiplication des observations, mais on l'atténuera par l'emploi d'un grand nombre de chronomètres. Admettons de plus que l'erreur provenant d'une estime fautive ait été éliminée, en opérant au besoin par approximations successives, et qu'il ne reste plus que les erreurs sur l'observation des hauteurs et des heures; on pourra, faute d'autres données, traiter ces erreurs comme accidentelles.

On a vu que si l'on désigne par p la perpendiculaire abaissée du point estimé sur une droite de hauteur, on a

$$p = x\sin A + y\cos A.$$

Si η est l'erreur commise sur p provenant des erreurs de distance zénithale et d'observation du temps, on a

$$\eta = x\sin A + y\cos A - p.$$

Les distances zénithales sont supposées également précises ; leurs erreurs se reportent directement sur η par voie d'addition ou de soustraction, il n'y a donc pas lieu d'attribuer des poids différents aux différentes équations.

La méthode des moindres carrés appliquée à plusieurs équations de cette forme conduira à rendre minimum la somme des carrés des erreurs η, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\Sigma\eta\frac{d\eta}{dx}=0, \qquad \Sigma\eta\frac{d\eta}{dy}=0,$$

et comme

$$d\eta=\sin A\,dx+\cos A\,dy,$$

cela revient à

$$\Sigma\eta\sin A=0, \qquad \Sigma\eta\cos A=0.$$

Appliquant les notations de Gauss, les équations normales seront

$$[\sin A\cos A]y+[\sin A\sin A]x=[p\sin A],$$
$$[\cos A\cos A]y+[\sin A\cos A]x=[p\cos A].$$

On pourrait donner une interprétation géométrique de ces équations : mais la solution n'est pas assez simple pour qu'on soit tenté de l'appliquer souvent en mer, eu égard au degré de précision des observations faites à bord : une construction graphique suffira le plus souvent à la discussion du point.

178. — Conclusion.

Les développements dans lesquels nous venons d'entrer au sujet de la théorie des erreurs et de la résolution des équations de condition ne présentent pas le caractère de rigueur mathématique que l'on est habitué à trouver dans les Sciences exactes. On ne peut pas dire qu'elles aient rallié l'opinion unanime des savants ; tandis que les uns y voient un instrument merveilleux de recherches, d'autres, frappés des mécomptes que l'application de ces procédés a occasionnés, leur dénient toute valeur. Nous ne songeons point à reprocher à la méthode des moindres carrés l'usage très général qu'en ont fait les savants allemands ; les questions de nationalité sont ici hors de cause ; M. Faye remarque d'ailleurs avec raison que Gauss

n'a fait que perfectionner cette méthode qui est due à Legendre.

Les erreurs mémorables constatées sur le chiffre de la parallaxe solaire d'Encke et sur la masse de Jupiter, erreurs telles qu'on a dû admettre depuis des chiffres dont les probabilités étaient respectivement $\frac{1}{100\,000}$ et $\frac{1}{1\,000\,000}$, ont été expliquées (¹); il n'en reste pas moins ce fait inquiétant que des observateurs et des calculateurs éminents n'ont été avertis par rien de l'incertitude des résultats qu'ils obtenaient : voilà qui est certes de nature à inspirer une défiance salutaire à l'endroit des nombres trop concordants.

Il est nécessaire de connaître ces théories et de savoir les appliquer au besoin, mais il est encore plus nécessaire de ne leur attribuer que leur valeur propre ; il faut les étudier plus spécialement en vue d'apprendre à connaître les erreurs si multiples qui peuvent vicier les observations, et à diriger toute l'attention des observateurs vers les méthodes d'observation les plus propres à en éliminer l'effet. A ce point de vue, nous attachons plus de prix à la manière d'établir les équations de condition qu'à celle de les résoudre.

Quand on se trouvera dans le cas d'appliquer la méthode des moindres carrés, il sera bon de ne pas perdre de vue la condition fondamentale de sa légitimité, qui est l'absence de toute erreur systématique. Or, nous avons montré que toute erreur étant l'effet nécessaire d'une cause, connue ou inconnue, il n'y a pas en réalité d'erreur fortuite, et que la Science tend de jour en jour à en restreindre le nombre et l'importance. Il faudra toujours vérifier *a posteriori* si les résidus d'erreurs suivent bien la loi des probabilités; s'ils ne la suivent pas, on saura immédiatement qu'on a des résultats incertains; s'ils la suivent, on ne sera pas toujours assuré de tenir la vérité, quoique cela constitue une présomption favorable.

En réalité, toutes les démonstrations s'appuient implicitement ou explicitement sur le théorème de Bernouilli, qui n'est vrai que pour un nombre infini d'événements. L'application à un nombre fini, et parfois minime, n'est donc permise que sous réserve de contrôle. M. Faye fait observer qu'un petit nombre d'observations

(¹) On peut même y ajouter la détermination de l'aplatissement de la Terre, par Bessel, qui a trouvé $\frac{1}{299,1}$ en 1840. Si l'on admet, avec M. Faye, qu'il faut prendre $\frac{1}{292 \pm 1,5}$, c'est-à-dire que l'erreur probable du dénominateur est 1,5; il s'ensuit que l'erreur 7,1 du dénominateur de Bessel a une probabilité inférieure à $\frac{2}{1000}$.

satisfaisant à la loi des erreurs fortuites peut être considéré dans certains cas comme suffisant. Il cite l'exemple de la détermination de l'aplatissement par les mesures du pendule. On peut admettre cette manière de voir quand il s'agit, comme dans l'espèce, de mesures exceptionnellement précises; nous penchons pourtant à croire qu'il y a là un hasard heureux, et que les exemples d'insuccès sont plus nombreux que ceux d'applications bien réussies.

Il suffit, pour s'en convaincre, de réfléchir aux difficultés qu'on éprouve à assigner à chaque équation le poids qui lui convient, et de voir combien une modification de ce poids change le résultat final quand le nombre d'observations est restreint.

Supposons, par exemple, qu'on ait à déterminer deux inconnues x et y par trois équations

$$3x + 4y = 18,$$
$$5x - 2y = 4,$$
$$x + y = 6.$$

On trouvera par la méthode des moindres carrés $= \frac{1470}{726}$.

Si l'on multipliait la dernière équation par 3, ce qui fait

$$3x + 3y = 18,$$

la valeur de x tirée du nouveau système serait $\frac{1370}{1126}$, et le rapport de ces valeurs est égal à 1,653.

En général, l'erreur probable calculée par ces méthodes est un minimum; elle donne une idée trop avantageuse de la précision du résultat puisqu'elle ne comprend pas les erreurs systématiques. Supposons qu'on ait un théodolite dont le cercle ne donne que la minute, mais dont la lunette permet de pointer à $\pm 10''$. Admettons qu'un grand nombre de pointés successifs aient donné une lecture déterminée, par exemple $25°31'$. La considération de l'erreur probable assignerait à cette direction une grande précision. Et pourtant elle pourrait fort bien être $25°30'40''$ ou $25°31'20''$ et l'*incertitude* du résultat est de $20''$.

Du reste, pour bien apprécier la méthode des moindres carrés, nous ne pouvons mieux faire que d'emprunter à Gauss lui-même quelques considérations éparses dans ses Ouvrages.

« La valeur moyenne de Δ^2 paraît très propre à définir et à mesurer, d'une manière générale, l'incertitude d'un système d'ob-

servations. Si l'on objecte que cette convention est arbitraire et ne semble pas nécessaire, nous en convenons volontiers. La question qui nous occupe a, dans sa nature même, quelque chose de *vague* et ne peut être bien précisée que par un principe jusqu'à un certain point arbitraire... Il faut chercher à établir l'accord le plus satisfaisant... Mais cette idée a, par elle-même, quelque chose de vague... De tous ces principes, le nôtre est le plus simple... Laplace se sert d'un autre principe, proposé d'abord par Boscovich, savoir : que la somme des valeurs absolues des différences devienne minimum... »

Aussi Yvon Villarceau se demande-t-il s'il y a une raison pour préférer la somme des carrés à une somme quelconque de puissances finies.

Enfin, si l'expérience donne raison à la loi des probabilités des erreurs dans quelques cas, généralement le nombre des grandes erreurs est supérieur à celui qu'indique la formule.

Voilà pour ce qui a trait au principe. Quant à l'application, c'est-à-dire à la résolution même des équations de condition, il ne faut pas perdre de vue :

1° Que la méthode des moindres carrés donne des résultats différents selon la première valeur approchée que l'on adopte ;

2° Que la méthode de Cauchy ne donne pas les mêmes résultats numériques, quel que soit l'ordre des éliminations.

Notre but, en présentant ces critiques, n'est pas de déconseiller d'une manière générale l'emploi des méthodes en question. Nous désirons seulement faire comprendre que les chiffres, comme on le dit quelquefois, sont complaisants, et permettent souvent de se faire à soi-même l'illusion d'une rigueur qui n'existe pas. C'est pourquoi nous n'avons même pas mentionné ce qu'on appelle le *criterium* de Pierce, ou celui de Chauvenet, destinés à éliminer systématiquement les observations qui cadrent mal avec la moyenne. Nous n'admettons cette pratique à aucun titre, car elle fausse l'esprit même des Sciences d'observation. On ne doit pas rejeter un résultat après coup, si ce rejet n'est motivé que par une discordance plus grande que celle des autres résultats, et si l'on n'a pas, dans l'impression de l'observateur, constaté avant tout calcul et dans les circonstances mêmes de l'observation, la preuve que celle-ci est douteuse.

S'ensuit-il qu'il faille se condamner à faire entrer dans une moyenne d'un grand nombre d'observations assez bonnes une ou plusieurs mesures manifestement mauvaises? Une telle prescription serait évidemment trop absolue, surtout dans le cas des observations faites en voyage, avec des instruments plus sujets à des dérangements, et qui ne peuvent prétendre à être toutes de même valeur; les erreurs sont plus grandes, plus irrégulières; des méprises plus ou moins grossières sont possibles. Ce que nous repoussons, c'est l'emploi d'un criterium, arbitraire d'un côté, d'une application purement machinale de l'autre, qui cherche à déduire d'un seul groupe limité d'observations leur degré de précision, alors que M. Bertrand a fait voir combien cette pratique est peu justifiée. Plus les observations sont sujettes à discussion, plus aussi il importe que cette discussion soit réfléchie et consciencieuse, et qu'elle ne soit jamais conduite en vue de faire cadrer le résultat avec une opinion préconçue et parfois erronée, comme par exemple de le faire s'accorder avec des nombres précédemment affirmés.

Tant qu'on s'en tient aux méthodes actuelles, déduites du calcul des probabilités, le seul criterium acceptable consiste dans la comparaison avec la loi de probabilité des erreurs, et ce criterium donne la valeur du résultat total, sans qu'il soit permis de perfectionner celui-ci en rejetant les résultats partiels affectés en apparence des plus grosses erreurs. Telle est l'opinion des Le Verrier, des Yvon Villarceau, des Faye, pour ne citer que ceux-là; telle nous paraît être la conclusion la plus digne et la plus vraie. Des nombres déterminés par les plus grands astronomes au début de ce siècle, pas un seul ne subsiste; tout résultat d'expérience est sujet à être modifié et perfectionné, mais les observations faites et discutées avec sincérité ont sur les autres cet avantage qu'elles ne sont jamais entièrement perdues et qu'elles concourent pour leur part au développement et au progrès incessant de la Science.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

ADDITIONS ET RECTIFICATIONS

PREMIÈRE PARTIE.

Page 43, lignes 16 et 17, au commencement : *au lieu de* $n\delta$, *lisez* $\sin\delta$.

Page 88. M. Radau a montré (*Annales de l'Observatoire de Paris; Mémoires*, t. XVI, 1882) que les Tables calculées par M. Caillet renferment quelques erreurs. Une étude complète de la question l'a amené à construire des Tables nouvelles, que le Bureau des Longitudes doit substituer prochainement à celles de M. Caillet dans la *Connaissance des Temps*.

Page 103. Nous devons à M. Cornu la communication d'une formule pratique fort simple, établissant une relation entre le champ γ' et le grossissement G d'une lunette :

$$G\gamma' = 600',$$

γ' étant exprimé en minutes : ainsi, pour un grossissement de 60 diamètres, le champ est de 10′. En fait, le coefficient du second membre n'a rien d'absolu et dépend de la netteté qu'on désire conserver au bord du champ. Si l'on ne limite pas cette netteté et que le champ ne se trouve déterminé que par les dimensions ordinaires des verres de l'oculaire, ce nombre peut être doublé.

Page 106. M. Cornu nous a fait observer que le diamètre apparent des images d'étoiles est en réalité indéterminé. Au lieu donc de considérer l'éclat intrinsèque d'une étoile, il vaut mieux s'attacher à la quantité totale de lumière amenée dans le plan focal.

Page 115, ligne 16. *Lisez :* l'idée première de l'héliomètre à double image est due à Bouguer, qui l'a publiée dès 1748. Il proposait l'emploi de deux objectifs, que Dollond remplaça en 1753 par les deux moitiés d'un même objectif.

Page 116. L'emploi d'une lampe munie d'une lentille convergente est très avantageux pour l'observation du nadir. Un réflecteur concave remplit le même but.

Page 118. M. d'Abbadie préfère à l'emploi d'une peau de chamois, celui d'un entonnoir en fer, ne laissant passer qu'un mince filet de mercure, et donnant ainsi, avec plus de facilité, une surface très nette et brillante.

Page 124. Les artistes n'emploient pas le mot d'examinateur des niveaux, mais ils disent : une éprouvette.

Page 139. Après la ligne 14, *ajoutez :* et parce que les pinces ordinaires serrent mal un limbe souvent trop lisse.

Page 152 Ligne 3. *Au lieu de* $+a\sin\delta-\lambda)$, *lisez* $+a\sin(\delta-\lambda)$.

Page 160. Lignes 5 et 6. L'éloignement *suffisant* dépend de la longueur focale de la lunette et de sa puissance; avec les lunettes ordinaires des instruments portatifs, la vision nette a lieu à partir de 200^m à 300^m avec la mise au point pour l'infini.

Page 183. M. d'Abbadie a introduit plusieurs modifications dans le nouveau modèle de théodolite qu'il a fait construire postérieurement à celui dont nous donnons la figure. L'oculaire et le prisme sont permutés de position. La graduation du cercle vertical est sur la face tournée vers l'oculaire; les loupes pour la lecture sont voisines de celui-ci. Les verniers du cercle horizontal, grâce à une réflexion à 90°, sont aussi lus dans la même position de l'observateur, dans laquelle sont faits les pointés et la lecture du cercle vertical. Quand on n'a pas trop à craindre la chaleur et l'humidité, des miroirs peuvent remplacer avec avantage les prismes à réflexion totale.

Page 207. Après la ligne 13 à partir du bas, *ajoutez :* Comme on observe les hauteurs doubles, l'erreur de lecture est aussi divisée par 2.

Page 220. Ligne 5, *après* à la lunette, *ajoutez :* au moyen des vis de rappel de l'instrument. A des secondes rondes du chronomètre on établit par là les contacts ou les pointés, et l'on arrête le mouvement quand on juge le pointé satisfaisant; il correspond ainsi à une seconde entière.

Page 237. Ligne 15, dans le deuxième membre, *au lieu de* $(\alpha_0^2-\alpha)$, *lisez* $(\alpha_0^2-\alpha^2)$.

Page 241. Ligne 23, *ajoutez :* Aujourd'hui que l'emploi de l'électricité à bord des navires a pris une grande extension, on n'oubliera pas que les chronomètres doivent être tenus sévèrement à l'abri de toute action électrique. Une montre qu'on approche trop d'une machine dynamo est perdue.

DEUXIÈME PARTIE.

Page 22. Ligne 17, *au lieu de* § 110, *lire* § 111.

Circommériдiennes en fonction de l'azimut (§ 96). — Nous devons à l'obligeance de M. A. d'Abbadie la communication d'une série d'observations de circommériдiennes du Soleil avec lectures azimutales, que le savant voyageur a faites à Hodaïdah, et que nous avons calculées. En traitant ces données, exprimées en grades et décimales de grade, nous avons pu constater une fois de plus tous les avantages que le système décimal offre au calculateur.

Les observations ont été faites avec un aba; les pointés en azimut et en distance zénithale étaient simultanés.

Date : 1885, Janvier 20.

Colatitude supposée : $75^{\circ}12',2$.
Longitude : $-2^{h}42^{m}$ (Est).

Avec ces données, on trouve, dans la *Connaissance des Temps*, pour l'heure de midi vrai,

$$\delta = 110^{\circ}2'30'', \qquad \tfrac{1}{2}\,D = 16'17'',$$

ou, dans le système décimal,

$$\lambda = 83^{G},5586, \qquad \delta = 122^{G},2684, \qquad \tfrac{1}{2}\,D = 0^{G},3016.$$

Nous avons commencé par appliquer, comme d'habitude, aux distances zénithales les corrections de niveau, réfraction, parallaxe et demi-diamètre, et nous en avons déduit les distances zénithales du centre du Soleil (première colonne).

Nous avons ensuite calculé la différence d'azimut du centre et du bord du Soleil pour la distance zénithale moyenne $38^{G},77$, ce qui est largement suffisant, et nous avons trouvé $0^{G},527$; ce nombre, ajouté ou retranché, selon le cas, à la lecture du bord du Soleil en azimut a donné les chiffres de la deuxième colonne : lecture azimutale ☉.

Pour avoir l'azimut méridien, nous remarquons que la moyenne des quatre premières distances zénithales est $38^{G},778$ et celle des deux dernières $38^{G},777$; nous pouvons donc prendre, pour une première approximation, ces moyennes comme correspondantes. La moyenne des quatre premières lectures azimutales est $47^{G},56$, celle des deux dernières $54^{G},96$; la moyenne $51^{G},26$ sera la lecture correspondant au midi. Faisant les différences avec les lectures de la deuxième colonne, nous obtenons la troi-

sième colonne : azimut approché A, en affectant, pour plus de simplicité, le signe — aux azimuts vers l'Est.

$\zeta \ominus$	Lecture azimutale $\oplus$	Azimut approché A	Réduction au méridien	ζ méridienne du $\ominus$	Différence (en millièmes de grade).
G	G	G	G	G	
38,822	46,50	— 4,76	0,104	38,718	— 5
776	47,10	— 4,16	0,080	696	+ 17
771	47,99	— 3,27	49	722	— 9
744	48,66	— 2,60	39	705	+ 8
722	49,34	— 1,92	14	708	+ 5
724	50,18	— 1,08	5	719	— 6
720	51,05	— 0,21	0	720	— 7
720	52,57	+ 1,31	8	712	+ 1
735	53,60	+ 2,34	22	713	0
760	54,36	+ 3,10	44	714	— 1
794	55,47	+ 4,21	0,081	713	0

Notre Table III n'étant pas appropriée au système décimal, afin d'exprimer la réduction au méridien en minutes de grades, nous la mettrons sous la forme

$$\frac{\sin\lambda \sin\zeta}{\sin\delta \sin 1^{\prime}} \times 2\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$

en prenant pour ζ $38^{G},720$ ou la valeur minimum; on peut abréger le calcul de $2\sin^2\frac{1}{2}A$ et se dispenser de prendre $\frac{1}{2}A$, en remarquant que dans les limites de l'approximation requise, on a sensiblement

$$\cos\tfrac{1}{2}A = 1, \qquad \sin\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sin A;$$

donc

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}A = \sin A\sin\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sin A\sin A.$$

On prend le logarithme de $\sin A$, on en retranche à vue $\log 2$, et l'on additionne ces deux logarithmes avec le logarithme du premier facteur. Nous donnons le calcul pour la première réduction au méridien.

	$\log\sin\lambda$	9,9854
	$\log\sin\zeta$	9,7569
	$\operatorname{colog}\sin\delta$	0,0261
	$\operatorname{colog}\sin 1^{\prime}$	3,8039
	$\log a$	3,5723
$A = 4^{G},76$	$\log\sin A$	8,873
	$\log\sin A - 0,301$.	8,572
	$\log a$	3,572
	somme	1,017

nombre .. $10,4 = 0^{G},104$

et de même pour les autres. Le facteur a est évidemment calculé une fois

pour toutes. C'est ainsi qu'on a trouvé les nombres de la quatrième colonne qui, retranchés de ceux de la première, nous donnent enfin les distances zénithales méridiennes.

La moyenne des distances réduites est $38^{\circ},713$; en en retranchant les résultats isolés, nous trouvons les corrections ε de chacun de ceux-ci (dernière colonne). Ces corrections, dans le cas présent, ne suivent aucune loi de grandeur ni de signe; nous sommes donc fondés à considérer notre hypothèse sur l'azimut comme suffisamment exacte pour le but que nous nous étions proposé, et nous aurons enfin, en donnant à ζ le signe — conformément à nos conventions,

$$\begin{aligned} \delta \ldots . \quad & 122^{\circ},268 \\ \zeta \ldots . \quad & -\ 38\ ,713 \\ \hline \lambda \ldots . \quad & 83^{\circ},555 \end{aligned}$$

Malgré les circonstances défavorables de l'observation et la lente variation des distances zénithales, la méthode des azimuts correspondants pris à vue nous a donné du premier coup la direction du méridien avec l'approximation nécessaire au calcul des réductions. Nous avons indiqué (§ 94) que s'il n'en était pas ainsi on pourrait étendre à ce cas la méthode du Paragraphe 111; comme on a déjà $\sin A$, le calcul se ferait rapidement et il paraît inutile de donner un exemple numérique.

Page 39, § 102. *Méthode Talcott.*

La méthode qui porte assez généralement le nom de Talcott a été inventée par Horrebow, et exposée par lui sous le nom de hauteurs réciproques, dans son livre *Atrium Astronomiæ*, publié en 1732. (*Voir* dans le *Bulletin astronomique* de 1884, p. 327, une lettre de M. d'Abbadie sur ce sujet).

Page 55, ligne 24, *au lieu de :* celle qui donne des valeurs, etc., *lisez :* celle qui donne un angle horaire positif pour l'étoile ouest. On prend pour x le plus petit angle, positif ou négatif, qui correspond à la tangente trouvée.

Page 85, ligne 8, *ajoutez :* Le lecteur trouvera dans la *Géodésie de la Haute Éthiopie,* par M. A. d'Abbadie, l'exposé complet de la méthode des azimuts correspondants pour déterminer à la fois l'azimut, l'heure et les corrections instrumentales du théodolite sans le secours des éphémérides. Si nous n'avons pas cru devoir développer ici cette ingénieuse méthode, c'est surtout parce qu'elle exige l'emploi d'un certain nombre de Tables spéciales qu'on trouvera dans l'Ouvrage cité et qu'il nous aurait fallu reproduire. Nous pensons d'ailleurs que cette observation ne peut être bien faite que par un observateur très exercé.

Page 140, ligne 1, *ajoutez :* Nous avons déjà fait remarquer (§ 20) qu'il convient d'observer plus de deux étoiles de culmination, afin d'accroître

la précision de l'état absolu. Pour éviter l'effet des irrégularités de marche de la montre, il est bon d'en avoir au moins deux passant avant la Lune, et deux après.

Page 156. Dernière ligne, *ajoutez :* M. d'Abbadie a employé les hauteurs de Lune, et M. Serpa Pinto, à qui il les a conseillées, a eu des discordances moyennes ne dépassant pas 4^s.

Page 226, ligne 23. *Complétez :* $y' = ZS'S$.

Page 227, lignes 6 et 7 *à remplacer par* : On prend le signe + quand l'alignement des deux astres passe entre le zénith et le pôle nord, le signe — quand cet alignement passe au sud du zénith.

Pages 264 et 276. *Mesure des bases.*

La discussion de la précision des observations géodésiques nous aurait entraîné à des développements dépassant de beaucoup le cadre que nous nous étions tracé.

Voici pourtant, à titre de simple indication, quelques chiffres qui pourront guider dans le choix de la méthode pour la mesure des bases.

D'après M. Chazallon, en mesurant une base par la vitesse du son, l'erreur maximum à craindre serait de :

122^m sur une base de 3400 mètres. Erreur relative $\frac{1}{28}$.
222^m sur une base de 20400 » » $\frac{1}{92}$.

D'après M. Bouquet de la Grye, une base astronomique dépendant de mesures de latitude faites au cercle méridien portatif à microscopes peut être obtenue à moins de 1″ d'arc, soit 30 mètres environ.

Si l'on opère avec un théodolite à microscopes, notre expérience nous a fait admettre dans les mêmes conditions une erreur maximum de 3″ à 4″; cette erreur est sensiblement la même pour des différences de longitudes chronométriques mesurées dans de bonnes conditions.

Pour la hauteur de la mâture, M. Chazallon, admettant des erreurs de pointé de 1′ et une erreur relative de $\frac{1}{80}$ sur la hauteur du mât, trouve 126^m sur 3400^m; mais en opérant dans les conditions de la page 276, on peut arriver à réduire ces erreurs respectivement à 10″ et à $\frac{1}{150}$, de sorte que l'erreur finale ne dépasse guère 40^m sur 3400^m, si la hauteur du mât est de 30^m.

TABLE ANALYTIQUE

DES DEUX PARTIES.

(Les chiffres romains indiquent le numéro de la Partie, les chiffres arabes, les pages.)

Aba, I, 182.
Aberration, I, 53, 155.
Altazimut, I, 158, 218, 221.
Altitudes, II, 269.
Amplitudes, II, 96.
Angles (mesure des), I, 128, 163, 207, 211; II, 7, 10, 86.
Année, I, 49, 51.
Azimut, I, 40, 154, 221; II, 21, 33, 80 et suivantes, 165, 212, 255, 265, 291, 341.
Balancier des chronomètres, I, 226, 245.
Baromètres, I, 89; II, 272.
Bases, II, 264, 276, 344.
Borda (formules de), I, 14; II, 58, 92; — (cercle de), voir *réflexion*.
Calculs numériques, I, 26.
Cartes géographiques, II, 194 et suiv.
Catalogues d'étoiles, I, 60.
Cauchy (méthode de), II, 321.
Centre (réduction au), II, 255.
Cercles divisés, I, 128, 132; — méridiens, I, 140, 147; II, 4, 139; — à réflexion, I, 208.
Champ d'une lunette, I, 103; II, 339.
Chronomètre (théorie du), I, 225 et suiv.; — (longitude), II, 111.
Circonméridiennes, II, 12, 65, 75, 288, 291, 341.
Circompolaires, I, 45; II, 27, 33, 96.
Circonstances favorables, II, 53, 61, 99, 284.
Clarté d'une lunette, I, 104.
Colatitude, I, 40, 66; II, 3 et suiv., 255, 265, 287, 328, 341.
Collimation, I, 115, 144, 180, 192; II, 7, 30.
Comparaison des chronomètres, II, 115.
Compas, II, 211, 303.
Constructions graphiques, I, 35, 268; II, 173, 239, 247, 257, 259, 262, 277.
Convergence des méridiens, II, 257.
Coordonnées astronomiques, I, 39; — géographiques, I, 64; — (transformation des), I, 11, 20.
Corrections, I, 35; — instrumentales, I, 150, 164, 192, 198; II, 30, 330; — Givry, II, 257.
Correspondantes (hauteurs), II, 50, 83.
Courbes de hauteur, I, 80; II, 210, 240.
Croissantes (latitudes), II, 195, 241.
Culminations, I, 46; II, 3, 10, 139.
Déclinaison, I, 41; — magnétique, II, 211.
Delambre (formules de), I, 13; II, 15, 224.
Dépression, I, 91; II, 271.
Déviation des compas, II, 211, 303; — azimutale, I, 152, 154; II, 330.
Diamètre apparent, I, 78.
Digressions des circompolaires, I, 45; II, 33, 96
Distances lunaires, II, 148; — polaires, I, 41; — terrestres, II, 264, 275; — zénithales, I, 41, 163 et suiv., 218; II, 57, 65, 90, 270, etc.

Douwes (problème de), II, 222.
Échappement libre, I, 230.
Éclairage des instruments, I, 117, 131.
Éclipses, II, 105, 169.
Écliptique, I, 45.
Ellipsoïde, I, 67.
Éphémérides, I, 57.
Équation du temps, I, 48; — des hauteurs correspondantes, II, 52; — de condition, II, 293.
Erreurs, I, 35, 132; II, 280 et suiv.
Estime, II, 211.
État absolu, I, 153, 265; II, 112, 118, 297, 329, 330.
Étoiles (catalogue d'), I, 60; — (manière de reconnaître les), II, 277.
Excentricité de l'ellipse, I, 67; — des instruments, I, 133, 201.
Flexion des lunettes, I, 185.
Formules, I, 11; — du triangle de position, I, 43; — différentielles, I, 16; — calculables par logarithmes, I, 14; — des chronomètres, I, 271.
Géodésie, II, 253, 273.
Givry (correction), II, 257.
Gnomon, II, 83.
Gnomonique (projection), II, 208, 251.
Grossissement, I, 101; II, 339.
Hauteurs, I, 41; — (courbes de), I, 80; II, 210, 240; — correspondantes, II, 50, 83; — égales de deux étoiles, II, 54; — (réduction à un autre horizon), II, 217; voir *distances zénithales*.
Heure (angle horaire), I, 41, 46; II, 49 et suiv., 289, 328, 330.
Horizon, I, 39; — (dépression de l'), I, 91; — artificiel, I, 117.
Inclinaison, I, 142, 164; II, 32.
Instruments, I, 97.
Interpolation, I, 31; — (méthode de Cauchy), II, 321.
Isochronisme, I, 236.
Lalande (méthode de), II, 219.
Latitudes, I, 40; — croissantes, II, 197, 241; voir *colatitude*.
Levés géodésiques, II, 253, 273; — sous voiles, II, 262.
Lieux géométriques, I, 80; II, 210, 238, 240.
Logarithmes, I, 14, 27.
Longitude, I, 64; II, 102 et suiv.; — géographique d'un astre, I, 66, 81.
Lune, II, 105, 139 et suiv.
Lunette astronomique, I, 98 et suiv., II, 339.
Marche des chronomètres, I, 265; II, 118.
Mercator (projection de), II, 195, 241.
Méridien, I, 40, 64, 65; voir aussi *azimut, cercle, coordonnées, longitude, réduction*, etc.
Micromètre, I, 107, 114.
Microscope, I, 112, 131.
Moindres carrés, II, 306.
Mouvement diurne, I, 38.
Nadir, I, 39, 116, 118; II, 7.
Navigation astronomique, II, 216; — à l'estime, II, 211; — orthodromique, II, 250.
Niveau à bulle, I, 120; II, 8.
Nivellement des instruments, I, 127, 142, 164, 171; — géodésique, II, 269.
Nutation, I, 49.
Observations, I, 148, 214, 218; II, *passim*.
Occultations, II, 171 et suiv.
Orthodromique (route), II, 250.
Pagel (méthode de), II, 221.
Parallaxe, I, 20, 71; II, 158, 167; — des fils, I, 109.
Passage méridien, I, 148; II, 49; — au premier vertical, I, 40, 184; II, 27; — du Soleil par un vertical, II, 43.
Perturbations des chronomètres, I, 238, 255.
Point, II, 209; — estimé, II, 211; — par plusieurs hauteurs, II, 222, 238, 240, 328; — rapproché, II, 231, 232, 332.
Polaire (étoile), II, 23, 97; — (projection), II, 199; — (distance), I, 41.
Pratique des observations, I, 211.
Précession, I, 49.
Précision, I, 27; II, 310, 315.
Prédiction des occultations, II, 171.
Probabilité des erreurs, II, 306.
Projections des cartes, II, 194 et suiv., 240, 251.
Rapproché (point), II, 231, 332.
Rayon terrestre, I, 67, 70.
Réduction au centre, II, 255; — au fil moyen, I, 155; — d'une hauteur à

l'horizon d'un autre lieu, II, 217; — à l'horizon, II, 98; — à la digression, II, 36; — au méridien, II, 7, 14; — d'un cheminement, II, 277; — des routes, II, 214.
Réflexion (instruments à) I, 187, 214.
Réfraction, I, 82, 92.
Réitération, I, 137.
Relèvement, II, 212, 256, 275; voir *azimut*.
Répétition des angles, I, 138.
Réticule, I, 107.
Segment capable, II, 259.
Séries, I, 14, 19, 24.
Sextant, I, 206.
Sidéral (temps), I, 46.
Signaux instantanés, II, 103; — géodésiques, II, 255, 274.
Son (vitesse du), II, 268.
Sphère céleste, I, 38.
Spiral des chronomètres, I, 242.
Stéréographique (projection), II, 200.
Sumner (méthode de), II, 222.
Talcott (méthode dite de), II, 39, 343.
Télégraphe électrique, II, 106.
Temps, I, 46; voir *chronomètre* et *heure*.
Terre (forme et dimensions de la), I, 67.
Théodolite, I, 158, 218.
Triangles sphériques, I, 12; — géodésiques, II, 254, 258, 265.
Triangulation, II, 254 et suiv.
Trigonométrie sphérique, I, 11.
Variation du compas, II, 211, 303; — des plans fondamentaux, I, 49.
Vernier, I, 129.
Vertical, I, 40; — (premier), I, 184; II, 27.
Verticale, I, 39, 117.
Zénith, I, 39.
Zénithales (distances), I, 41; — (mesures des distance), I, 163, 165, 207, 216, 218; II, 7, 10, 157; — (heure par les distances), II, 50 et suiv.; — (azimut par les distances), II, 83, 90.

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

Storage

162311

Astron
C

Author Caspari, Edouard

Title Cours d'astronomie pratique, application à la

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU